非線形偏微分方程式入門
— 1 次元移流方程式を使って —

新潟工科大学 情報電子工学科
竹野 茂治*

平成 14 年 10 月 4 日

0　はじめに

この文書は、1 次元の波動方程式 (wave equation) と関係の深い移流方程式 (advection equation) と呼ばれる偏微分方程式について考察し、それにまつわるいくつかの非線形偏微分方程式を紹介し、その性質を述べることを目標としている。そのため、非線形の偏微分方程式の全般的な入門書ではない、ということをはじめに断っておく。元々、私の研究室で卒業研究を行う学生のための微分方程式の参考資料として書いたものであり、話題も私の専門分野に近い方にかなりかたよっている。

必要となる知識は、偏微分、特に合成関数の偏微分法則、そして常微分方程式の基礎知識などであり、これらが不足している場合は適宜良書でおぎなってもらいたい。

また、説明を簡単にするため、あるいはわかりやすくするために、詳しい証明を省いたり、厳密さを欠いた記述なども含まれる。疑問に思う点は、詳しい成書を参照してもらいたい。

1　1 次元波動方程式と移流方程式

2 階の線形偏微分方程式

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (u = u(t,x),\ a \text{ は正の定数}) \tag{1}$$

は、上下に小さく運動する弦の振動などをあらわす方程式で、1 次元波動方程式と呼ばれる。弦の振動の場合は t は時刻、x は場所、u は弦の高さを意味する。ただし、大きい振幅に対しては、この方程式を満たす関数と物理現象とは必ずしも対応しない。それはこの方程式をどのようにして導くかを見ればわかる。方程式の導出については [8], [11] などを参照せよ。

*shige@iee.niit.ac.jp

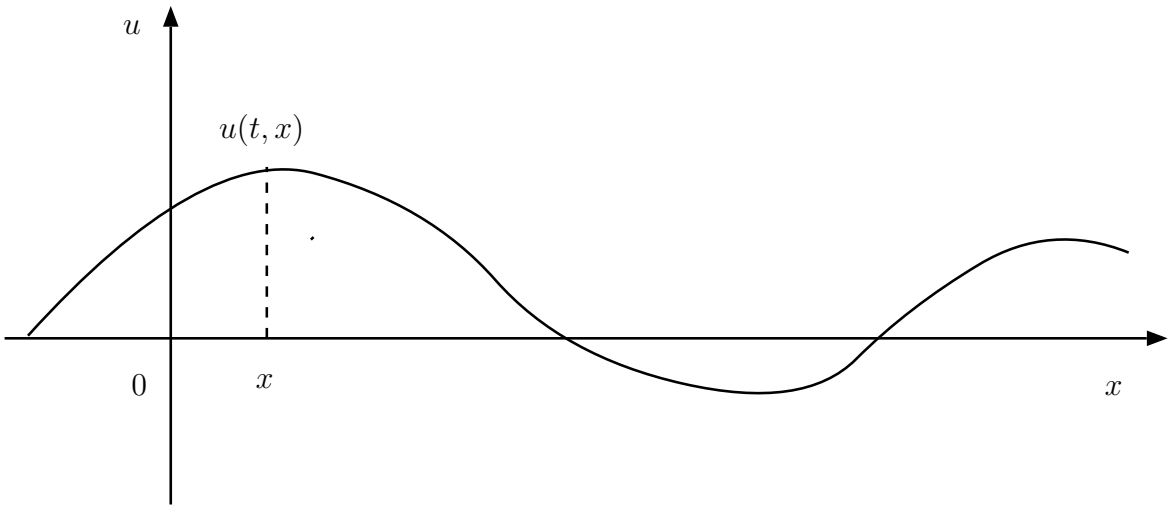

図 1: 弦の振動

今、偏微分を微分演算子を用いて

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t},\ D_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

のように書くことにすると (1) は

$$(D_t^2 - a^2 D_x^2)u = 0$$

と書け、a は定数なので、微分演算子に対して成り立つ公式

$$D_t^2 - a^2 D_x^2 = (D_t - aD_x)(D_t + aD_x) = (D_t + aD_x)(D_t - aD_x)$$

により、

$$(D_t - aD_x)(D_t + aD_x)u = (D_t + aD_x)(D_t - aD_x)u = 0$$

が成り立つ。この式から明らかに、1 階の偏微分方程式

$$(D_t + aD_x)u = 0 \tag{2}$$

または

$$(D_t - aD_x)u = 0 \tag{3}$$

を満たす関数 $u(t,x)$ は (1) の解であることがわかる。この逆、すなわち (1) を満たせば (2) または (3) を満たす、ということはもちろん成り立たない。

この $(2), (3)$ はそれぞれ次のような解を持つ。

$$u(t,x) = f(x-at) \tag{4}$$
$$u(t,x) = g(x+at) \tag{5}$$

ただし、$f(x), g(x)$ は滑らかな任意の関数である。これらがそれぞれ $(2), (3)$ を満たすことは偏微分の計算により容易に確かめられる。

今、(4) を x の関数と考えると、この関数は $f(x)$ のグラフを右に at 平行移動したものになっている。つまり、グラフの形は変わらずに、右に 1 秒当たり (t の単位を秒とすれば) a cm だけ (x の単位を cm とすれば) 平行移動したことになり、すなわち、速度 a [cm/秒] で平行移動している、とみなすことができる。これは右へ進む “波” と見ることができる。

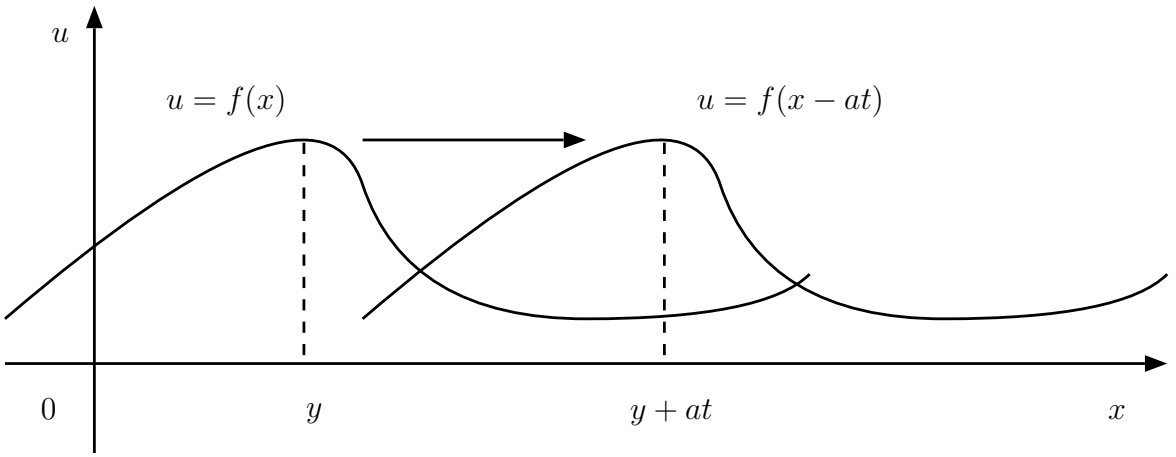

図 2: 右へ進む波

(5) は逆方向に $g(x)$ のグラフを平行移動した形の関数になっていて、すなわち $-a$ [cm/秒] で進む “波” である。

元の方程式 (1) は線形であり、解のいくつかを加え合わせたものもまた解となるので、よって (1) は

$$u(t, x) = f(x - at) + g(x + at) \tag{6}$$

という形の解を持つ。

実は、逆に (1) の解は必ず (6) の形になることが知られている (これについては [8], [11] などを参照)。

2 階の方程式の解が、常に 1 階の方程式の解から得られるとは限らないが、1 次元の波動方程式の場合は (1) と、(2) や (3) の形の方程式

$$u_t + au_x = 0 \quad (\text{または } u_t - au_x = 0)$$

には深いつながりがあることがわかる。この方程式は波動現象を解析する上で基本となるものであり、移流方程式と呼ばれている。

以下、この 1 階の移流方程式を基点にして、線形、非線形の波動現象を考えてみる。

2 特性曲線

まず移流方程式

$$u_t + au_x = 0 \quad (a \text{ は定数}) \tag{7}$$

を解いて、その解が

$$u(t,x) = f(x - at) \tag{8}$$

となることを示す。それには特性曲線を用いる。

まず、問題をもう少し明確にする。

- 関数 $u(t,x)$ の初期値 **(initial value)** ($t = 0$ のときの値) を $f(x)$ とする。

$$u(0,x) = f(x) \quad (\text{すべての実数 } x \text{ に対して}) \tag{9}$$

- 方程式 (7) は、すべての実数 x と、$t \geq 0$ の範囲にあるすべての t に対して成り立つと考える。

この条件の元で、解 $u(t,x)$ を f を使ってあらわすと (8) が得られることを示す。なおこの問題は、初期値を与えて解を求める、という形であり、これは初期値問題 **(initial value problem)**、あるいはこの問題を詳しく研究した人にちなんで コーシー問題 **(Cauchy problem)** と呼ばれる。

今、(t,x) 平面上に $x = at + x_0$ という直線を取る。

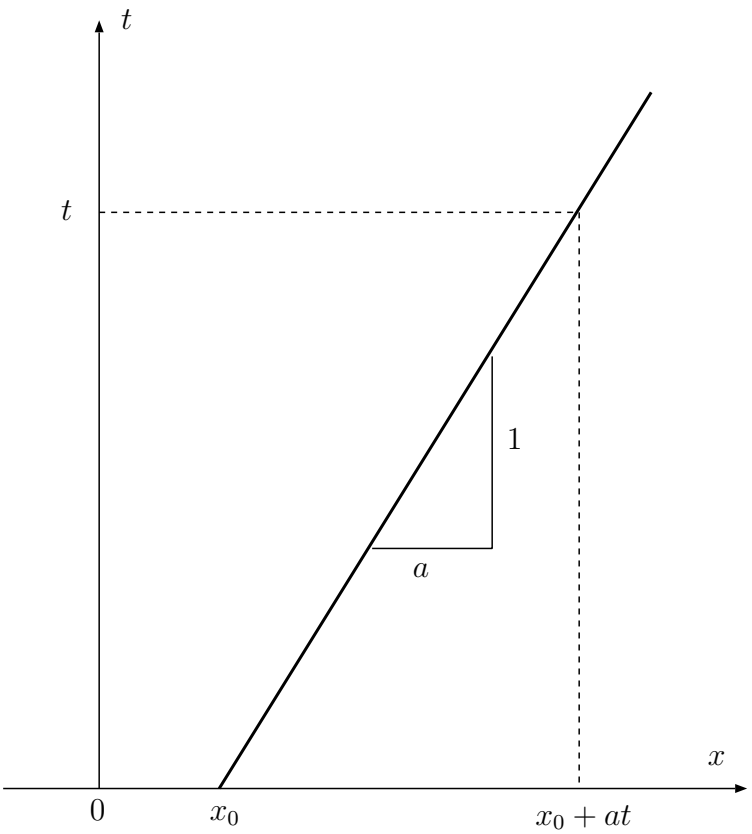

図 3: $x = at + x_0$

1 節で $u(t,x)$ を x の関数とみて、t の変化によるグラフの移動という考察を行ったが、それと同様に考えてみる。すなわち、この (t,x) 平面上の直線 $x = at + x_0$ を x 座

標についてみれば、これは各 t に対し一つの x の値、すなわち x 軸上の一点を表していて、それが t の変化につれて動いているとみなすことができる。すなわち、$x = at + x_0$ は x 軸を動く点の座標を表していると考えられる。

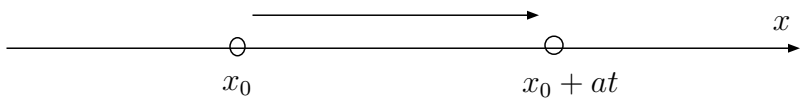

図 4: 点の移動

そうすると、この点は時刻 $t = 0$ で x_0 を出発し、

$$\frac{dx}{dt} = a$$

により、速度 a [cm/秒] で右に移動していることになる。

もし、解が (8) のようになるのだとすると、これは 1 節でみたように $f(x)$ のグラフを速度 a [cm/秒] で右に平行移動しているものだから、この点の上での $u(t, x)$ の値を調べると、平行移動していくグラフを同じ速度で動く点で値を見ることになるから、時間の変化に対して、その値は変化しないように見えるであろう。

逆に、速度 a で移動するどの点でみても u の値が変化していなければ、それはグラフの形を変えずに速度 a で平行移動しているものといえるだろう。このようなやりかたで考えてみる。

この直線上の点での u の値を $v(t)$ とおく。

$$v(t) = u(t, at + x_0)$$

このとき、合成関数の偏微分法則により、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}v(t) &= \frac{d}{dt}u(t, at + x_0) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, at + x_0)\frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}(t, at + x_0)\frac{d(at + x_0)}{dt} \\ &= u_t(t, at + x_0) + au_x(t, at + x_0) \end{aligned} \tag{10}$$

となる。$u(t, x)$ は方程式 (7) を満たす関数で、最後の式はこの方程式の左辺に $x = at + x_0$ を代入した式に等しいから結局

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0$$

となり、確かに $v(t)$ は定数であることがわかる。これにより

$$v(t) = v(0)$$

が成り立つので、これを u に戻してみると (9) により

$$u(t, at + x_0) = u(0, x_0) = f(x_0)$$

が成り立つことになる。この式はすべての x_0 について成り立つので、$x = at + x_0$ とすると $x_0 = x - at$ となり、これを代入して結局

$$u(t, x) = f(x - at)$$

が得られ、(8) が証明された。

上の議論の中で主要な役割を果たした直線 $x = at + x_0$ は、この方程式 (7) の 特性曲線 **(characteristic curve)** と呼ばれる。より一般の定義は後で与える。

この x_0 を色々な値と取ることにより特性曲線は無数に作ることができる。上の証明中でも、x_0 を任意の実数と取ることができる、という部分があるが、すべての実数を動かすと、その x_0 を出発点とする特性曲線の集まりは (t, x) 平面上の、ある一つの方向に平行な直線の集まりとなり、これら全体は (t, x) 平面の考えている領域全体を埋めつくす。

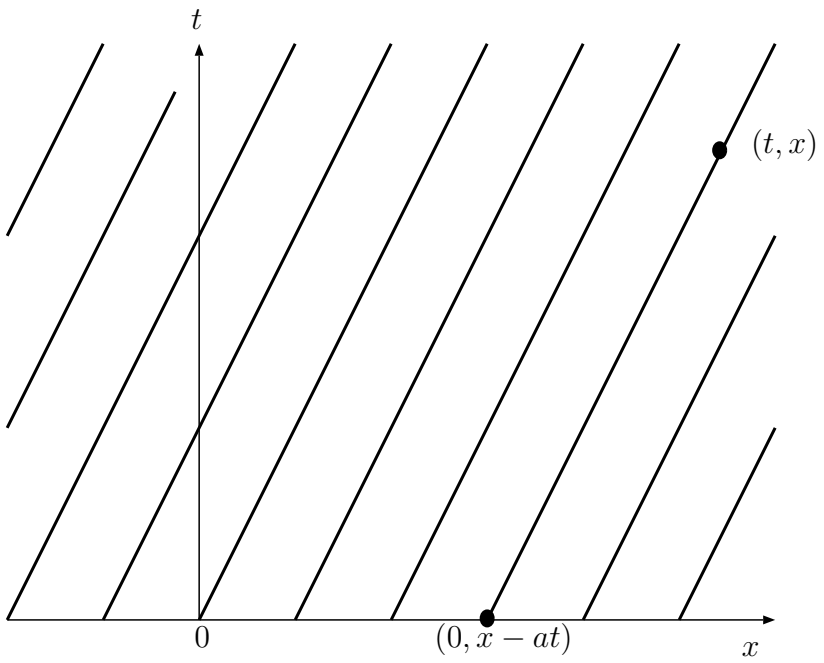

図 5: 特性曲線群

これにより、領域内の任意の点 (t, x) に対して、これを通る特性曲線の出発点の座標が $(0, x - at)$ とただ一つ求まり、u の値は特性曲線の上で変わらないので

$$u(t, x) = u(0, x - at) = f(x - at)$$

となったわけである。

つまり、上の議論の鍵となったのは

- 特性曲線上での u の値が求まる $(t = 0$ での値で表される$)$
- 特性曲線は考えている領域を埋め尽くす、すなわち、(t, x) 平面のどんな点に対しても、それを通る特性曲線が必ず存在する

- 特性曲線同士は交わらない、すなわち、(t, x) 平面のどんな点に対しても、それを通る特性曲線は一本しかない

という性質であることに注意せよ。

3　より一般の方程式と特性曲線

2 節で取り上げた特性曲線 $x = at + x_0$ が有効に働いたのは、この直線が

$$\frac{dx}{dt} = a$$

という性質を持ち、その値が方程式 (7) の u_x の係数に等しかったためであることが、(10) の計算によりわかる。

よって、より一般の 1 階線形偏微分方程式

$$u_t + \alpha(t, x)u_x = \beta(t, x) \tag{11}$$

に対して、常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t, x) \tag{12}$$

を満たす関数 $x = x(t)$ のことを、通常方程式 (11) の特性曲線と呼んでいる。(7) の場合にはこの方程式は

$$\frac{dx}{dt} = a$$

となるので確かに $x = at+$(定数) となる。

$t = 0$ で $x(0) = x_0$ となる (12) の解は、$\alpha(t, x)$ が通常の連続な関数であれば確かに存在する。ここで、“存在する” という言葉の意味は、例えば、$0 \leq t \leq 1$ の範囲で $\alpha(t, x)$ が連続で、$|\alpha(t, x)|$ の最大値が有限な値ならば、どんな x_0 に対しても、$x(0) = x_0$ となる (12) の解は、$0 \leq t \leq 1$ の範囲内では無限大に発散するようなことは起こらない、という意味である。

単に、発散せずに解が伸びるという意味であり、(12) の解が、簡単な式で表されるという意味ではない。

このことは、特性曲線の集まりが (t, x) 平面の領域を埋め尽くすということを意味する。

さらに、$\alpha(t, x)$ が通常の滑らかな関数、もう少し詳しくいうと $\alpha_x(t, x)$ が連続な関数ならば、$x(0) = x_0$ となる (12) の解は、ただ一つしかないことが知られている。これは、特性曲線同士が交わることはないことを意味する。

これらの性質により、方程式 (11) についても、2 節と同様の方法で特性曲線を用いて解を求めることができる。さらに、方程式の右辺の $\beta(t, x)$ の部分に u が含まれて $\beta(t, x, u)$ のような形であっても同じ方法で解を求めることができる。

一般的な方法の説明はわずらわしいので、2 つ程例を上げておくのみとする。

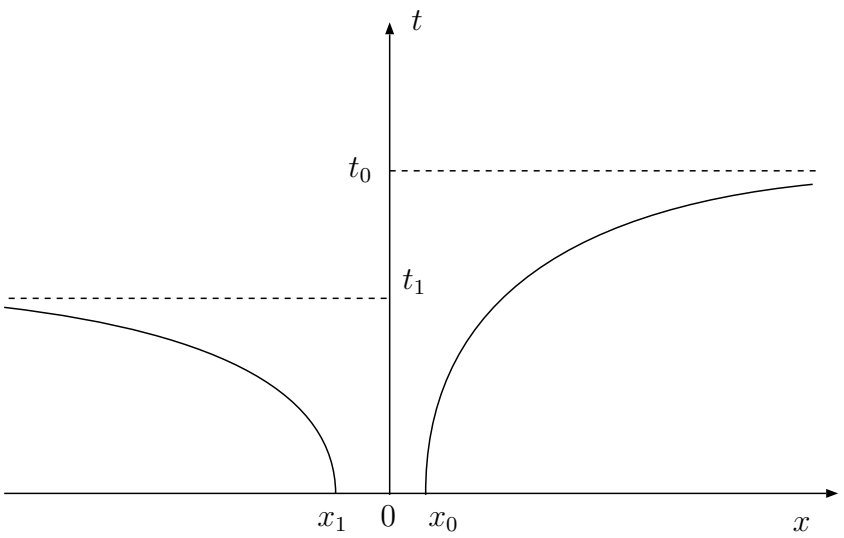

図 6: 発散する解のグラフ

例 1

$$\begin{cases} u_t + 2tu_x = t + x & (t > 0, -\infty < x < \infty^1), \\ u(0, x) = f(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

この方程式の場合、特性曲線を与える方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2t & (t > 0), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

であるので、これを解いて $x = t^2 + x_0$. この曲線に沿った u の変化を調べると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, t^2 + x_0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, t^2 + x_0)\frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}(t, t^2 + x_0)\frac{d(t^2 + x_0)}{dt} \\ &= (u_t + 2tu_x)|_{x=t^2+x_0} \\ &= (x + t)|_{x=t^2+x_0} = t^2 + t + x_0 \end{aligned}$$

より、この両辺を 0 から t まで積分して

$$u(t, t^2 + x_0) - u(0, x_0) = \int_0^t (s^2 + s + x_0)\, ds = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + x_0 t$$

よって

$$u(t, t^2 + x_0) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + x_0 t + u(0, x_0) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + x_0 t + f(x_0)$$

となる。$x = t^2 + x_0$ とすると $x_0 = x - t^2$ なのでこれを代入して

$$u(t, x) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + (x - t^2)t + f(x - t^2) = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{t^2}{2} + xt + f(x - t^2)$$

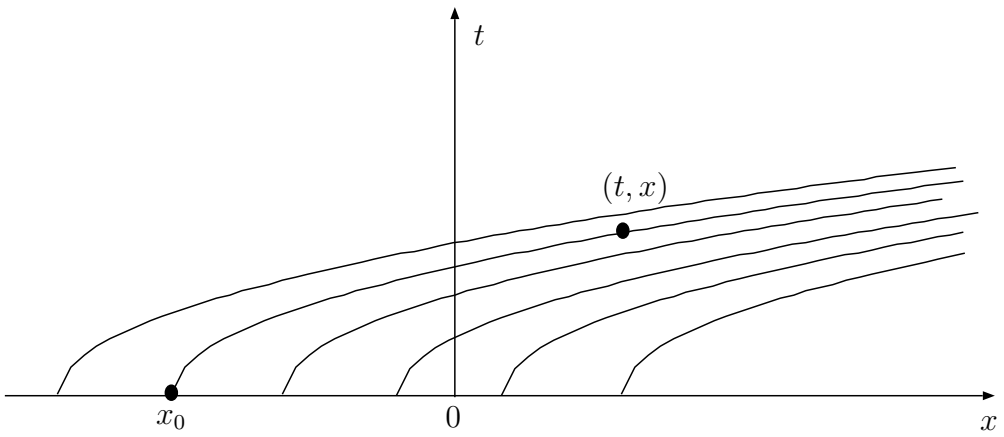

図 7: 特性曲線 $x = t^2 + x_0$

が得られる。

例 2

$$\begin{cases} u_t + xu_x = tu + e^t & (t > 0, -\infty < x < \infty), \\ u(0,x) = f(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

特性曲線は

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x & (t > 0), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

より (変数分離形)、$x = x_0 e^t$ であることがわかる。これに沿って

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t, x_0e^t) &= u_t(t, x_0e^t) + u_x(t, x_0e^t)x_0e^t \\ &= (u_t + xu_x)\big|_{x=x_0e^t} \\ &= (tu + e^t)\Big|_{x=x_0e^t} = tu(t, x_0e^t) + e^t \end{aligned}$$

となるので、$v(t) = u(t, x_0e^t)$ とすると $v = v(t)$ は

$$\frac{dv}{dt} = tv + e^t$$

の、非斉次線形常微分方程式を満たす。よってこれを解いて

$$v(t) = e^{t^2/2} \int_0^t e^{s-s^2/2} ds + v(0)e^{t^2/2},$$

すなわち

$$u(t, x_0e^t) = e^{t^2/2} \int_0^t e^{s-s^2/2} ds + u(0, x_0)e^{t^2/2} = e^{t^2/2} \int_0^t e^{s-s^2/2} ds + f(x_0)e^{t^2/2}$$

[1] “$-\infty < x < \infty$” とは、“すべての実数 x に対して” を意味する。

が得られる。$x = x_0 e^t$ より $x_0 = xe^{-t}$ だから結局

$$u(t,x) = e^{t^2/2} \int_0^t e^{s-s^2/2} ds + f(xe^{-t}) e^{t^2/2}$$

となる。

4　半線形方程式の解の爆発

3 節では、(11) だけでなく、右辺が u の 1 次式であるような例もあげた。またそこでも簡単に述べたように、さらに一般の方程式

$$u_t + \alpha(t,x) u_x = \beta(t,x,u) \tag{13}$$

も、それらと同様に特性曲線を用いて解くことができる。この右辺の項が u に関して 1 次式ではない場合、この方程式は線形ではなく、非線形 **(nonlinear)** の方程式となる。非線形の方程式にも色々な種類のものがあるが、この方程式 (13) は 半線形 **(semilinear)** と呼ばれる。

微分方程式の性質を大きく左右するものは、方程式の一番高い微分の項の部分 (主要部 **(principal part)** と呼ばれる) であり、この方程式 (13) の場合その部分は

$$u_t + \alpha(t,x) u_x$$

となっていて、線形の方程式のそれと同じであり、非線形部分はこの主要部以外の部分に現われている。このように、方程式の主要部の部分が線形の形をしている非線形方程式は半線形と呼ばれる。

半線形方程式の場合、それが引き起こす非線形現象としてよく知られているものに、解の爆発現象というものがある。まず解の爆発について、常微分方程式の例を用いて紹介する。

方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

を解くと、解は

$$y = \frac{1}{1-t}$$

となり、$t = 0$ のときに $y = 1$ となる解は $t \to 1 - 0$ のときに無限大に発散してしまい、この解は $0 \le t < 1$ の範囲でしか存在しない。このような状態を、解が $t = 1$ で爆発 **(blowup)** する、という。方程式

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

は、解のグラフの傾きが、(t, y) という点では y^2 になる、ということを示している。$t = 1$ という直線の上では、特にその傾きの値が大きくなっているわけではないが、解はここで無限大に発散している。これは線形の方程式では見られない現象である。

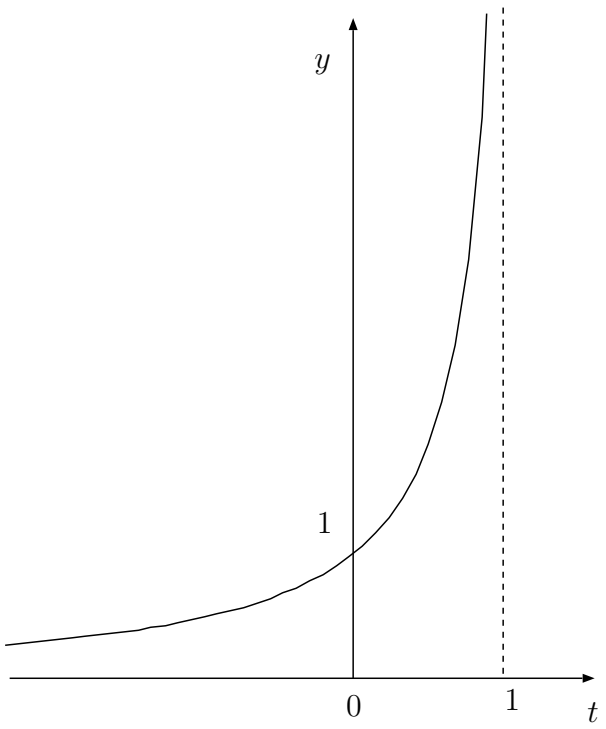

図 8: $y = 1/(1-t)$

この方程式の場合、y が大きくなると y^2 はさらに大きくなり、それにしたがって y の増加率 dy/dt が大きくなり、ますます y が大きくなる、という相乗効果が非常に強く働くためにこのようなことが起こるのであり、線形の方程式の場合の相乗効果は、ある有限の t で y の値を無限大にしてしまうほどのものではない。

偏微分方程式に話を戻す。今、例えば半線形移流方程式

$$u_t + au_x = u^2 \quad (a \text{ は定数}) \tag{14}$$

を考えてみる。初期値を $u(0,x) = f(x)$ とする。特性曲線は $x = at + x_0$ だから $v(t) = u(t, at + x_0)$ とすると

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, at+x_0) + a\frac{\partial u}{\partial x}(t, at+x_0) = u(t, at+x_0)^2 = v(t)^2$$

より、$v(t)$ は

$$\frac{dv}{dt} = v^2$$

を満たし、これを解くと

$$v(t) = \frac{v(0)}{1 - v(0)t} \tag{15}$$

となり、これを u に戻して、$x_0 = x - at$ を代入すれば、結局

$$u(t,x) = \frac{f(x-at)}{1 - f(x-at)t} \tag{16}$$

が得られる。この解を各特性曲線上で見てみる。すると、(15) によれば、$v(0) > 0$ のときは $v(t)$, すなわちこの特性曲線上での u の値は $t = 1/v(0)$ のときに無限大に発散し、爆発が起こることがわかる。一方 $v(0) = 0$ のときは $v(t) = 0$, $v(0) < 0$ のときはすべての正の t の値に対して有限な値で $v(t) \to 0$ となる。

つまり $v(t)$ が爆発するか、爆発しないかが $v(0)$ の値によって変わっている。また、爆発する場合でもその爆発時刻は $v(0)$ の値によって変わっていることがわかる。これは、各特性曲線ごとに爆発時刻が異なることを意味している。

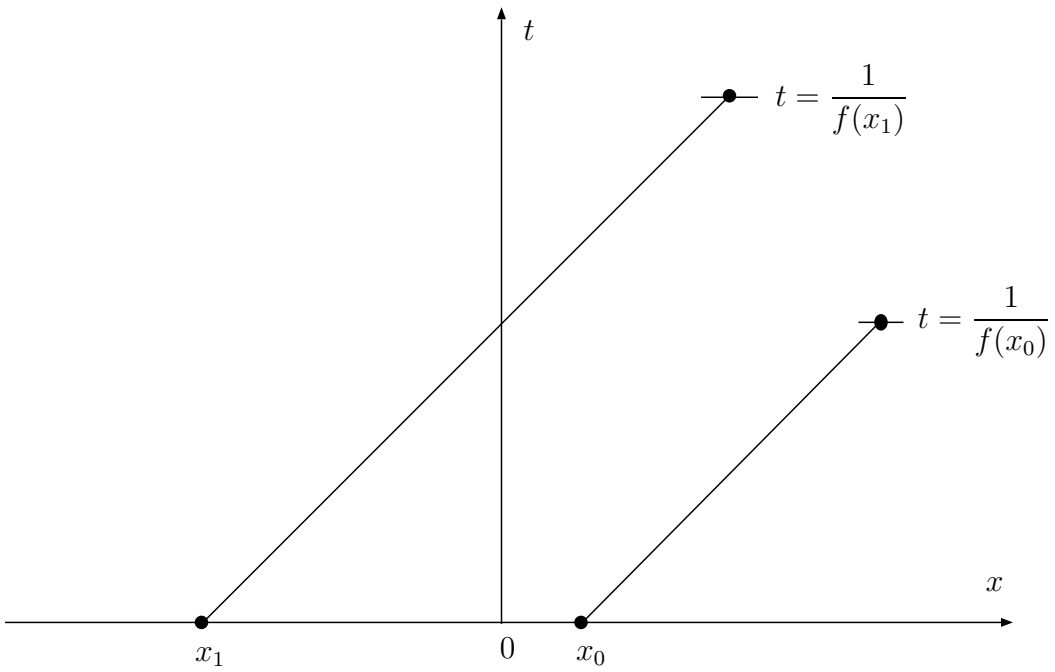

図 9: 爆発境界と特性曲線

$u(t, x)$ に戻って考えてみる。$(0, x_0)$ を通る特性曲線 $x = at + x_0$ の上での u の値の爆発時刻は

$$t = \frac{1}{v(0)} = \frac{1}{f(x_0)}$$

だから、(t, x) 平面上の

$$(t, x) = \left(\frac{1}{f(x_0)}, \frac{a}{f(x_0)} + x_0 \right)$$

という点で爆発していることになる。この、各特性曲線上での爆発する点 (t, x) をすべて結んでいくと一つの曲線が出来上がる。これを **爆発境界 (blowup boundary)**, あるいは**爆発曲線 (blowup curve)** と呼ぶ。

今の方程式の場合には、

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ t = \dfrac{1}{f(x_0)} \end{cases}$$

から x_0 を消去すると

$$tf(x - at) = 1$$

となるが、これが方程式 (14) の爆発境界の方程式である。

方程式 (14) の右辺をより一般化して

$$u_t + au_x = |u|^p \quad (p > 0)$$

とすると、同様の考察により、$p > 1$ のときには $f(x_0) > 0$ であるような x_0 に対する特性曲線 $x = at + x_0$ の上で爆発が起こり、爆発境界の方程式は

$$\{(p-1)t\}^{1/(p-1)} f(x - at) = 1$$

となることがわかる。

1 次元半線形波動方程式

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = |u|^p$$

の場合も、加藤敏夫らにより $([3])$ $p > 1$ ならば解が爆発することが示されていて、この場合にも滑らかな爆発境界が存在することがわかっている $([4])$。しかしこの場合は、移流方程式のように特性曲線によって解を得ることができるわけではなく、爆発境界の式が具体的に書き下すことができるわけではない。

x の次元が 1 より大きい場合、すなわち n 次元半線形波動方程式

$$u_{tt} - a^2 \Delta u = |u|^p \quad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)$$

についても、ここ数年盛んに研究され、p がどのような値の場合に解が爆発する、ということが色々調べられている。おおまかにその結果を述べると、それぞれの次元 n に対して $p(n)$ という実数が一つ決まり、

$$\begin{aligned} 1 < p \leq p(n) \quad &\Rightarrow \quad \text{初期値が小さくても解は有限時間で爆発,} \\ p > p(n) \quad &\Rightarrow \quad \text{初期値が小さければ解は爆発しない} \end{aligned}$$

ということになるようである。$p > 1$ であれば、初期値が大きいときは相乗効果により確かに爆発するが、初期値が小さいときは必ずしも爆発しない。そして、その場合には p が大きければ大きい程爆発しにくくなる。それは、$|u|$ が 1 よりも小さいときには、p が大きくなるほど $|u|^p$ は逆に小さくなるからである。

この $p(n)$ は、ある 2 次方程式の解であり、$p(1) = \infty$, $p(2) = (3 + \sqrt{17})/2$, $p(3) = 1 + \sqrt{2}$ のような値を取る。$p(1) = \infty$ というのは、$n = 1$ の場合には、p をどれほど大きく取っても、$p > 1$ ならばどんなに初期値が小さくても解は有限時間で爆発する、という意味である。

なお、これらの爆発境界 $(n > 1$ の場合は爆発曲線ではなく爆発曲面になる$)$ の性質については数学的にはまだよくわかっておらず、高次元の場合には滑らかな爆発境界が存在するかどうかもわかっていない。

5　準線形方程式

特性曲線が、解 u 自身によって変化する場合はまた事情は異なる。例えば、非粘性バーガース方程式と呼ばれる次の非線形方程式

$$u_t + uu_x = 0 \tag{17}$$

を考えてみる。この方程式の場合特性曲線は

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(t,x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{18}$$

によって決定する。しかし、この u は与えられているものではなく、方程式によって決まる u であるから、これをこのまま解くことはできない。しかし、とりあえず、(17) の解 u があったとして、その u に対し (18) を満たす関数 $x = \phi(t)$ が存在したとして話を進めてみる。つまり $\phi(t)$ は

$$\begin{cases} \phi'(t) = u(t,\phi(t)) \quad (t > 0), \\ \phi(0) = x_0 \end{cases} \tag{19}$$

を満たすとする。このとき、この特性曲線 $x = \phi(t)$ に沿っての u の値を調べてみる。$v(t) = u(t,\phi(t))$ とすると (19) などにより

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,\phi(t))\frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x}(t,\phi(t))\frac{d\phi(t)}{dt} \\ &= u_t(t,\phi(t)) + u_x(t,\phi(t))\phi'(t) \\ &= u_t(t,\phi(t)) + u(t,\phi(t))u_x(t,\phi(t)) \\ &= u_t + uu_x\big|_{x=\phi(t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。よってこの特性曲線に沿って $v(t)$ は定数になるので、前と同様に $v(t) = v(0)$ となり $u(t,\phi(t)) = u(0,x_0)$ を得る。特性曲線に沿って u が定数であるということは、これを (19) に戻してみれば

$$\phi'(t) = u(t,\phi(t)) = u(0,x_0)$$

ということであり、つまりこの曲線の傾きは定数で、

$$\phi(t) = \phi(0) + \int_0^t u(0,x_0)dt = \phi(0) + u(0,x_0)t = x_0 + u(0,x_0)t$$

となる。

特性曲線が存在するとして、方程式を用いると、特性曲線上での u の値が求まり、それによって特性曲線自身を求めることができる、ということになるわけである。この特性曲線

$$x = u(0,x_0)t + x_0$$

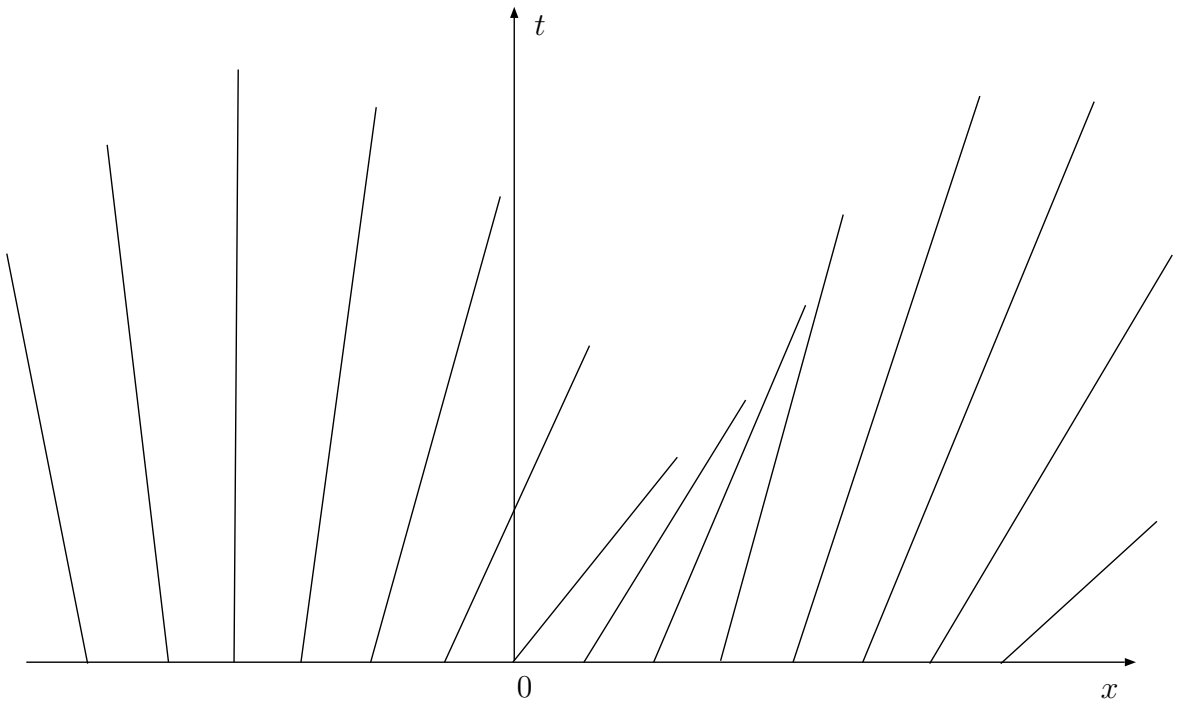

図 10: さまざまな速度を持つ特性曲線

は、t の一次式で直線となるが、前の場合と違いその傾き $u(0, x_0)$ は定数ではなく、出発点 x_0 によって変わり得る。言い替えれば、x_0 を出発して特性曲線に沿って動く点の速度は x_0 によって異なる。

その傾きは $u(0, x_0) = f(x_0)$、すなわち f によって変化し、f によっては特性曲線全体が領域を埋め尽くさないこともあるし、特性曲線が交わることも起こりうる。

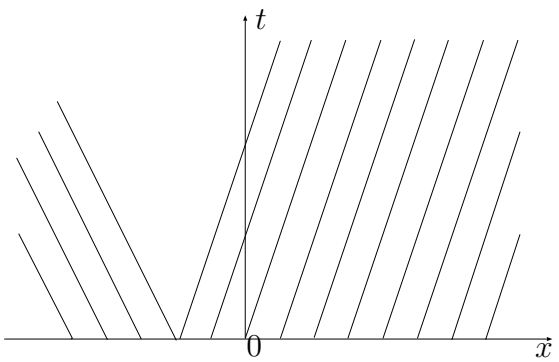

図 11: 特性曲線の空白域

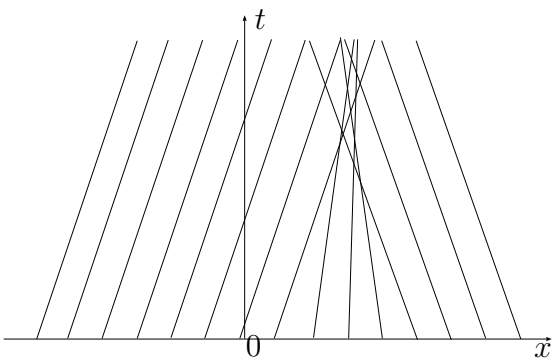

図 12: 交差する特性曲線

線形、半線形の方程式ではこういうことは起こらないが、u_x の係数が u にも関係する形

$$u_t + \alpha(t, x, u)u_x = \beta(t, x, u) \quad \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \neq 0\right)$$

の場合はこのようなことが起こる。このような形の非線形方程式を準線形 と呼ぶ。

今の方程式 (17) の場合、特性曲線

$$x = f(x_0)t + x_0 \tag{20}$$

に沿って u の値は定数であったので、その u の値は

$$u = u(0, x_0) = f(x_0) \tag{21}$$

に等しい。特性曲線に沿って定数であるということは、x 方向の点の運動という形で考えてみれば、$t = 0$ のときに x_0 を出発し速度 $f(x_0)$ で運動する点から見れば u のグラフの高さは $u = f(x_0)$ のまま変わらない、ということになる。

グラフの高さ $u = f(x_0)$ と特性曲線に沿う点の速度 $f(x_0)$ とが等しいということは、u のグラフの、高い位置にある点ほど速く進み、低い位置にある点ほど遅く進む、ということになる。

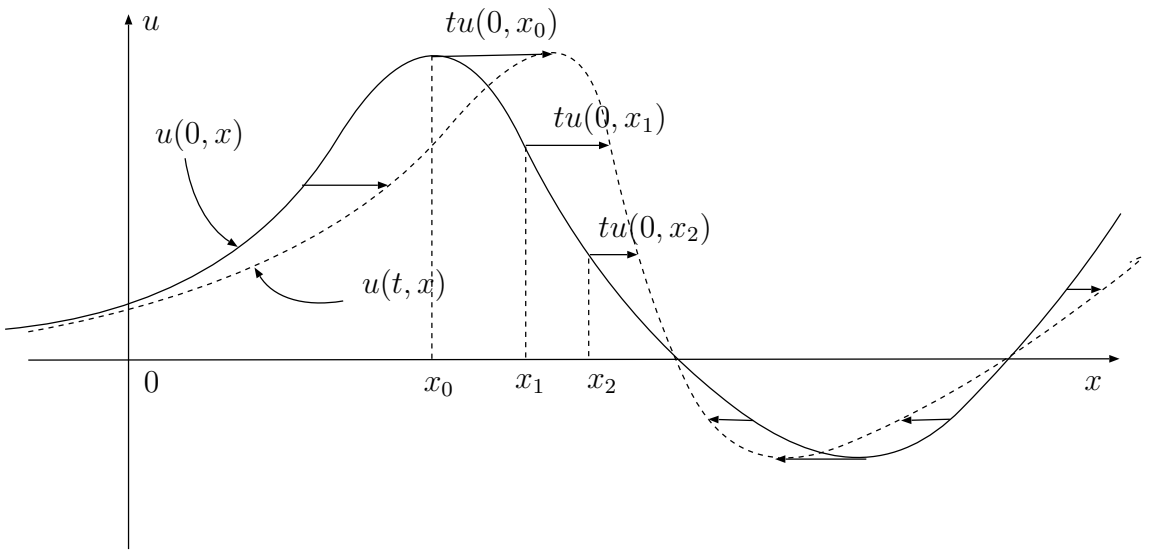

図 13: 特性速度と波の高さ

これが進行していくと、高い位置の点が低い位置の点を追い越してしまうようなことが起きて、u の値が一つに決まらなくなってしまう。これは複数の特性曲線が交わるような場合に起こる。

この問題は、“弱解” という、不連続な解の概念を導入することにより解決されている。この不連続な解は、流体力学での物理現象との対応により衝撃波と呼ばれている。

6 弱解と衝撃波

不連続な関数をも微分方程式 (17) の解とみるにはどうしたらよいだろうか。ひとつには超関数の理論を用いて不連続関数を微分する、という方法があるが、ここではこの方程式 (17) の積分形を導き、それを利用して考えてみることにする。

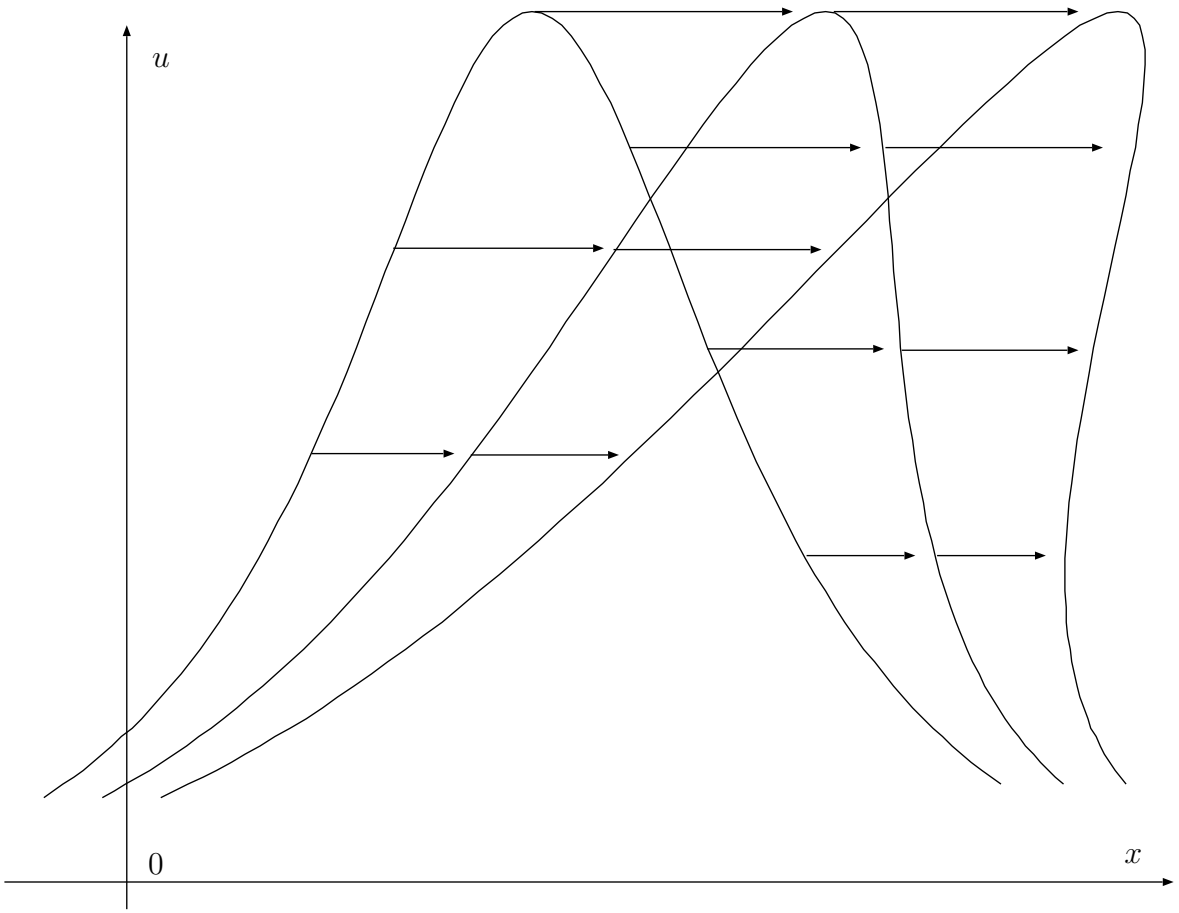

図 14: 追い越して u が関数でなくなる例

まず $0 < t_1 < t_2$, $a < b$ となるような t_1, t_2, a, b を勝手に取る。これに対して長方形領域

$$Q = \{(t, x);\ t_1 \leq t \leq t_2,\ a \leq x \leq b\}$$

で、方程式 (17) 全体を 2 重積分する。合成関数の微分法則

$$g(u)_x = \frac{\partial g(u)}{\partial x} = \frac{dg(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = g'(u)u_x$$

より

$$uu_x = \left(\frac{u^2}{2}\right)_x$$

であること、および 2 重積分の公式

$$\iint_Q g(t,x)\ dtdx = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_a^b g(t,x)\ dx\right\}dt = \int_a^b\left\{\int_{t_1}^{t_2} g(t,x)\ dt\right\}dx$$

に注意する。これらを用いて積分を計算すると

$$\iint_Q u_t(t,x)dtdx$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_Q \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)dtdx \\
&= \int_a^b \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\ dt \right\} dx \\
&= \int_a^b [u(t,x)]_{t=t_1}^{t=t_2}\, dx \\
&= \int_a^b u(t_2,x)dx - \int_a^b u(t_1,x)dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iint_Q u(t,x)u_x(t,x)dtdx \\
&= \iint_Q \left(\frac{u(t,x)^2}{2} \right)_x dtdx \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_a^b \left(\frac{u(t,x)^2}{2} \right)_x dx \right\} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{u(t,x)^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} dx \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t,b)^2}{2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t,a)^2}{2} dx
\end{aligned}
$$

となるので、結局次の式が成り立つ。

$$
\int_a^b u(t_2,x)dx - \int_a^b u(t_1,x)dx + \int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t,b)^2}{2} dx - \int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t,a)^2}{2} dx = 0 \qquad (22)
$$

この式にはもはや微分は含まれていない。しかも u が微分可能な関数ならば (17) と、すべての t_1 ,t_2, a, b に対して (22) を満たすこととは同値になる。よって u が不連続な関数の場合、すべての t_1 ,t_2, a, b に対して (22) を満たすならば、その関数 u は微分方程式 (17) の **弱解 (weak solution)** である、ということにする。

弱解は、その関数が微分可能な部分では、普通の意味での解、つまり微分方程式 (17) を満たす関数である。よって弱解は普通の解よりも広い概念である。この弱解の、不連続な部分での様子を見てみる。

今、$u = u(t,x)$ が弱解であり、そのグラフは $x = \phi(t)$ の上で不連続でその両側ではそれぞれ連続になっているとする。

つまり関数のグラフは、断層が走っているような図になるわけであるが、この断層 $x = \phi(t)$ と不連続の段差との関係を調べてみる。

$t = t_0 > 0$ を一つ取り、$x_0 = \phi(t_0)$ とする。また、Δt, Δx を非常に小さい正の数とし、Δt は Δx に比べて非常に小さいとする。このとき、上の長方形領域として

$$
Q = \{(t,x);\ t_0 \le t \le t_0 + \Delta t,\ x_0 - \Delta x \le x \le x_0 + \Delta x\}
$$

を取る。すなわち $t_1 = t_0$, $t_2 = t_0 + \Delta t$, $a = x_0 - \Delta x$, $b = x_0 + \Delta x$ とする。Δt, Δx が非常に小さいとすれば、この領域内の断層の左側 $x < \phi(t)$ での u の値は

$$
u_\ell = u(t_0, x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} u(t_0, x)
$$

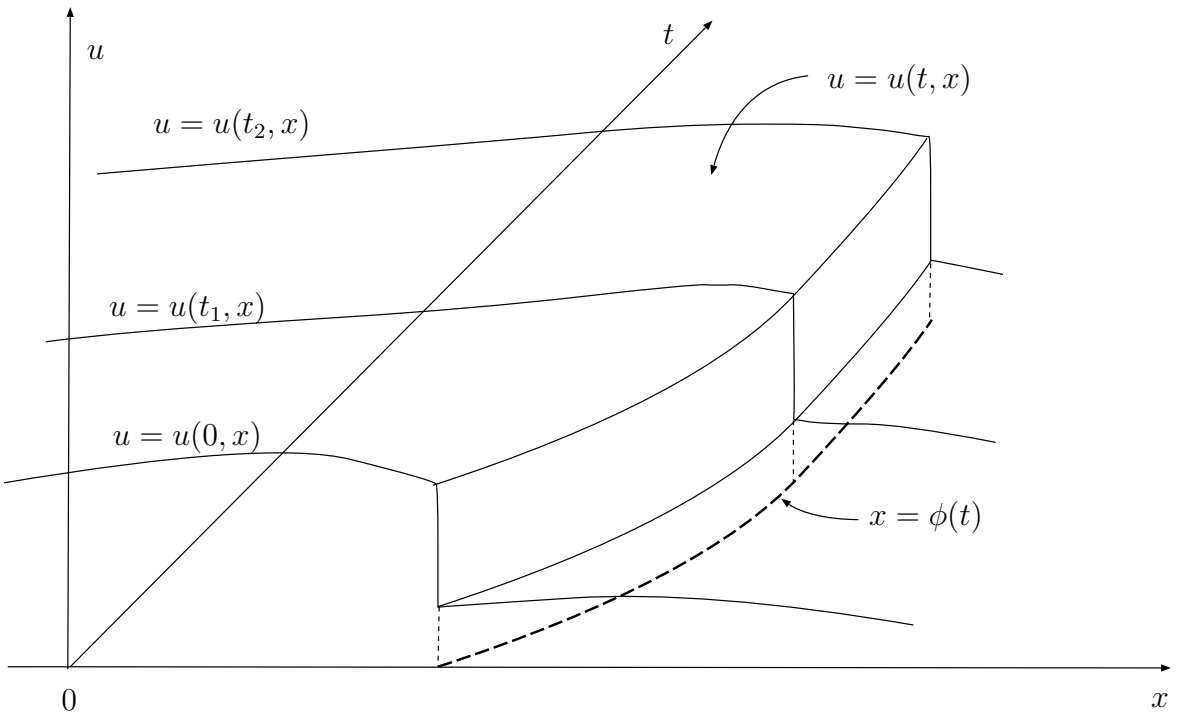

図 15: 不連続な弱解

の値に非常に近い。同様に、断層の右側 $x > \phi(t)$ での u の値は

$$u_r = u(t_0, x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} u(t_0, x)$$

の値に非常に近い。これらを考えると、(22) の各項に対して

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u(t_2,x)dx - \int_a^b u(t_1,x)dx \\
&= \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} u(t_0+\Delta t,x)dx - \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} u(t_0,x)dx \\
&= \int_{\phi(t_0)-\Delta x}^{\phi(t_0+\Delta t)} u(t_0+\Delta t,x)dx + \int_{\phi(t_0+\Delta t)}^{\phi(t_0)+\Delta x} u(t_0+\Delta t,x)dx \\
&\quad - \int_{x_0-\Delta x}^{x_0} u(t_0,x)dx - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} u(t_0,x)dx \\
&\approx \int_{\phi(t_0)-\Delta x}^{\phi(t_0+\Delta t)} u_\ell dx + \int_{\phi(t_0+\Delta t)}^{\phi(t_0)+\Delta x} u_r dx - \int_{x_0-\Delta x}^{x_0} u_\ell dx - \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} u_r dx \\
&\approx u_\ell\{\phi(t_0+\Delta t) - \phi(t_0) + \Delta x\} + u_r\{\phi(t_0) + \Delta x - \phi(t_0+\Delta t)\} \\
&\quad - u_\ell \Delta x - u_r \Delta x \\
&= -u_r\Delta\phi + u_\ell\Delta\phi \quad (\text{ただし } \Delta\phi = \phi(t_0+\Delta t) - \phi(t_0)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t,b)^2}{2}dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{u(t,a)^2}{2}dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{u(t,x_0+\Delta x)^2}{2}dt - \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{u(t,x_0-\Delta x)^2}{2}dt
\end{aligned}$$

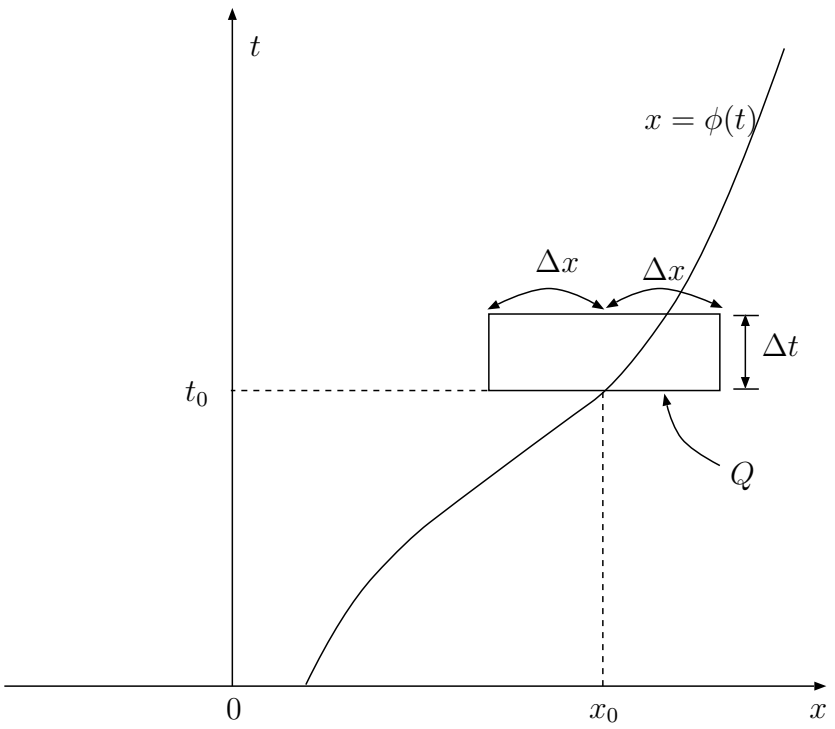

図 16: 領域 Q

$$\begin{aligned} &\approx \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{u_r^2}{2} dt - \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{u_\ell^2}{2} dt \\ &= \frac{1}{2}(u_r^2 - u_\ell^2)\Delta t \end{aligned}$$

のような近似式が成り立つので、(22) により

$$-u_r \Delta\phi + u_\ell \Delta\phi + \frac{1}{2}(u_r^2 - u_\ell^2)\Delta t \approx 0$$

となり、

$$(u_r - u_\ell)\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \approx \frac{1}{2}(u_r^2 - u_\ell^2) = \frac{1}{2}(u_r - u_\ell)(u_r + u_\ell)$$

が成り立つが、$u_r - u_\ell$ は段差であるから仮定により 0 ではなく、よって

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \approx \frac{u_r + u_\ell}{2}$$

が成り立つ。ここで、$\Delta t \to 0$ とすると、この近似式は等式となり、$\Delta\phi/\Delta t \to \phi'(t_0)$ だから、結局

$$\phi'(t_0) = \frac{u_r + u_\ell}{2} \tag{23}$$

という関係式が成り立つこととなる。弱解は不連続の所でこの関係式を満たす必要がある。この関係式をランキン–ユゴニオ条件 (the Rankine–Hugoniot condition) と呼んでいる。

$\phi'(t_0)$ は $t = t_0$ での $x = \phi(t)$ の時間微分、すなわち断層の進行速度を表しているので、(23) の式は、それが $(u_r + u_\ell)/2$, すなわち断層の両側の値の平均値に等しいことを意味している。

特性曲線の進行速度は、方程式 (17) の u_x の係数である u に等しいから、この断層の進行速度は、断層の両側の特性曲線の進行速度の平均になる、と考えることもできる。このことから特性曲線と、断層の関係は以下の 2 つのいずれかであることが分かる。

$$u_\ell < \phi'(t_0) < u_r \tag{24}$$

$$u_\ell > \phi'(t_0) > u_r \tag{25}$$

しかし、元々この不連続な解は、特性曲線がぶつかることにより u の値が一つに決まらなくなることを解消するために導入されたものであるから、(24) のような、特性曲線がぶつからないものは不適切とみなし、このような場合はむしろ交わらない特性曲線による滑らかな解を採用することとするのが自然である。すなわち、弱解に対して、その不連続な所では (25) の不等式が成り立つことを条件として課すこととする。この条件を ラックス条件 (**Lax's condition**)、またはエントロピー条件 (**entropy condition**) と呼んでいる。そして、このエントロピー条件を満たす不連続な断層を衝撃波 (**shock wave**) と呼ぶ。

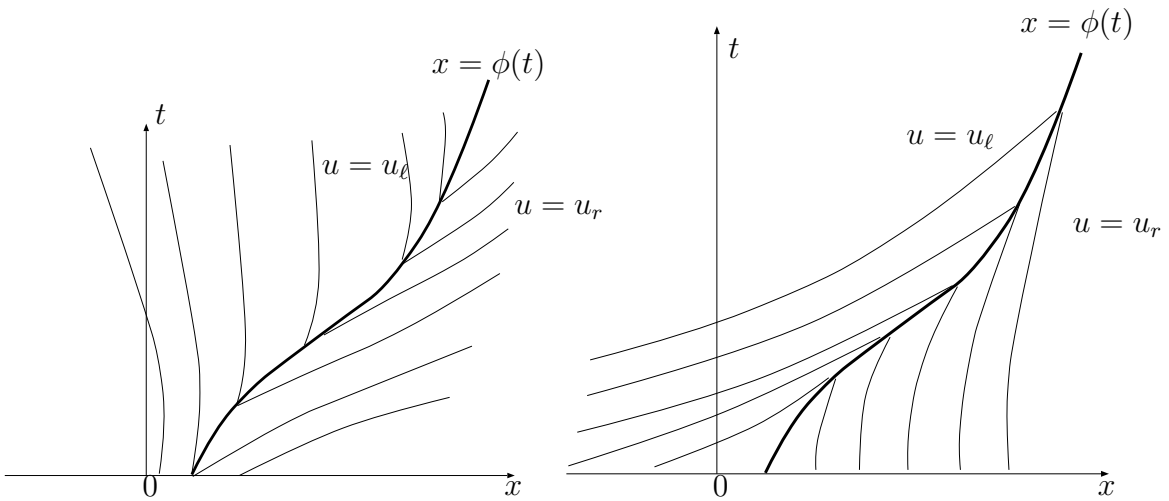

図 17: 断層と特性曲線 (左が (24), 右が (25) に対応)

衝撃波、エントロピー条件、ランキン–ユゴニオ条件といった用語は、いずれも元々気体力学において用いられたものである。

7　リーマン問題

ある関数が、その関数が微分可能な点では微分方程式 (17) を満たし、不連続な点ではランキン–ユゴニオ条件を満たしていれば、その関数は確かに弱解になることがわか

る。このことを用いて、u の初期値 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} u_- & (x < 0), \\ u_+ & (x > 0) \end{cases} \qquad (u_-, u_+ \text{ は定数}) \tag{26}$$

であるときの解を求めてみる。(17) の方程式に対してこのような初期値を科した問題をリーマン問題 (the Riemann problem) と呼ぶ。

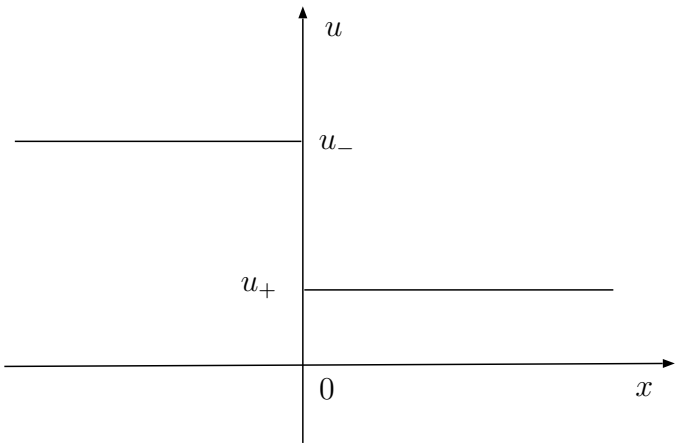

図 18: $u = f(x)$ ($u_- > u_+$ のとき)

7.1 $u_- > u_+$ のとき

このときは特性曲線が交わる。よって左右の段差の平均値を持つ衝撃波

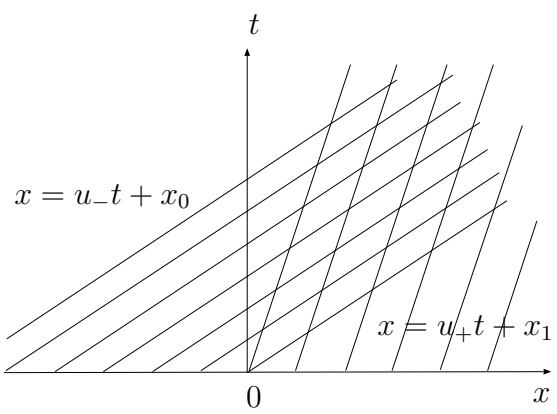

図 19: 交差する特性曲線

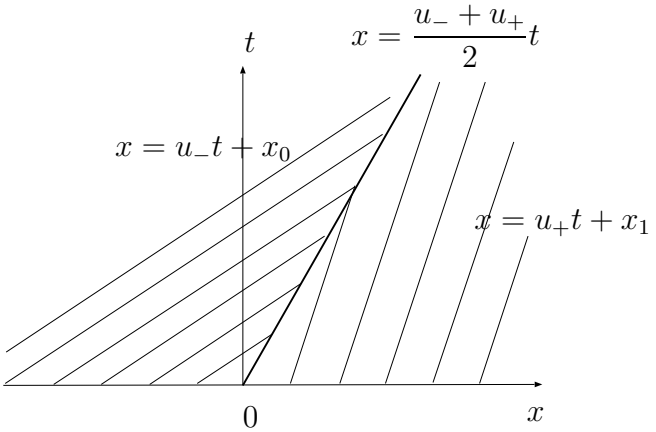

図 20: 衝撃波解と特性曲線

$$x = \frac{u_- + u_+}{2} t$$

によって弱解を構成できる。すなわち

$$u = \begin{cases} u_- & (x < \dfrac{u_- + u_+}{2}t), \\ u_+ & (x > \dfrac{u_- + u_+}{2}t) \end{cases}$$

なる関数が弱解となる。断層以外では u は定数で、定数は確かに方程式 (17) を満たしているからである。

7.2 $u_- < u_+$ のとき

このときは特性曲線は交わらずに、特性曲線の通らない領域ができてしまう。この

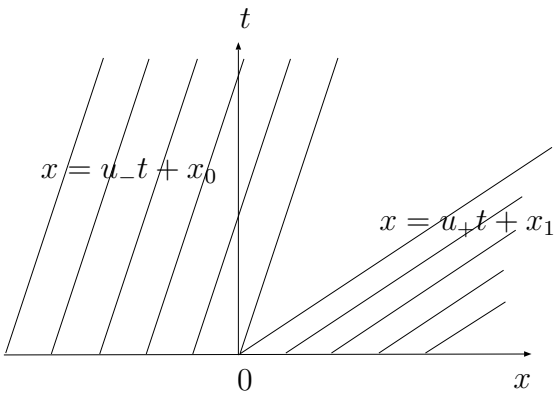

図 21: 特性曲線の空白域

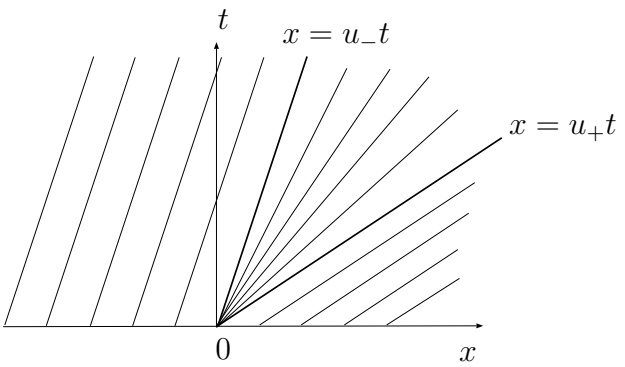

図 22: 膨張波解と特性曲線

部分では、解は滑らかな関数として求める必要がある。

今、正の定数 λ に対して

$$w(t,x) = u\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right)$$

とおくと、w も実は方程式 (17) を満たし、初期値は $w(0,x) = f(x)$ となる。それは

$$\begin{aligned} w_t + ww_x &= \frac{\partial}{\partial t}u\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right) + u\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial x}u\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{\lambda}\right) + u\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}(u_t + uu_x)\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right) \\ &= 0, \\ w(0,x) &= u\left(0, \frac{x}{\lambda}\right) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) = f(x) \end{aligned}$$

となるからである。よって、一つの初期値に対し、解が一つに決まるべきだとすれば $w = u$ であることになり、つまりすべての正の実数 λ, t とすべての実数 x に対し

$$u(t,x) = u\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}\right) \tag{27}$$

が成り立つことになる。今、この式において $\lambda = t$ とすれば

$$u(t,x) = u\left(1, \frac{x}{t}\right) \tag{28}$$

となるので、u の $t = 1$ のときの値を $v(x)$、すなわち $v(x) = u(1,x)$ とすると (28) により

$$u(t,x) = v\left(\frac{x}{t}\right) \tag{29}$$

となる。この式を方程式 (17) に代入してみると

$$\begin{aligned}
0 &= u_t + uu_x \\
&= \frac{\partial}{\partial t} v\left(\frac{x}{t}\right) + v\left(\frac{x}{t}\right) \frac{\partial}{\partial x} v\left(\frac{x}{t}\right) \\
&= v'\left(\frac{x}{t}\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{t}\right) + v\left(\frac{x}{t}\right) v'\left(\frac{x}{t}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{t}\right) \\
&= v'\left(\frac{x}{t}\right)\left(-\frac{x}{t^2}\right) + v\left(\frac{x}{t}\right) v'\left(\frac{x}{t}\right) \frac{1}{t} \\
&= \frac{1}{t} v'\left(\frac{x}{t}\right)\left\{-\frac{x}{t} + v\left(\frac{x}{t}\right)\right\}
\end{aligned}$$

だから、$y = x/t$ とおくと

$$v'(y)\{v(y) - y\} = 0$$

となり、$v'(y) = 0$ とすると v が定数になり、よって u が定数になってしまって求めるものにならないので、結局

$$v(y) = y$$

ことがわかる。よって (29) により

$$u(t,x) = \frac{x}{t}$$

が得られる。この解を特性曲線の空白域に埋めて

$$u(t,x) = \begin{cases} u_- & (x < u_- t), \\ \dfrac{x}{t} & (u_- t \le x < u_+ t), \\ u_+ & (x \ge u_+ t) \end{cases} \tag{30}$$

とするとこれは確かに $t > 0$ のところでは連続な解となる。この解は、特性曲線が広がっていって、解のグラフがなだらかになっている。そのため、この解は 膨張波 **(rarefaction wave)** と呼ばれている。

リーマン問題の解は、以上みたように衝撃波と膨張波によって求めることができる。

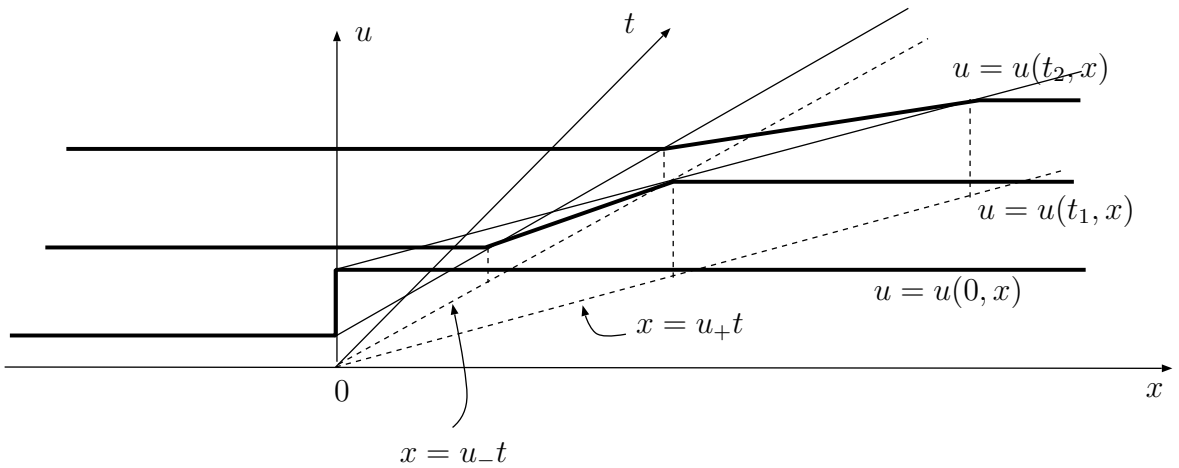

図 23: 膨張波解

8 差分近似解

8.1 差分

厳密な解を求めにくい場合、計算機で数値計算を行い解の様子を調べる方法がある。微分方程式の数値計算法にも色々あるが、ここでは差分法を紹介する。

差分方とは、関数の微分 $f'(x)$ を、$h > 0$ として

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{31}$$

で置き換えることをいう。この差分の $h \to 0$ のときの極限が微分であるので、h が小さければ差分と微分との差は小さく、よって微分は差分で近似できることになる。式 (31) の他にも

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{32}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{33}$$

で置き換えることもできるが、(31) は前進差分、(32) は後退差分、(33) は中心差分と呼ばれる。

例えば、次のような常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t) \quad (t > 0), \\ x(0) = 1 \end{cases} \tag{34}$$

を考えてみる。(34) の方程式の左辺を前進差分で置き換えると

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \approx x(t)$$

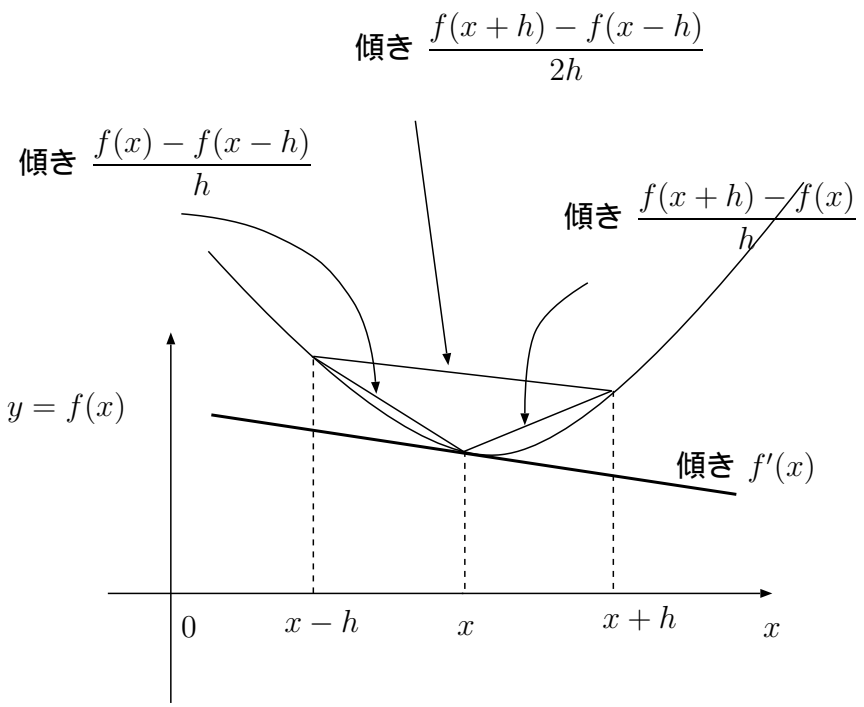

図 24: 前進、後退、中心差分

となり、よってこの近似方程式は

$$x(t+h) \approx (1+h)x(t)$$

と書けることになる。$x(0)=1$ と与えられているので、これにより

$$\begin{aligned}
&x(h) \approx (1+h)x(0) = 1+h,\\
&x(2h) \approx (1+h)x(h) = (1+h)^2,\\
&x(3h) \approx (1+h)x(2h) = (1+h)^3,\\
&\cdots\\
&x(nh) \approx (1+h)^n
\end{aligned}$$

と、$t=h,2h,3h,\ldots$ での $x(t)$ の近似値が求められることになる。

元の方程式 (34) の真の解は $x(t)=e^t$ であるが、上の近似解を $x=x_h(t)$ とすると、$t=mh$ のときこの値は

$$x_h(t) = x_h(mh) = (1+h)^m = (1+h)^{t/h}$$

となる。今、t を固定して $h \to 0$ とすると

$$(1+h)^{t/h} = \{(1+h)^{1/h}\}^t \to e^t$$

となるので、この近似解 $x_h(t)$ は h が小さい値のときは確かに真の解 $x(t)$ を近似していることがわかる。

今、小さい正数 h が与えられた場合、$x_n = x_h(nh)$ を計算する式は

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1+h)x_n \quad (n \geq 0), \\ x_0 = x(0) = 1 \end{cases}$$

となり、すなわち数列の漸化式で与えられることになる。このような漸化式の計算は、計算機で計算する場合にはむしろ都合が良い。このように、差分法においては通常漸化式によって数値計算が行われる。

8.2 偏微分方程式の差分近似

次に、偏微分方程式の数値計算法を考えてみる。

非斉次形の線形移流方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_t + au_x = f(t,x) & (t > 0,\ -\infty < x < \infty), \\ u(0,x) = g(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \tag{35}$$

の差分近似を考える。ここで、$f(t,x)$ と $g(x)$ は与えられた関数とする。現実には、初期値問題といっても、もちろん無限に広い区間全体で数値計算できるわけではない。

偏微分も常微分の場合と同様に、前進差分

$$u_t(t,x) \approx \frac{u(t+\Delta t,x) - u(t,x)}{\Delta t},\ u_x(t,x) \approx \frac{u(t,x+\Delta x) - u(t,x)}{\Delta x}$$

で置き換えることができる。これを方程式 (35) に代入すると

$$\frac{u(t+\Delta t,x) - u(t,x)}{\Delta t} + a\frac{u(t,x+\Delta x) - u(t,x)}{\Delta x} \approx f(t,x) \tag{36}$$

となる。与えられているのは $f(t,x)$ の値と $u(0,x) = g(x)$ の値であるから、この式から $(\Delta t, x)$ での u の値を近似計算することができることがわかる。すなわち (36) を変形して

$$u(t+\Delta t,x) \approx -a\frac{\Delta t}{\Delta x}u(t,x+\Delta x) + \left(1 + a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)u(t,x) + \Delta t f(t,x) \tag{37}$$

とすると、この式は、$(t+\Delta t,x)$ での u の近似値が、$(t,x+\Delta x)$, (t,x) での u の値と (t,x) での f の値で求められることを意味しているので、$u(\Delta t,x)$ の近似値は $u(0,x+\Delta x)$, $u(0,x)$, $f(0,x)$ の値から求められることがわかる。これにより $t = \Delta t$ での u の近似値が求められることになる。そして、再び (37) により $t = 2\Delta t$ での u の近似値が、$t = \Delta t$ 上の u と f の値から求められ、順に $t = 3\Delta t, 4\Delta t, \ldots$ と、次々計算されていくことになる。

ただし、$u(m\Delta t,x)$ とはいっても、すべての実数 x に関して値を持ちうるわけではなく、計算機上は離散的な有限個の値しか持ち得ない。ここでは $x = j\Delta x$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ での値を考えることにして

$$u_j^n = u(n\Delta t, j\Delta x) \quad (u_j^n \text{ の } n \text{ は指数ではなく添字})$$

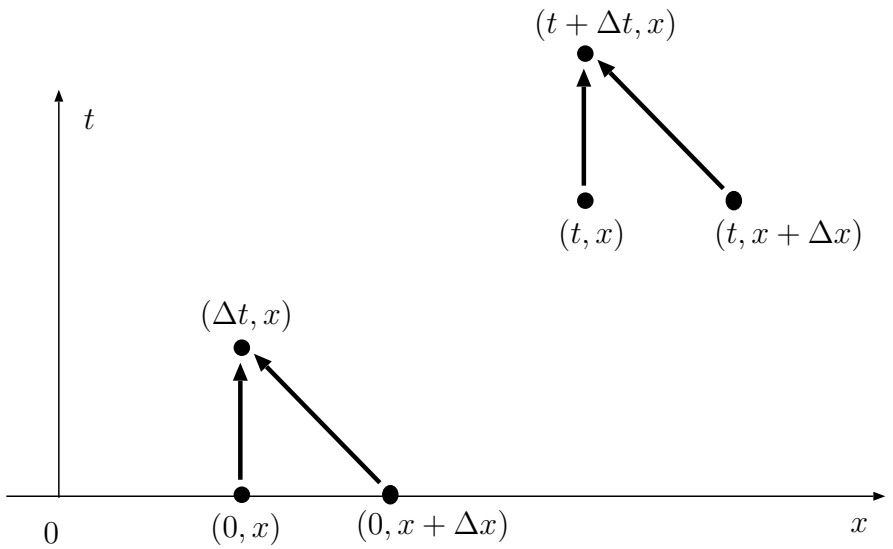

図 25: 3 点の関係

と書くことにすると、(37) による近似計算は

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = -a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}u_{j+1}^n + \left(1 + a\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right)u_j^n + \Delta t f_j^n, \\ u_j^0 = g_j \end{cases} \tag{38}$$
$$(f_j^n = f(n\Delta t, j\Delta x),\ g_j = g(j\Delta x),\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

という、二重の添字を持つ数列 u_j^n に対する漸化式を与えることになる。

このようにして $u(t, x)$ の近似値を求めることができるが、この場合、Δt と Δx との比や、前進差分を使うか後退差分を使うかなどをうまく選ばないと、近似解の不安定現象という思わぬ結果を招くことになる。実際、この近似計算式 (38) は、$a < 0$ の場合には安定であるが、$a > 0$ の場合には不安定であり、差分近似としてはふさわしくない。$a > 0$ の場合には u_x の方を後退差分で置き換えると安定になる。

8.3 特性方向の差分

前節で述べた方法は、偏微分をそれぞれ縦横の方向に差分化して考える方法であるが、方程式 (35) の左辺を、特性曲線の方向に斜めに考える方法もある。ここではそれを考えてみる。2 節で見たように、

$$\frac{d}{dt}u(t, at + x_0) = (u_t + au_x)\big|_{x=at+x_0}$$

であったが、この式の差分化を行えば

$$\frac{u(t+h, a(t+h) + x_0) - u(t, at + x_0)}{h} \approx (u_t + au_x)\big|_{x=at+x_0},$$

すなわち、$at + x_0$ を x とすれば

$$\frac{u(t+h, x+ah) - u(t,x)}{h} \approx u_t(t,x) + au_x(t,x)$$

が成り立つことがわかる。これを用いると方程式 (35) は

$$\frac{u(t+h, x+ah) - u(t,x)}{h} \approx f(t,x)$$

すなわち

$$u(t+h, x+ah) \approx u(t,x) + hf(t,x)$$

となるので、$\Delta t = h$, $\Delta x = ah$ とし、$u_j^n = u(n\Delta t, j\Delta x)$ とすれば

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} &= u((n+1)\Delta t, (j+1)\Delta x) \\ &= u(n\Delta t + \Delta t, j\Delta x + \Delta x) \\ &= u(n\Delta t + h, j\Delta x + ah) \\ &\approx u(n\Delta t, j\Delta x) + hf(n\Delta t, j\Delta x) \\ &= u_j^n + \Delta t f_j^n \quad (f_j^n = f(n\Delta t, j\Delta x)) \end{aligned}$$

と計算できることになる。

これをさらに発展させて、波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t,x) & (t > 0,\ -\infty < x < \infty), \\ u(0,x) = g(x) & (-\infty < x < \infty) \\ u_t(0,x) = h(x) & (-\infty < x < \infty) \end{cases} \tag{39}$$

の差分近似を考えてみる $(a > 0)$。1 節で見たように

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x)$$

であり、よって $v(t,x) = u_t(t,x) - au_x(t,x) = (\partial/\partial t - a\partial/\partial x)u(t,x)$ とおけば

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right) v$$

となるので、方程式は

$$v_t(t,x) + av_x(t,x) = f(t,x)$$

となる。これは v に関する移流方程式なので、これを特性方向に差分化すると

$$\frac{v(t+\Delta t, x+a\Delta t) - v(t,x)}{\Delta t} \approx f(t,x) \tag{40}$$

となる。一方、$u_t - au_x = v$ も、u に関する移流方程式とみれば、特性速度が a から $-a$ に変わっているだけなので、

$$\frac{u(t+\Delta t, x-a\Delta t) - u(t,x)}{\Delta t} \approx v(t,x) \tag{41}$$

と差分化でき、よって、この式で t を $t+\Delta t$、x を $x+a\Delta t$ とすれば

$$\frac{u(t+2\Delta t,x)-u(t+\Delta t,x+a\Delta t)}{\Delta t}\approx v(t+\Delta t,x+a\Delta t) \tag{42}$$

という式も得られる。簡単のため $P_y^s=(t+s,x+y)$ とすると (41),(42) の左辺はそれぞれ

$$\frac{u(P_{-a\Delta t}^{\Delta t})-u(P_0^0)}{\Delta t},\quad \frac{u(P_0^{2\Delta t})-u(P_{a\Delta t}^{\Delta t})}{\Delta t}$$

なので、(41), (42) を式 (40) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\dfrac{u(P_0^{2\Delta t})-u(P_{a\Delta t}^{\Delta t})}{\Delta t}-\dfrac{u(P_{-a\Delta t}^{\Delta t})-u(P_0^0)}{\Delta t}}{\Delta t}\\
=\ &\frac{u(P_0^{2\Delta t})-u(P_{a\Delta t}^{\Delta t})-u(P_{-a\Delta t}^{\Delta t})+u(P_0^0)}{\Delta t^2}\\
\approx\ &f(P_0^0)
\end{aligned}$$

となる。これにより、波動方程式 (39) は

$$u(P_0^{2\Delta t})\approx u(P_{a\Delta t}^{\Delta t})+u(P_{-a\Delta t}^{\Delta t})-u(P_0^0)+\Delta t^2 f(P_0^0),$$

すなわち、$\Delta x=a\Delta t$ として、$u_j^n=u(n\Delta t,j\Delta x)$ とすれば

$$u_j^{n+2}=u_{j+1}^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}-u_j^n+\Delta t^2 f_j^n\quad (f_j^n=f(n\Delta t,j\Delta x))$$

と近似計算できることになる。

この式による計算は $n+2=2$、すなわち $t=2\Delta t$ に対する u の近似値を求めることから始まるので 、u_j^1 $(t=\Delta t)$, u_j^0 $(t=0)$ の値は別に求める必要があるが、これらは初期値より計算でき、u_j^0 は

$$u_j^0=u(0,j\Delta x)=g(j\Delta x)$$

から、また、$u_j^1=u(\Delta t,j\Delta x)$ は

$$\frac{u(\Delta t,j\Delta x)-u(0,j\Delta x)}{\Delta t}\approx u_t(0,j\Delta x)=h(j\Delta x)$$

と考えれば

$$\frac{u_j^1-u_j^0}{\Delta t}=h(j\Delta x)$$

により求められる。

波動方程式 (39) の数値計算には、ほかにも、縦横の差分を用いる方法

$$\frac{u_j^{n+1}-2u_j^n+u_j^{n-1}}{\Delta t^2}-a^2\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2}=f_j^n$$

もありこれもよく使われる。この差分は 2 階微分 $F''(x)$ が

$$\begin{aligned}
F''(x)\ &=\ \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}-\dfrac{F(x)-F(x-h)}{h}}{h}\\
&=\ \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-2F(x)+F(x-h)}{h^2}
\end{aligned}$$

と書けることに基づいている。

9　最後に

現在、非線形偏微分方程式を研究している数学者は非常に多く、応用も含めると非常に多くの興味深い話題が存在するのであるが、その内のほんの一部分だけ、そしてほんの入口の内容であり、これにより非線形偏微分方程式に興味を持つかどうかは疑問が残る。

もしこれにより興味を持つことができたなら、進んで他の成書でより深い現代の偏微分方程式論の成果を勉強して欲しいし、また、興味を持つことができなければ、別なより良い偏微分方程式の本で本当に興味深い分野を探して勉強して欲しい。

参考文献

[1] Smollor, J.A. "*Shock waves and reaction-diffusion equations. 2nd ed.*" 1994 Springer.

[2] LeVeque, R.J. "*Numerical methods for conservation laws.*" 1992, Birkhäuser.

[3] Kato T. Blow-up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations. *Comm.Pure Appl.Math.* **33**, 501–505 (1980)

[4] Caffarelli, L.A. and Friedman, A. The blow-up boundary for nonlinear wave equations. *Trans.Amer.Math.Soc.* **297**, 223–241 (1986)

[5] Caffarelli, L.A. and Friedman, A. Differentiability of the blow-up curve for one dimensional nonlinear wave equations. *Arch.Rational Mech.Anal.* 91, 83–98 (1985)

[6] 石原繁、浅野重初 "理工系の基礎 微分積分 増補版"、裳華房

[7] クライツィグ "技術者のための高等数学 1 常微分方程式" (北原和夫訳)、培風館

[8] クライツィグ "技術者のための高等数学 3 フーリエ解析と偏微分方程式" (阿部寛治訳)、培風館

[9] 金子晃 "偏微分方程式"、東京大学出版会

[10] 河村哲也 "応用偏微分方程式"、共立出版

[11] 及川正行 "理工系の基礎数学 4 偏微分方程式"、岩波書店

[12] 矢吹治一 "偏微分方程式の基礎と応用"、サイエンス社

[13] 神部勉 "理工学者が書いた数学の本 偏微分方程式"、講談社

[14] クーラン、ヒルベルト "数理物理学の方法" 1–4 巻、(斎藤利弥監訳)、東京図書

[15] 西田孝明、川島秀一気体の運動方程式、135–160 "非線型の現象と解析" 山口昌哉編、日本評論社、1996

[16] 日本機械学会編 “流れの数値シミュレーション”、コロナ社

[17] 高見頴郎 河村哲也 “偏微分方程式の差分解法”、東京大学出版会

[18] G.D. スミス “コンピュータによる偏微分方程式の解法” [新訂版]、(藤川洋一郎訳)、サイエンス社

[19] 登坂宣好 大西和榮 “偏微分方程式の数値シミュレーション”、東京大学出版会

[20] 山崎郭滋 “偏微分方程式の数値解法入門”、森北出版

[21] 棚橋隆彦 “はじめての CFD –移流拡散方程式–”、コロナ社

[22] フォーサイス、ワソー “偏微分方程式の差分法による近似解法 上” (藤野精一訳)、吉岡書店