compensated compactness と保存則方程式について

新潟工科大学 情報電子工学科 (Niigata Institute of Technology)
竹野茂治 (Shigeharu TAKENO: shige@iee.niit.ac.jp)

1 はじめに

1 次元双曲型保存則方程式に関しては、教科書や最新の研究まで含んだ概要などが色々出版されて来て、以前に比べて勉強しやすくなって来ている ([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8])。

本記事では、保存則方程式に対する補完測度法を、単独保存則方程式に対するものを [13, 22] などにしたがって解説しこの方法に対する導入を行い、最後に方程式系に関する現状や未解決問題などを紹介する。

なお、記号、用語等はなるべく [1] に沿って書いたので、そちらも併せて参照されたい。

2 1 次元保存則方程式

1 次元双曲型保存則方程式とは

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (x \in R,\ t > 0) \tag{1}$$

の形の連立偏微分方程式を指す。ただし、U,$F(U)$ は次のような N 次元列ベクトル

$$U = U(x,t) = {}^t(u_1, u_2, \dots, u_N), \quad F(U) = {}^t(f_1(U), f_2(U), \dots, f_N(U))$$

であり、

$$F'(U) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(U) & \partial_2 f_1(U) & \cdots & \partial_N f_1(U) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_N(U) & \partial_2 f_N(U) & \cdots & \partial_N f_N(U) \end{bmatrix} \quad \left(\partial_j = \frac{\partial}{\partial u_j}\right)$$

は、N 個の相異なる実固有値

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \cdots < \lambda_N(U)$$

を持つとする。各固有値 $\lambda_j(U)$ に対する右固有ベクトルを $R_j(U)$ と書くとき、$F(U)$ の定義されている領域 D 内で常に

$$\nabla\lambda_j(U) \cdot R_j(U) \neq 0 \quad (\nabla = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_N))$$

であるとき、j-特性方向は D 内で真性非線形 **(genuinely nonlinear)** であるといい、D 内で

$$\nabla\lambda_j(U)\cdot R_j(U)\equiv 0$$

であるとき、j-特性方向は D 内で線形退化 **(linearly degenerate)** であるという。

保存則系からは話が外れるが、この真性非線形、線形退化の条件は、$F'(U)$ が対角行列

$$F'(U)=\begin{bmatrix}\lambda_1(U) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2(U) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N(U)\end{bmatrix}$$

の形、つまり方程式が

$$\begin{cases}(u_1)_t+\lambda_1(U)(u_1)_x=0\\ (u_2)_t+\lambda_2(U)(u_2)_x=0\\ \cdots\\ (u_N)_t+\lambda_N(U)(u_N)_x=0\end{cases}$$

の形である場合には、$R_j(U)=e_j$ $(=j$ 番目の基本ベクトル$)$ となるので、

$$\begin{array}{ll}\text{真性非線形} & \Longleftrightarrow\quad \partial_j\lambda_j(U)\neq 0\\ \text{線形退化} & \Longleftrightarrow\quad \partial_j\lambda_j(U)\equiv 0\quad(\lambda_j(U)\text{ が }u_j\text{ によらない})\end{array}$$

であり、j-特性方向の非線形性に関する条件であることが見て取れる。

一般の場合特性曲線に関していえば、真性非線形は、特性速度 $\lambda_j(U)$ が j-特性曲線にそって単調であることを意味し、線形退化は、特性速度 $\lambda_j(U)$ が j-特性曲線にそって定数であることを意味する。

3 弱解の存在定理

良く知られているように、保存則方程式は初期値が滑らかでも、有限時刻内に解に不連続性が現われる現象が起こり得る。これは気体力学での衝撃波に対応していて、よってそれを含むような解を考える必要があり、そのために通常は弱解を考えることになる。

現在までに知られている、弱解の存在の証明方法には

1. 単独保存則に対する全変動の直接評価
2. Glimm の差分法
3. 波面追跡法 (front-tracking method)

4. 補完測度法 (compensated compactness)

のような方法が知られている。これらによる先駆的な結果を表にまとめると以下のようになる。

	系 (N)	近似解	収束性	初期値
Oleinik [10] (1957)	1	L-F 差分 (*1) 粘性近似 (*2)	Helly (*3)	large data
Glimm [11](1965)	N	Glimm 差分	Helly	small data (*4)
西田 [12] (1968)	2 (*5)	Glimm 差分	Helly	large data
Tartar [13] (1979)	1	粘性近似	補完測度法	large data
DiPerna [14],[15] (1983)	2 (*6)	L-F 差分 粘性近似	補完測度法	large data
DiPerna [16] (1976)	2 (*7)	波面追跡法	Helly	small data
Bressan [17] (1992)	N	波面追跡法	Helly	small data

(*1) Lax-Friedrichs 差分近似解: $D_tU + D_xF(U) = 0$ $(\Delta t, \Delta x \to 0)$

$$D_tU = \frac{U(x, t+\Delta t) - \dfrac{U(x+\Delta x, t) + U(x-\Delta x, t)}{2}}{\Delta t},$$

$$D_xF(U) = \frac{F(U(x+\Delta x, t)) - F(U(x-\Delta x, t))}{2\Delta x}$$

(*2) 粘性近似: $U_t + F(U)_x = \varepsilon U_{xx}$ $(\varepsilon \to 0)$

(*3) Helly: Helly の選出定理

> 「$[a, b]$ 上一様有界で一様有界変動である関数列からは、ある有界変動関数に各点収束する部分列を取ることができる」

(*4) small data: 一般には初期値の全変動が十分小さい、すなわち初期値が定数に十分近い、という条件が必要

(*5) 2: 等温気体 (Lagrange 座標系) の方程式

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t + (a/v)_x = 0 \quad (u\text{: 速度、 } v = 1/\text{密度}, \ a > 0\text{: 定数})$$

(*6) 2: 弾性体の方程式 ([14])

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t - \sigma(v)_x = 0 \quad (\sigma'(v) > 0, \ v\sigma''(v) \geq 0)$$

及び、等エントロピー気体 (Euler 座標系) の方程式 ([15])

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0$$

(ρ: 密度, u: 速度, $P(\rho) = a\rho^\gamma$: 圧力, $\gamma = 1 + 2/(2N+1)$: 比熱比, $N = 1, 2, 3, \ldots$, $a > 0$: 定数)

(*7) 2: 一般の真性非線形な 2×2 の双曲型保存則系

これらの結果は改良されている部分もあるし、また近似解として動力学的近似を用いる Lions,Perthame,Tadmor,Sourganidis らの方法もあるが、詳細は省略する ([19, 20] 参照)。

いくつかの方法の中で補完測度法の一番の特徴は、大きい初期値に対して解の存在を示せることであろう。最近 Bressan らによる小さい初期値に対する適切性 (存在、一意性、連続依存性) の研究が強力に進められているが、大きい初期値に対する結果は補完測度法によるもの以外は、今のところ特別な方程式 (*5) に対するものしかない。

なお、Helly の定理を用いる場合と、補完測度法を用いる場合に使われる近似解の評価は異なっていて、それらは以下の通りである。

- Helly の選出定理の場合:

$$\begin{cases} T.V._x U^\varepsilon(\cdot,t) \le C, \\ \|U^\varepsilon(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty} \le C, \\ \|U^\varepsilon(\cdot,t) - U^\varepsilon(\cdot,s)\|_{L^1} \le C|t-s| \ (\text{または } o(|t-s|)) \end{cases}$$

- 補完測度法:

$$\begin{cases} \|U^\varepsilon(\cdot,\cdot)\|_{L^\infty} \le C, \\ \|\sqrt{\varepsilon} U^\varepsilon_x(\cdot,\cdot)\|_{L^2} \le C \end{cases}$$

4 単独保存則方程式

以下では、Tartar ([13]) による、単独の保存則方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \quad (t>0,\ x\in R) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad (x\in R) \end{cases} \tag{2}$$

に対する補完測度法を用いた弱解の存在証明を、Chen ([22]), Chen-Lu ([24]) による改良に基づいて紹介する。ここで、$u = u(x,t) \in R$、$f(u)$ は u に関して C^2 関数であると仮定し、$u_0 \in L^2 \cap L^\infty$ とする。例えば $f(u) = u^2/2$ のときはこの方程式は非粘性 Burgers 方程式

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \quad (u_t + uu_x = 0)$$

となる。

この方程式の近似解として、粘性近似方程式

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx} \quad (t>0,\ x\in R) \\ u(x,0) = u_0^\varepsilon(x) \qquad (x\in R) \end{cases} \tag{3}$$

の解 $u = u^\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ を取ることとする。なお u_0^ε は、u_0 を ε に依存したパラメータで適当に平滑化した十分滑らかな関数であるとし、ε に関して一様に

$$|u_0^\varepsilon(x)| \le M, \quad \|u_0^\varepsilon\|_{L^2} \le C$$

で、$\varepsilon \to 0$ の時に $u_0^\varepsilon \to u_0$ となるものとする。

命題 1 このとき、適当な滑らかさを持った (3) の解 $u = u^\varepsilon(x,t)$ が存在し、

$$|u^\varepsilon(x,t)| \le M, \quad \|\sqrt{\varepsilon} u_x^\varepsilon(\cdot,\cdot)\|_{L^2} \le \frac{1}{\sqrt{2}} C \tag{4}$$

を満たす。

証明

[23] による。簡単のため、u^ε を u と書くこととする。

u_0^ε は $u(\cdot,t) \in H^2 \cap C^2$ となる位十分に平滑化しておく。$t_0 > 0$ とし、$u(x,t_0)$ を考えると、$u(\cdot,t_0) \in H^2$ より $|x| \to \infty$ に対しては $u(x,t_0) \to 0$ となるので $u(x,t_0)$ は内部で最大値を取る。それを与える x を x_0 とする。

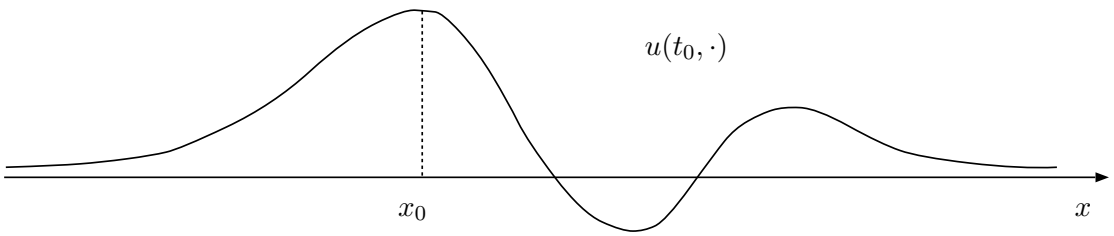

図 1: $u(t_0,\cdot)$

$$\max_{x \in R} u(x,t_0) = u(x_0,t_0)$$

このとき、$x = x_0$ で極大であるので

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} u(x,t_0)\Big|_{x=x_0} &= 0 \\ \frac{d^2}{dx^2} u(x,t_0)\Big|_{x=x_0} &\le 0 \end{aligned} \tag{5}$$

であり、(3) より

$$u_t = \varepsilon u_{xx} - f'(u) u_x$$

となるので、

$$\frac{d}{dt}u(x,t)\Big|_{x=x_0,t=t_0} = \varepsilon u_{xx} - f'(u)u_x\big|_{x=x_0,t=t_0} \le 0$$

となる。これと (5) とは、$u(x,t)$ が $(x,t)=(x_0,t_0)$ では t 方向には増加しないことを意味するので、よって $\max u(\cdot,t)$ は t に関して非増加となり、

$$\max u(\cdot,t) \le \max u(\cdot,0) = \max u_0(\cdot) \le M$$

が言える。同様にして、

$$\min u(\cdot,t) \ge \min u_0(\cdot) \ge -M$$

も言え、最初の不等式が示される。

また、方程式 $u_t + f'(u)u_x = \varepsilon u_{xx}$ を u 倍すると

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_t + F_0(u)_x = \varepsilon(uu_x)_x - \varepsilon u_x^2 \quad (F_0(u) = \int_0^u f'(v)vdv)$$

と書ける。これを $R\times[0,T]$ 上積分すると

$$\int_0^T dt\int_R \left(\frac{u^2}{2}\right)_t dx + \int_0^T dt\int_R (F_0(u)-\varepsilon uu_x)_x dx = -\varepsilon\int_0^T dt\int_R u_x^2 dx$$

となるが、$F_0(u)_x = uf'(u)u_x$ は $u,u_x\in L^2$, $|u|\le M$ より $f'(u)\in L^\infty$ となるので $F_0(u)_x\in L^1$ であり、$F_0(u(\pm\infty,t)) = F_0(0) = 0$ なので

$$\int_R F_0(u)_x dx = 0,$$

$(uu_x)_x = u_x^2 + uu_{xx}$ も $u,u_x,u_{xx}\in L^2$ なので $(uu_x)_x\in L^1$ であり、また、$u_x,u_{xx}\in L^2$ より $u_x\in L^\infty$ であるから $|x|\to\infty$ のとき $uu_x\to 0$ となる。よって

$$\int_R (uu_x)_x dx = 0$$

となるので、結局

$$\int_R \frac{1}{2}u^2(x,T)dx - \int_R \frac{1}{2}u_0^2(x)dx = -\varepsilon\int_0^T dt\int_R u_x^2 dx$$

となり、これにより

$$\|\sqrt{\varepsilon}u_x\|_{L^2(R\times[0,T])} = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|u(\cdot,T)\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{2}C^2$$

が得られる。∎

次に、初期値問題 (2) の弱解を定義する。

定義 2 $u = u(x,t) \in L^\infty(R \times [0,T))$ **が初期値問題** (2) **の** $0 \le t < T$ **での 弱解 であるとは任意の** $\phi \in C_0^1(R \times [0,T))$ **に対して**

$$\int_0^T dt \int_R \{\phi_t u + \phi_x f(u)\} dx + \int_R \phi(x,0) u_0(x) dx = 0 \tag{6}$$

を満たすこと。

注 3

ただし、保存則方程式においては、弱解の一意性は成り立たないので、通常は一意性のためにエントロピー条件と呼ばれるものを満たす弱解を考える。3 節で述べた近似解の極限は、いずれもその条件を満たすことが知られている。

$T = \infty$ **に対して粘性近似解** $u = u^\varepsilon$ **を** (6) **の左辺に代入する (それを** I^ε **とする) と、**

$$\begin{aligned} I^\varepsilon &= \int_0^\infty dt \int_R \{\phi_t u^\varepsilon + \phi_x f(u^\varepsilon)\} dx + \int_R \phi(x,0) u_0(x) dx \\ &= \int_0^\infty dt \int_R \{(\phi u^\varepsilon)_t + (\phi f(u^\varepsilon))_x\} dx - \int_0^\infty dt \int_R \phi \{u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x\} dx \\ &\quad + \int_R \phi(x,0) u_0(x) dx \\ &= -\int_R \phi(x,0) u^\varepsilon(x,0) dx - \varepsilon \int_0^\infty dt \int_R \phi u_{xx}^\varepsilon dx + \int_R \phi(x,0) u_0(x) dx \\ &= \varepsilon \int_0^\infty dt \int_R \phi_x u_x^\varepsilon dx + \int_R \phi(x,0) \{u_0(x) - u_0^\varepsilon(x)\} dx \end{aligned}$$

となるが、仮定により $\varepsilon \to 0$ **に関して** $u_0(x) - u_0^\varepsilon(x) = o(1)$ **で、また命題** 1 **と** Schwarz **の不等式により**

$$\left| \varepsilon \int_0^\infty dt \int_R \phi_x u_x^\varepsilon dx \right| \le \sqrt{\varepsilon} \|\phi_x(\cdot,\cdot)\|_{L^2} \|\sqrt{\varepsilon} u_x^\varepsilon(\cdot,\cdot)\|_{L^2} \le \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \|\phi_x\|_{L^2}$$

なので、結局

$$I^\varepsilon = o(1) \quad (\varepsilon \to 0)$$

となる。

一方、$L^\infty(\Omega)$ **の汎弱コンパクト性:**

「$\|g_n\|_{L^\infty(\Omega)} \le C$ **ならばある部分列** $\{g_{n_j}\}_j$ **とある関数** $g \in L^\infty(\Omega)$ **があって**

$$g_{n_j} \to g \quad L^\infty(\Omega) \text{ weak}*$$

」

と u^ε, $f(u^\varepsilon)$ **の一様有界性により、ある部分列** $\{\varepsilon_n\}$**、ある有界な関数** $\bar{u}$, $\bar{f}$ **があって**

$$u^{\varepsilon_n} \to \bar{u}, \quad f(u^{\varepsilon_n}) \to \bar{f} \quad L^\infty \text{ weak}*$$

となるので、

$$\int_0^\infty dt \int_R \{\phi_t u^{\varepsilon_n} + \phi_x f(u^{\varepsilon_n})\} dx + \int_R \phi(x,0) u_0(x) dx = I^{\varepsilon_n} = o(1)$$

において $n \to \infty$ とすると

$$\int_0^\infty dt \int_R \{\phi_t \bar{u} + \phi_x \bar{f})\} dx + \int_R \phi(x,0) u_0(x) dx = 0$$

となる。

よって、もし

$$\bar{f}(x,t) = f(\bar{u}(x,t)) \quad \text{a.e.} \tag{7}$$

が言えれば $\bar{u}(x,t)$ が弱解となる。しかし、一般にこれは明らかではない。

例 4

$v_n(x) = \cos nx$ とすると、任意の $\phi \in L^1(R)$ に対して Riemann–Lebesgue の定理により

$$\int_R \phi(x) \cos nx dx \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となり、これは

$$\cos nx \to 0 \quad L^\infty \text{ weak}*$$

を意味する。一方、

$$\cos^2 nx = \frac{1 + \cos 2nx}{2}$$

より、

$$\int_R \phi(x) \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_R \phi(x) dx + \frac{1}{2} \int_R \phi(x) \cos 2nx dx \to \frac{1}{2} \int_R \phi(x) dx \quad (n \to \infty)$$

となるので、

$$\cos^2 nx \to \frac{1}{2} \quad L^\infty \text{ weak}*$$

であり、すなわち

$$w^* - \lim \cos^2 nx \neq (w^* - \lim \cos nx)^2$$

であることになる。

この例からも分かるように、一般に $u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u}$ でも $f(u^\varepsilon) \overset{*}{\rightharpoonup} f(\bar{u})$ とは限らない。

しかし、この $\bar{f} = w^* - \lim f(u^\varepsilon)$ を $f(u)$ を用いて記述することを可能とする Young 測度と呼ばれるものがある。

5 Young 測度

定理 5 $\Omega(\subset R^M)$ を開集合, $K(\subset R^N)$ を有界集合とし、$v_n : \Omega \to R^N$ が可測関数列で $v_n(x) \in K$ (a.e. $x \in \Omega$) であるならばある部分列 $\{v_{n_j}\}_j$, および R^N 上のある確率測度 (全測度 1 の非負 Borel 測度) の族 $\{\nu_x(y)\}_{\text{a.e.}x\in\Omega}$ が存在し、次を満たす。

- $\text{supp}_y\, \nu_x(y) \subset \bar{K}$
- R^N 上の任意の連続関数 $G(y)$ に対し、

$$G(v_{n_j}(x)) \to \int_{R^N} G(y)d\nu_x(y) \quad L^\infty(\Omega)\text{weak}*$$

詳細は [13, 21] 参照のこと。

この確率測度の族 $\{\nu_x(y)\}$ を $\{v_{n_j}\}_j$ に対する **Young** 測度という。以後、Young 測度による積分

$$\int_{R^N} G(y)d\nu_x(y)$$

(ν の添字 x の関数となる) を $\bar{G}(x)$ や $\langle \nu_x(y), G(y)\rangle$ のように書くこととする。

なお、Young 測度が全測度 1 である必然性は $G(y) \equiv$ 定数 とすれば容易にわかるだろう。

例 6

$v_n \to v$ が強い意味での収束であるならば (例えば a.e. 収束)

$$G(v_n) \to G(v(x))$$

であり、一方

$$G(v_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \nu_x(y), G(y)\rangle$$

なので $\langle \nu_x(y), G(y)\rangle = G(v(x))$ となり、よって

$$\nu_x(y) = \delta_{v(x)}(y) (= v(x) \text{ 中心の } \delta\text{-測度})$$

となる。

なお、逆に $\nu_x(y) = \delta_{v(x)}(y)$ であったとすると、

$$v_{n_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{v}, \quad v_{n_j}^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{v}^2$$

となり、$\bar{v}(x)$ は有界なので、任意の有界集合 $O(\subset \Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \chi_O(x)|v_{n_j} - \bar{v}|^2 dx = \int_\Omega \chi_O(x)(v_{n_j}^2 - \bar{v}^2)dx + \int_\Omega (-2\bar{v}\chi_O(x))(v_{n_j} - \bar{v})dx$$
$$\to \quad 0$$

($\chi_O(x)$ は O の定義関数、 $\chi_O(x), -2\bar{v}\chi_O(x) \in L^1(\Omega)$)

となり、よって (必要なら部分列を取れば) $v_{n_j} \to \bar{v}$ a.e. となる。

例 7

例 4 で取り上げた $v_n = \cos nx$ に対する Young 測度を決定する (cf.[13])。

$\phi \in C_0(R)$ とし $G(v)$ を連続関数とする。

$$\begin{aligned}\int_R \phi(x)G(\cos nx)dx &= \frac{1}{n}\int_R \phi\left(\frac{t}{n}\right)G(\cos t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\phi\left(\frac{t}{n}\right)G(\cos t)dt \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\phi\left(\frac{z}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)G(\cos z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(\cos z)\left\{\frac{2\pi}{n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\phi\left(\frac{z}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right\}dz\end{aligned}$$

と変形すると ϕ の中身は $2k\pi/n < z/n + 2k\pi/n < 2(k+1)\pi/n$ であり、$\phi \in C_0(R)$ なので積分の中カッコの部分は $n \to \infty$ のときに $\int_R \phi dx$ に収束しかつ一様有界、よって Lebesgue の収束定理により

$$\int_R \phi(x)G(\cos nx)dx \to \frac{1}{2\pi}\int_R \phi(x)dx\int_0^{2\pi}G(\cos z)dz$$

となる。これは

$$G(\cos nx) \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(\cos z)dz \quad L^\infty\text{weak}*$$

を意味し、この場合極限は x によらない定数となる。ここで

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(\cos z)dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}G(\cos z)dz = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{G(v)}{\sqrt{1-v^2}}dv$$

なので、結局 $\{\cos nx\}$ に対する Young 測度は

$$\nu_x(v) = \chi_{(-1,1)}(v)\frac{1}{\pi}\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

すなわち

$$\nu_x(E) = \int_{E\cap(-1,1)}\frac{1}{\pi}\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

となる。この場合 Young 測度は絶対連続で、その密度関数は $v = 0$ での値がもっとも小さく、$v = -1, 1$ では無限に発散する。

$\nu_x(v)$ は確率測度であるから、$\langle \nu_x(v), G(v)\rangle$ を $G(v)$ の重み付きの平均と見ると、これは $v = -1, 1$ のところがもっとも重み付けが強く、$v = 0$ のところがもっとも重み付けが軽いことを意味する。このことは例えば次のように考えるといいだろう:

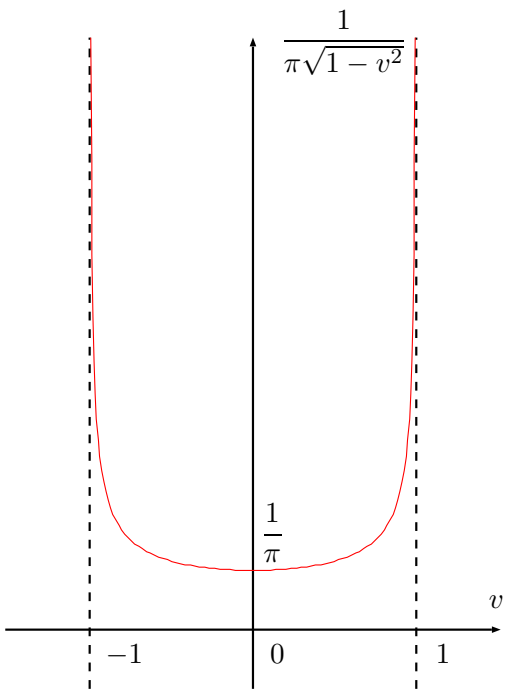

図 2: $\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-v^2}}$ ($\cos nx$ の Young 測度の密度関数)

> $\cos nx$ のように振動して収束しない関数の場合は、各 x に対してその極限は点になるのではなく、もっと広がったぼんやりしたものになっていて、連続関数 $G(v)$ をかぶせたものは平均収束としては極限を持つがそれは $G(v)$ の平均のようなもので、$\cos nx$ の値が「たくさん」現われる $v=-1,1$ の付近が重みが強く、$\cos nx$ の値が「少なく」現われる $v=0$ の付近の重みが軽くなる。

なお、$v=-1,1$ の付近に $\cos nx$ の値が「たくさん」現われる、というのは、例えば n が自然数でなく時間としての実数変数であると考えて時間とともに $v=\cos nx$ の値の変化を考えてみると、グラフの傾きの小さい $v=-1,1$ のところはゆっくり動き、傾きの大きい $v=0$ のところは速く通過することが想像できるだろう。

結局、(7) のためには、

> $\nu_{(x,t)}(u)$ を決定し、$\nu_{(x,t)}(u)=\delta_{\bar{u}(x,t)}(u)$ であることを示す

ということが目標であることになる。

6 補完測度法

定理 8 (div–curl 補題) $\Omega(\subset R^N)$ を有界開集合、$v_n, w_n : \Omega \to R^N$ を有界関数列とし、$v_n \to v$, $w_n \to w$ $L^\infty(\Omega; R^N)$ weak$*$ とする。

このとき、

$$\operatorname{div} v_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}(v_n)_k, \quad \operatorname{curl} w_n = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(w_n)_j - \frac{\partial}{\partial x_j}(w_n)_i \right)_{i<j}$$

が、$H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ のあるコンパクト集合に含まれるならば、

$$v_{n_j} \cdot w_{n_j} = \sum_{k=1}^{N} (v_{n_j})_k (w_{n_j})_k \to v \cdot w \quad L^\infty(\Omega) \text{ weak}*$$

となる部分列 $\{n_j\}_j$ が存在する。

詳細は [13] 参照のこと。なお、$H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ は任意の $\phi \in C^\infty_0(\Omega)$ に対して $\phi T \in H^{-1}(\Omega)$ となる $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 全体からなる Fréchet 空間。

定義 9 C^2 級関数 $\eta(u), q(u) : R \to R$ が

$$q'(u) = \eta'(u) f'(u) \tag{8}$$

を満たすとき、$(\eta(u), q(u))$ を方程式 $u_t + f(u)_x = 0$ のエントロピー対と呼び、$\eta(u)$ をエントロピー、$q(u)$ をエントロピー流速密度という。

もし、$u(x,t)$ が $u_t + f(u)_x = 0$ の滑らかな解であるときは

$$\eta(u)_t + q(u)_x = \eta'(u)u_t + q'(u)u_x = \eta'(u)(u_t + f'(u)u_x) = \eta'(u)(u_t + f(u)_x) = 0$$

となるので、エントロピー対は新たな保存量を与えるものであることがわかる。

注 10

なお、単独でなく連立の保存則方程式 (1) の場合はエントロピー対 $(\eta(U), q(U))$ は線形の微分方程式系

$$\nabla q(U) = \nabla \eta(U) F'(U) \quad (\nabla = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_N)) \tag{9}$$

で定義され、これは方程式が N 本、未知関数 2 個の過剰な方程式系であるのでエントロピー対の存在は一般には自明ではない。

粘性近似解 u^ε に対しては

$$\begin{aligned} &\eta(u^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon)_x \\ &\quad = \eta' u^\varepsilon_t + q' u^\varepsilon_x = \eta'(u^\varepsilon_t + f'(u^\varepsilon)' u^\varepsilon_x) = \eta'(u^\varepsilon_t + f(u^\varepsilon)_x) \\ &\quad = \varepsilon \eta'(u^\varepsilon) u^\varepsilon_{xx} = \varepsilon(\eta'(u^\varepsilon) u^\varepsilon_x)_x - \varepsilon \eta''(u^\varepsilon)(u^\varepsilon_x)^2 \end{aligned}$$

となる。ここから $\{\eta(u^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon)_x\}_\varepsilon$ のコンパクト性を示す。

命題 11 $R \times (0,\infty)$ の任意の有界開集合 Ω に対して $\{\eta(u^\varepsilon)_t + q(u^\varepsilon)_x\}_\varepsilon$ は $H^{-1}_{\rm loc}(\Omega)$ で相対コンパクト。

この命題の証明には次の 2 つの埋め込み定理を使う。

定理 12 $\Omega(\subset R^N)$ が有界開集合,

$$A \subset \mathcal{M}(\Omega)(\equiv \{\Omega \text{ 上の符号付き Radon 測度 }\} = C_0(\Omega)^*)$$

とするとき

$$\sup_{\mu\in A, C_0(\Omega)\ni\phi\neq 0} \frac{|\langle\mu,\phi\rangle|}{\|\phi\|_{C_0}} < \infty$$

ならば A はソボレフ空間 $W^{-1,p}(\Omega)$ に埋め込まれ、そこで相対コンパクト (ただし p は任意の $1 < p < N/(N-1)$)。

定理 13 (Murat の補題) R^N の有界な開集合 Ω および $1 < q \le 2 < r < \infty$ なる任意の q, r に対し

$$\begin{aligned}&(W^{-1,q}(\Omega) \text{ のコンパクト集合}) \cap (W^{-1,r}(\Omega) \text{ の有界集合})\\ &\quad \subset (H^{-1}_{\rm loc}(\Omega) \text{ のコンパクト集合})\end{aligned}$$

詳細は [13, 21] 参照のこと。

(命題 11 の証明)

$I_1 = \varepsilon(\eta'(u^\varepsilon)u^\varepsilon_x)_x$, $I_2 = -\varepsilon\eta''(u^\varepsilon)(u^\varepsilon_x)^2$ とする。

u^ε は一様有界なので $\eta''(u^\varepsilon)$ も有界で、命題 1 より

$$\|\sqrt{\varepsilon}u^\varepsilon_x\|_{L^2} \le C$$

なので、任意の $\phi \in C_0(\Omega)$ に対して

$$\left|\iint_\Omega I_2\phi dxdt\right| \le C_1\|\phi\|_{C(\Omega)}$$

となる。よって I_2 は $C_0(\Omega)^* = \mathcal{M}(\Omega)$ で有界、と見ることができ、定理 12 により $1 < q < 2$ である q に対し $\{I_2\}_\varepsilon$ は $W^{-1,q}(\Omega)$ のあるコンパクト集合に含まれる。

また I_1 は、Schwarz の不等式により任意の $\phi \in C^1_0(\Omega)$ に対し

$$\left|\iint_\Omega I_1\phi dxdt\right| = \left|\iint_\Omega \varepsilon\eta'(u^\varepsilon)u^\varepsilon_x\phi_x dxdt\right| \le \sqrt{\varepsilon}\|\eta'(u^\varepsilon)\|_{L^\infty}\|\phi_x\|_{L^2(\Omega)}\|\sqrt{\varepsilon}u^\varepsilon_x\|_{L^2(\Omega)}$$

となり、$\eta'(u^\varepsilon)$ は一様有界、Ω は有界で $1 < q < 2$ より $q' = q/(q-1) > 2$ なので

$$\|\phi_x\|_{L^2(\Omega)} \le C_2(\Omega)\|\phi_x\|_{L^{q'}(\Omega)}$$

であり、よって命題 1 より

$$\left|\iint_\Omega I_1\phi dxdt\right| \le C_3\sqrt{\varepsilon}\|\phi_x\|_{L^{q'}(\Omega)} \to 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

となるので $\{I_1\}_\varepsilon$ も $W^{-1,q}(\Omega)$ で相対コンパクトとなる。よって $I_1+I_2=\eta(u^\varepsilon)_t+q(u^\varepsilon)_x$ は $W^{-1,q}(\Omega)$ で相対コンパクトであることがわかる。

一方、$\eta(u^\varepsilon)$, $q(u^\varepsilon)$ は一様有界なので、$r>1$, $\phi\in C_0^1(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\iint_\Omega(\eta(u^\varepsilon)_t+q(u^\varepsilon)_x)\phi dxdt\right| &= \left|\iint_\Omega(\eta(u^\varepsilon)\phi_t+q(u^\varepsilon)\phi_x)dxdt\right| \\ \le\ & C_4(\|\phi_t\|_{L^1(\Omega)}+\|\phi_x\|_{L^1(\Omega)}) \le C_5\|\phi\|_{W_0^{1,r'}(\Omega)} \\ & \left(r'=\frac{r}{r-1}>1\right)\end{aligned}$$

となるので、$\{\eta(u^\varepsilon)_t+q(u^\varepsilon)_x\}_\varepsilon$ は $W^{-1,r}(\Omega)$ で有界であることになる。

よって Murat の補題 (定理 13) により $\{\eta(u^\varepsilon)_t+q(u^\varepsilon)_x\}_\varepsilon$ は $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ で相対コンパクトであることになる。∎

今、2 つのエントロピー対 (η,q), $(\hat\eta,\hat q)$ を考える。これらは連続だから、Young 測度の定理 5 により $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ のある部分列 $\{u^{\varepsilon'}\}_{\varepsilon'}$ に対して

$$\begin{aligned}&\eta(u^{\varepsilon'}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar\eta = \langle\nu_{(x,t)}(u),\eta(u)\rangle \\ &q(u^{\varepsilon'}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar q \\ &\hat\eta(u^{\varepsilon'}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{\hat\eta} \\ &\hat q(u^{\varepsilon'}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{\hat q} \\ &(\eta\hat q-\hat\eta q)(u^{\varepsilon'}) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\eta\hat q-\hat\eta q} = \langle\nu,\eta\hat q-\hat\eta q\rangle\end{aligned}$$

となる。

一方、命題 11 により

$$\operatorname*{div}_{(x,t)}(q(u^\varepsilon),\eta(u^\varepsilon)) = \eta(u^\varepsilon)_t+q(u^\varepsilon)_x, \quad \operatorname*{curl}_{(x,t)}(-\hat\eta(u^\varepsilon),\hat q(u^\varepsilon)) = \hat\eta(u^\varepsilon)_t+\hat q(u^\varepsilon)_x$$

はいずれもある $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ のコンパクト集合に含まれるので、div–curl 補題により $\{u^{\varepsilon'}\}_{\varepsilon'}$ のある部分列 $\{u^{\varepsilon''}\}_{\varepsilon''}$ に対して

$$\{(q,\eta)\cdot(-\hat\eta,\hat q)\}(u^{\varepsilon''}) = (\eta\hat q-\hat\eta q)(u^{\varepsilon''}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar\eta\bar{\hat q}-\bar{\hat\eta}\bar q$$

となる。以上により

$$\overline{\eta\hat q-\hat\eta q} = \bar\eta\bar{\hat q}-\bar{\hat\eta}\bar q \quad \text{a.e. } (x,t) \tag{10}$$

が得られる。この式 (10) は

$$\langle \nu, \begin{vmatrix} \eta & q \\ \hat{\eta} & \hat{q} \end{vmatrix} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \nu, \eta \rangle & \langle \nu, q \rangle \\ \langle \nu, \hat{\eta} \rangle & \langle \nu, \hat{q} \rangle \end{vmatrix}$$

とも書かれ、**Tartar** 方程式 と呼ばれる。方程式 $u_t + f(u)_x = 0$ が線形である場合 ($f''(u) \equiv 0$) この Tartar 方程式は自明なものとなるが、非線形の場合には必ずしもそうではなく、この方程式から $\nu = \delta_{\bar{u}}$ であることを導くことができる。これを次節で述べる。

7 Tartar 方程式の解法

単独の保存則方程式の場合、任意の C^2 関数 $\eta(u)$ に対し

$$q(u) = \int^u \eta'(v) f'(v) dv$$

とすれば (8) により $(\eta(u), q(u))$ はエントロピー対になるから、非常にたくさんのエントロピー対があることになる。これを使って Tartar 方程式 (10) を解くことにする。以下で述べる方法は、Tartar ([13]), Chen-Lu ([24]) らによる。Chen ([22]) も参照のこと。

まず、$(\hat{\eta}(u), \hat{q}(u)) = (u, f(u))$ とする ($(u, f(u))$ もエントロピー対の自明な一つ)。$\bar{u}$, $\bar{f}$ は (x,t) の関数で、Young 測度 $\nu = \nu(u)$ での積分に関しては定数とみれるので

$$\begin{aligned} & \overline{\eta\hat{q} - \hat{\eta}q} - (\bar{\eta}\bar{\hat{q}} - \bar{\hat{\eta}}\bar{q}) \\ &= \langle \nu, \eta(u)f(u) - uq(u) \rangle - (\langle \nu, \eta(u) \rangle \bar{f} - \bar{u}\langle \nu, q(u) \rangle) \\ &= \langle \nu, \eta(u)(f(u) - \bar{f}) - (u - \bar{u})q(u) \rangle \end{aligned}$$

と変形できる。よって、

$$\langle \nu, \eta(u)(f(u) - \bar{f}) - (u - \bar{u})q(u) \rangle = 0 \quad \text{a.e. } (x,t) \tag{11}$$

となる。今、例えばこの ν に関する被積分関数 $\eta(u)(f(u) - \bar{f}) - (u - \bar{u})q(u)$ が、もし η, q を適当に選ぶことで

$$\eta(u)(f(u) - \bar{f}) - (u - \bar{u})q(u) \begin{cases} = 0 & (u = \bar{u}) \\ < 0 & (u \neq \bar{u}) \end{cases}$$

のようにできるならば、(11) から $\operatorname{supp} \nu = \{\bar{u}\}$ (一点) であることがわかり、よって $\nu = \delta_{\bar{u}}$ であることになる。

それに似た役割をする (η, q) として単独の保存則方程式の理論で良く用いられる

$$\eta(u) = |u - \bar{u}|, \quad q(u) = \{f(u) - f(\bar{u})\} \operatorname{sign}(u - \bar{u})$$

を取る。

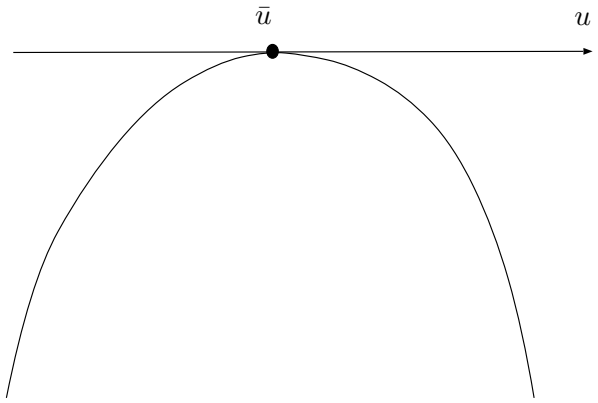

図 3: $\eta(u)(f(u)-\bar{f})-(u-\bar{u})q(u)$ の理想的なもの

注 14

ただし、この (η, q) は $u=\bar{u}$ では微分可能ではなく、よって C^2 級関数でもない。しかし、C^∞ 級関数 $\bar{\eta}_n$ でこの $\eta(u)$ を一様に近似することはでき、$q_n(u)=\int^u \eta_n'(v)f'(v)dv$

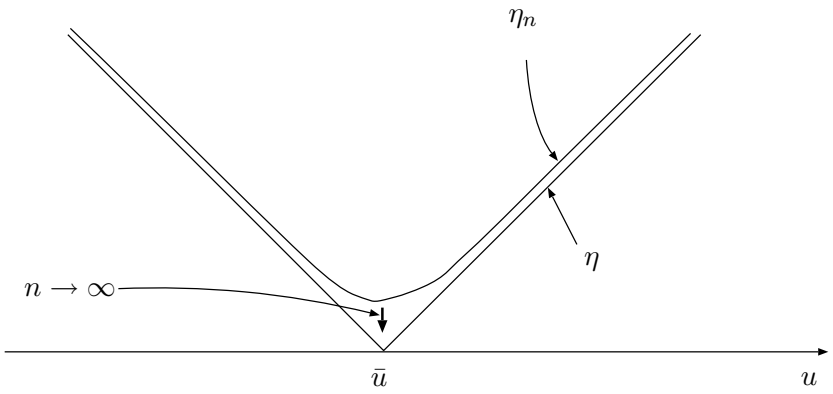

図 4: $\eta(u)$ と $\eta_n(u)$

とすれば (η_n, q_n) は (11) を満たし、そして $n\to\infty$ のときに、Young 測度 ν の積分に関する Lebesgue 収束定理によりその極限としてこの (η, q) に対して (11) が成り立つことが示される。

この (η, q) に対し、

$$\begin{aligned}&\eta(u)(f(u)-\bar{f})-(u-\bar{u})q(u)\\ &\quad= \ (f(u)-\bar{f})|u-\bar{u}|-|u-\bar{u}|\{f(u)-f(\bar{u})\}=|u-\bar{u}|\{f(\bar{u})-\bar{f}\}\end{aligned}$$

となり、$f(\bar{u})-\bar{f}$ は u に関しては定数なので (11) は

$$\langle\nu, |u-\bar{u}|\{f(\bar{u})-\bar{f}\}\rangle=\{f(\bar{u})-\bar{f}\}\langle\nu, |u-\bar{u}|\rangle=0 \quad \text{a.e.}$$

となる。よって、

$$f(\bar{u}) = \bar{f} \text{ または } \langle \nu, |u - \bar{u}| \rangle = 0 \quad \text{a.e.}$$

すなわち

$$f(\bar{u}) = \bar{f} \text{ または } \nu = \delta_{\bar{u}} \quad \text{a.e.}$$

が言えたことになる。

そして、$\nu = \delta_{\bar{u}}$ ならばもちろん $f(\bar{u}) = \bar{f}$ でもあるので、よってどちらにしても元の目標であった (7) が言えたことになり、$\bar{u}$ が弱解であることが示された。

ただし、エントロピー条件、または

$$u^{\varepsilon''} \to \bar{u} \quad \text{a.e.}$$

を示すにはやはり $\nu = \delta_{\bar{u}}$ であることを示す必要がある。よって以下でそれを考察する。

今度は

$$\eta(u) = f(u) - f(\bar{u}), \quad q(u) = \int_{\bar{u}}^{u} (f'(v))^2 dv$$

として (11) に代入してみる。この場合

$$H(u) = \eta(u)(f(u) - \bar{f}) - (u - \bar{u})q(u)$$

とおくと、$f(\bar{u}) = \bar{f}$ なので

$$H(u) = (f(u) - f(\bar{u}))^2 - (u - \bar{u}) \int_{\bar{u}}^{u} (f'(v))^2 dv$$

となるが、Schwarz の不等式により

$$|f(u) - f(\bar{u})| = \left| \int_{\bar{u}}^{u} f'(v) dv \right| \leq \sqrt{|u - \bar{u}|} \left| \int_{\bar{u}}^{u} (f'(v))^2 dv \right|$$

となるので $H(u) \leq 0$ で、その等号が成立するのは $u = \bar{u}$ かまたは u と $\bar{u}$ との間で $f'(u)$ が定数である場合、となる。

この場合、(11) の

$$\langle \nu, H(u) \rangle = 0$$

により $\operatorname{supp} \nu$ 上 $H(u)$ は 0 でなくてはならず、よって $\operatorname{supp} \nu$ の凸包の上で $f'(u)$ が定数でなければならないことになる。

故に、例えば $f(u) = u^2/2$ (Burgers 方程式) のように $f''(u) > 0$ を満たす単独保存則方程式の場合は $\operatorname{supp} \nu$ は 1 点になり、結局 $\nu = \delta_{\bar{u}}$ であることが言える。

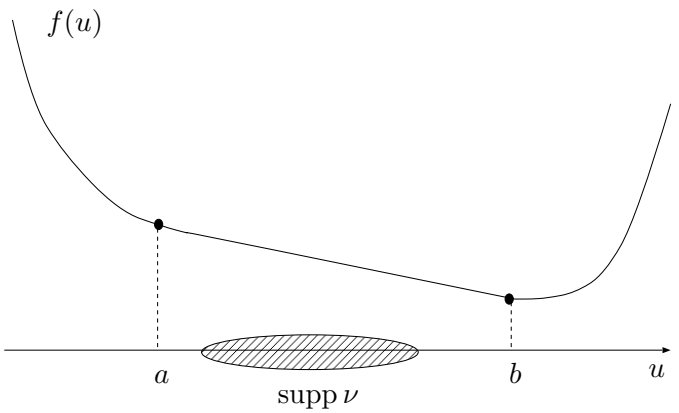

図 5: 部分的に線形な $f(u)$

注 15

凸ではなく、実際に一部分で線形退化しているような $f(u)$ (図 5) に対しては Tartar 方程式 (10) からは何も得られない。例えば $f(u)$ が区間 (a,b) 上で $f'(u) \equiv c_0$ (定数) であるとする。

このとき、$a \le u \le b$ に対して

$$\begin{aligned} q(u) &= q(a) + \int_a^u \eta'(v) f'(v) dv = q(a) + c_0 \int_a^u \eta'(v) dv = c_0 \eta(u) + c_1 \\ & (c_1 = q(a) - c_0 \eta(a)) \end{aligned}$$

となり

$$\begin{vmatrix} \eta & q \\ \hat{\eta} & \hat{q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta & c_0\eta + c_1 \\ \hat{\eta} & c_0\hat{\eta} + c_2 \end{vmatrix} = c_2\eta - c_1\hat{\eta}$$

となるので、$\operatorname{supp}\nu \subset [a,b]$ である場合、

$$\begin{aligned} &\langle \nu, \begin{vmatrix} \eta & q \\ \hat{\eta} & \hat{q} \end{vmatrix} \rangle = \langle \nu, c_2\eta - c_1\hat{\eta} \rangle \\ &\begin{vmatrix} \langle \nu,\eta \rangle & \langle \nu, q \rangle \\ \langle \nu,\hat{\eta} \rangle & \langle \nu, \hat{q} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \nu,\eta \rangle & c_0\langle \nu,\eta \rangle + c_1 \\ \langle \nu,\hat{\eta} \rangle & c_0\langle \nu,\hat{\eta} \rangle + c_2 \end{vmatrix} = c_2\langle \nu,\eta \rangle - c_1\langle \nu,\hat{\eta} \rangle = \langle \nu, c_2\eta - c_1\hat{\eta} \rangle \\ &\qquad (\text{Young 測度は全測度 1 より } \langle \nu, c_j \rangle = c_j) \end{aligned}$$

となる。すなわち、$\operatorname{supp}\nu \subset [a,b]$ かつ $\langle \nu, 1 \rangle = 1$ である任意の測度に対し Tartar 方程式が成り立ってしまうことになり、言い換えると Tartar 方程式 (10) からは Young 測度に関する情報は何も得られないことになる。

つまり、Tartar 方程式は線形の方程式には自明な関係式でありそこからは何も得られないが、非線形性が強い方程式には威力を発揮する、といった性質のものであることが分かる。

よって、補完測度法によって Tartar 方程式を導く手法はどんな保存則方程式 (系) にも有効なのではなく、非線形性の弱い線形に退化した方程式などにはあまり有効ではないだろうと思われる。

8 連立方程式、その他

連立の保存則方程式の場合も、補完測度法を用いる弱解の存在証明は単独の場合とほぼ同様で、

1. 近似解 U^ε を構成しその一様有界性を証明
2. エントロピー対に対して $\eta(U^\varepsilon)_t + q(U^\varepsilon)_x$ のコンパクト性を証明
3. Tartar 方程式を解く

ということを行う。このそれぞれの項目毎に難点や現状を述べる。

8.1 近似解の一様有界性

方程式によっては一様有界性を示すのは難しく、今のところ

- (不変領域の理論 ([23])) + (人工粘性近似解、または差分近似解)
- 動力学的近似 ([19, 20])

位でしかこれは示されてはおらず、例えば不変領域の理論でちゃんと一様有界性が得られる方程式はかなり限られていて、一般には近似解の一様有界性を得るのは非常に難しい。

これに対して、Young 測度を L^∞ での有界列でなく、L^p $(p > 1)$ での有界列に拡張し (L^p-Young 測度)、補完測度法の定理も L^p 弱収束に拡張して考える L^p-補完測度法というものも考えられている ([32, 33, 34, 35, 36, 37, 38] 等参照)。今のところ、Tartar 方程式の処理等が難しいようでまだこれによる結果は多くはないが、これがうまくいけば、有界性の評価は自然に成り立つことが期待されるエネルギー評価で置き換えることができるので、少なくとも有界性に関する部分は解消できることになる。

さらに、今まで補完測度法には適用できなかったような近似解、例えば圧縮性 Euler 方程式の近似解として、人工粘性近似でなく自然粘性近似である圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解を使いその収束性を補完測度法で議論する、といったことが行える可能性がある。

8.2 エントロピーのコンパクト性

今までこれが示されていたのは、Lax–Friedrichs 型、Godunov 型の差分近似解、人工粘性近似解 ([13, 14])、あるいは動力学的近似 ([19]) などの近似解のみで、しかもそれに

は通常有界性が使われるので上と同じ困難さが生ずる。

他の近似解、例えば Glimm の差分や波面追跡法などを用いた場合、それらは衝撃波をなまらせない形で持っているためこの性質を持たないのではないかと想像され、よってそのような近似解の収束を補完測度法で示すのは難しいのではないかと思われる。

なお、近年緩和 (relaxation) 項による近似と補完測度法の親和性が知られ、それに関する論文も増えている ([39, 40, 41, 42, 43])。

8.3 Tartar 方程式

これは近似解とは直接は関係なく、エントロピー、すなわち方程式の形のみに関わる話になる。基本的に今のところエントロピーがたくさん存在する $N \leq 2$ の場合にしか Tartar 方程式は解かれておらず、$N = 2$ の場合でも解かれている方程式系はほぼ以下の通りである。

- 弾性系:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t - \sigma(v)_x = 0 \end{cases}$$

  $v\sigma''(v) \geq 0$ の場合は DiPerna ([14]), $v\sigma''(v) \leq 0$ の場合は J.Shearer ([33]), P.Lin ([34]) らの結果があるが、$v\sigma''(v) \leq 0$ の場合は $\sigma(v)$ にかなり制約が必要で、例えば $\sigma' \to 0$ ($|v| \to \infty$) の場合には未解決。

- 気体のバロトロピックモデル:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0 \end{cases} \qquad (\rho \geq 0,\ P'(\rho) \geq 0,\ P''(\rho) \geq 0)$$

  DiPerna ([15]), Ding,Chen,Luo ([26, 27],[28]), Lions,Perthame,Tadmor,Souganidis ([19, 20]), Chen,LeFloch ([31]), Makino ([30]) 等の結果がある。ただし圧力関数 $P(\rho)$ には強い制約がつく。または、この方程式の相対論形を扱ったものもある (Makino [44])。

- へそ型の退化性を持つ 2×2 の連立方程式:

$$f'(U_0) \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\lambda_2(U) > \lambda_1(U)\ (U \neq U_0),\ \ \lambda_2(U_0) = \lambda_1(U_0))$$

  Chen,Kan ([45])

- 一般の 2×2 の連立方程式に対する考察: Serre [46].

2×2 の連立方程式の場合、エントロピー対の方程式 (9) は未知関数の数は同じになり、初期値の任意性の分エントロピー対はたくさんあることになり、それにより Tartar 方程式が解けるものもあるが、まだ 2×2 の方程式でも Tartar 方程式が解かれていないものは多い。

また、N が 3 以上の場合はエントロピーがほとんどないので、今のところ Tartar 方程式を解くには不十分で、例えばエネルギー保存まで含めた完全な形の気体の方程式などには補完測度法は適用されていない。

8.4 未解決問題

最後に、今までにも少し触れたが、補完測度法に関する未解決の問題をいくつか上げておく。

- $N = 3$ の連立方程式について。

  単独方程式で見たように、実は必ずしもたくさんのエントロピーが必要なのではなく、丁度良いエントロピーが一つでもあれば Young 測度を追いつめることができる可能性はある。また、$N = 3$ でも例えば気体の方程式では自然なエントロピーが存在し、それによって完全には Young 測度を決定できないかも知れないがある程度の性質を知ることができるのではないか、と考えている。

- 今まで収束が示されていない他の近似解の収束の証明。

  補完測度法は近似解の収束の証明に使われるが、そこで使われる近似解は、Glimm の差分近似や波面追跡法のように衝撃波を強く保持するようなものではなく、人工粘性近似解や Lax–Friedrichs 型差分近似解のようにむしろ衝撃波をなだらかにするようなものであるが、例えば圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解を圧縮性 Euler 方程式に対する自然粘性近似解とみて、その収束性を補完測度法で証明できないかと考えている。

  この場合、通常の補完測度法でなく、L^p での補完測度法の方が使いやすいだろうと思われるが、Euler 方程式に対する L^p-補完測度法での Tartar 方程式に関する研究は現在のところほとんど行われていないようである。

- $v\sigma''(v) \le 0$ の場合弾性体の方程式について。

  例えば典型的な非線形振動 $\sigma(v) = v/\sqrt{1+v^2}$ のような $\sigma' \to 0$ $(|v| \to \infty)$ となるような弾性体の方程式に対しては、それが持つ有界性は弱く (L^1)、L^p-補完測度法 $(p > 1)$ でも 間に合っていない。しかし、L^1 での議論は困難で、今のところ Young 測度についてしか解決してはおらず、L^p-補完測度法をさらに L^1 にまで拡張することは難しいだろうと思われる。

- 気体のより一般のバロトロピックモデルの方程式について。

  現在一般のバロトロピックモデルの方程式

  $$P'(\rho) > 0, \quad P''(\rho) > 0 \quad (\rho > 0)$$

に対しては Tartar の方程式は解かれておらず、圧力 $P(\rho)$ にかなり強い制約 (例えば $P(\rho) = a\rho^\gamma$ $(\gamma > 1)$) をつけたものについて解かれているのみである。

最近、その制約をゆるめた結果が相次いで報告された ([31, 30]) が、まだかなり強い条件がついているように思われる。

圧力項の形を一般にすると、エントロピーの性質があいまいになり、それで Tartar 方程式を解くことが困難になり、そのため通常は Tartar 方程式を解くために圧力項にある程度条件をつけエントロピーが必要な性質を持つようにしているのであるが、使用するエントロピーの数を少なくする、あるいは具体的に式で表現できるようなエントロピーのみで Tartar 方程式を解く、といったことはできないだろうかと考えている。

DiPerna が使ったエントロピーは、Darboux の公式で書けるエントロピーで、Chen, Makino, Lions, Perthame らもこの Darboux の公式を元にしている。しかし、DiPerna が後に指摘しているように ([47]) 必ずしもたくさんのエントロピーは必要ではなく、少ないエントロピーでもある程度の結果を導くことができる。同様の考察は Chen,Lu ([48]) らによっても試みられている。

一方で一般の $P(\rho)$ に対しても例えば u に関して多項式であるエントロピーは具体的な式で表現することができ、これは u の次数に対して独立なものが一つずつ存在し全部で可算個存在するので、例えばこの可算個のエントロピーを組み合わせて Tartar 方程式を解くことができれば、圧力項に関する制限を多少は緩めることができるのではないだろうかと考えている。

また、具体的な $P(\rho)$ であっても、例えば Van der Waals 方程式のようなものについては、以前補完測度法に関する研究もされたようだが (cf. [49]) 取り扱いが困難でまだ成功には至っていないようである。

- 3 次元 Euler 方程式の球対称問題。

  3 次元の気体の方程式を球対称とみて 1 次元化したものは原点で特異性を持ち、そのままでは弱解を構成するのは難しく、補完測度法では今のところその原点での特異性を外した問題しか解かれていない (Makino,Takeno [50], Chen,Glimm [51])。原点の特異性の部分を考慮した新たな近似解 (例えば差分近似解) を構成して、補完測度法を適用できないかと考えている。

いずれも手頃な問題とはいいがたいし、かなり無理がありそうなものも含まれているが、希望も含めて上げてみた。

なお補完測度法で解ける方程式を増やす、という方向のほかにも、Tartar 方程式が解かれている方程式に対して、初期値境界値問題や、外力項や履歴項、別な方程式などが追加された方程式、周期解の存在などへの補完測度法の応用なども行われていて、そちらの方向での興味深い話題や未解決問題なども色々ある。これらについてはここでは省略し、やや情報が古いが [66] を紹介するにとどめることとする。

参考文献

- 成書、論説

[1] 浅倉史興, 双曲型保存則系の初期値問題 – 基本結果と近年の話題 –,「数学」第 52 巻 3 号 (日本数学会) 2000, 257–278.

[2] 西田孝明– 川島秀一, 気体の運動方程式,「非線形の現象と解析」, 山口昌也編 (日本評論社) 1979, 135–160.

[3] J.Smoller. Shock waves and reaction-diffusion equations. (2nd edition), Springer, 1991.

[4] C.M.Dafermous. Hyperbolic conservation laws in continuum physics. Springer, 2000.

[5] D.Serre. Systems of conservation laws, 1, 2. Cambridge, 1999.

[6] A.Bressan. Hyperbolic systems of conservation laws. Oxford, 2000.

[7] 吉川敦, 非線形保存則系入門 – 保存則の理論 –, 上智大学数学講究録 No.21 (上智大学数学教室), 1985.

[8] L.Hörmander. Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations. Springer, 1997.

[9] R.Courant and K.O.Friedrichs. Supersonic flow and shock waves. Springer, 1991 (original edition: Interscience, 1948)

- 代表的な諸結果

◦ 単独保存則

[10] O.A.Oleinik. Discontinuous solutions of non-linear differential equations. *Uspekhi Mat.Nauk* **12** (1957), 3–73.

◦ Glimm の差分

[11] J.Glimm. Solution in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations. *Comm.Pure Appl.Math.* **18** (1965), 697–715.

[12] T.Nishida. Global solutions for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system. *Proc.Japan Acad.* **44** (1968), 642–646.

◦ 補完測度法

[13] L.Tartar. Compensated compactness and applications to partial differential equations. 136–211, *Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium*, Vol.4, ed. R.J.Knops, Research Notes in Mathematics 39, Pitman, London 1979.

[14] R.J.DiPerna. Convergence of approximate solutions to conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983), 27–70.

[15] R.J.DiPerna. Convergence of viscosity method for isentropic gas dynamics. *Comm. Math. Phys.* **91** (1983), 1–30.

◦ 波面追跡法

[16] R.J.DiPerna. Global existence of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *J. Differential Equations* **20** (1976), 187–212.

[17] A.Bressan. Global solutions of systems of conservation laws by wave-front tracking. *J. Math. Anal. Appl.* **170** (1992), 414–432.

[18] N.H.Risebro. A front-tracking alternative to the random choice method. *Proc.Amer.Math.Soc.* **117** (1993), 1125–1139.

◦ 動力学近似

[19] P.L.Lions, B.Perthame, and E.Tadmor. Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems. *Comm.Math.Phys.* **163** (1994), 415–431.

[20] P.L.Lions, B.Perthame, and P.E.Souganidis. Existence and stability of entropy solutions for the hyperbolic system of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates. *Comm.Pure Appl.Math.* **49** (1996), 599–638.

• 補完測度法のための参考資料

[21] L.C.Evans. Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations. CBMS regional conference ser. in Math. 74, AMS, 1990.

[22] G.-Q.Chen. The compensated compactness method and the system of isentropic gas dynamics. Math.Sci.Res.Institute 00527-91, Berkeley. 1990.

[23] K.N.Chueh, C.C.Conley and J.A.Smoller. Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. *Indiana Univ. Math. J.* **26**(1977), 373–392.

[24] G.-Q.Chen and Y.G.Lu. The study on application way of the compensated compactness theory. *Chinese Sci.Bull.* **34** (1989) 15–19.

[25] 竹野茂治, 気体の運動方程式の初期値境界値問題について, 新潟大学大学院修士論文, (1990), 1–65.

• 補完測度法に関する論文

◦ 気体のバロトロピックモデル

[26] X.Ding, G.-Q.Chen, and P.Luo. Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I)-(II). *Acta Mathematica Scientia* **5**(1985), 415-432, 433-472 (Chinese edition: **7**(1987), 467-481; **8**(1988), 61-94).

[27] G.-Q.Chen. Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (Ⅲ). *Acta Mathematica Scientia* **6**(1986), 75-120 (Chinese edition: **8**(1988), 101-134).

[28] X.Ding, G.-Q.Chen and P.Luo. A supplement to the papers 'Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (Ⅱ)-(Ⅲ)'. *Acta Mathematica Scientia* **9**(1989), 43-44.

[29] X.Ding, G.-Q.Chen and P.Luo. Convergence of the fractional step Lax-Friedrichs scheme and Godunov scheme for the isentropic system of gas dynamics. *Comm. Math. Phys.* **121**(1989), 63-84.

[30] T.Makino. Weak solutions to the compressible Euler equation with an asymptotic gamma-law. (2000), 1-42.

[31] G.-Q.Chen and P.G.LeFloch. Compressible Euler equations with general pressure law. *Arch.Rational Mech.Anal.* **153** (2000), 221–259.

○ L^p 補完測度法

[32] M.E.Schonbek. Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations. *Comm. Partial Differential Equations* **7** (1982), 959-1000.

[33] J.Shearer. Global existence and compactness in L^p for the quasi-linear wave equation. *Comm. Partial Differential Equations* **19**(1994), 1829-1877.

[34] P.Lin. Young measures and an application of compensated compactness to one-dimensional nonlinear elastodynamics. *Trans. Amer. Math. Soc.* **329** (1992), 377-413.

[35] M.Kružík. Explicit characterization of L^p-Young measures. *J. Math. Anal. Appl.* **198** (1996), 830-843.

[36] Y.Zhou. An L^p theorem for compensated compactness. *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **122A** (1992), 177-189.

[37] J.M.Ball. A version of the fundamental theorem for Young measures. Lecture Notes in Phys. **344**, (1989), 207–215

[38] N.Hungerbühler. A refinement of Ball's theorem on Young measures *New York J.Math.* **3** (1997), 48–53.

○ 緩和項を含む方程式

[39] G.-Q.Chen and T.P.Liu. Zero relaxation and dissipation limits for hyperbolic conservation laws. *Comm.Pure Appl.Math.* **46** (1993), 755–781.

[40] G.-Q.Chen, C.D.Levermore, and T.P.Liu. Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm.Pure Appl.Math.* **47** (1994), 787–830.

[41] P.Marcati and R.Natalini. Weak solutions to a hydrodynamic model for semiconductors and relaxation to the drift-diffusion equation. *Arch.Rational Mech.Anal.* **129** (1995), 129–145.

[42] C.Lattanzio and P.Marcati. The zero relaxation limit for the hydrodynamic Whitham traffic flow model. *J.Differential Equations* **141** (1997), 150–178.

[43] C.Lattanzio and P.Marcati. The zero relaxation limit for 2x2 hyperbolic systems. *Nonlinear Anal.* **38** (1999), 375–389.

○ その他

[44] C.-H.Hsu, S.-S.Lin, and T.Makino. On the relativistic Euler equation. (2000), 1-61.

[45] G.-Q.Chen and P.T.Kan Hyperbolic conservation laws with Umbilic degeneracy I. *Arch.Rational Mech.Anal.* **130** (1995), 231–276.

[46] P.D.Serre. La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations a une dimension d'espace. *J.Math.Pures Appl.* **65** (1986), 423–468.

[47] R.J.DiPerna. Compensated compactness and general systems of conservation laws *Trans.Amer.Math.Soc.* **292** (1985), 383–420.

[48] G.-Q.Chen and Y.G.Lu Convergence of the approximate solutions to isentropic gas dynamics. *Acta Mathematica Scientia* **10** (1990), 39–45.

[49] V.Roytburd and M.Slemrod. Positively invariant regions for a problem in phase transitions. *Arch.Rational Mech.Anal.* **93** (1986), 61–79.

[50] T.Makino and S.Takeno. Initial boundary value problem for the spherically symmetric motion of isentropic gas. *Japan J.Indust.Appl.Math.* **11** (1994), 171–183.

[51] G.-Q.Chen and J.Glimm. Global solutions to the compressible Euler equations with geometrical structure. *Comm.Math.Phys.* **180** (1996), 153–193.

○ Young 測度、補完測度法に関する本記事以外の他の話題など

[52] E.J.Balder. Consequences of denseness of Dirac Young measures. *J.Math.Anal.Appl.* **207** (1997), 536–540.

[53] S.Demoulini. Young measure solutions for nonlinear evolutionary system of mixed type. *Ann.Inst.H.Poincare* **14** (1997), 143–162.

[54] H.Bellout, F.Bloom, and J.Nečas. Young measure-valued solutions for non-Newtonian incompressible fluids. *Comm.Partial Differential Equations* **19** (1994) 1763–1803.

[55] G.Dolzmann, N.Hungerbühler, and S.Müller. Non-linear elliptic systems with measure-valued right hand side. *Math.Z.* **226** (1997), 545–574.

[56] D.Kinderlehrer and P.Pedregal. Characterizations of Young measures generated by gradients. *Arch.Rational Mech.Anal.* **115** (1991), 329–365.

[57] D.Kinderlehrer and P.Pedregal. Weak convergence of integrands and the Young measure representation. *SIAM J.Math.Anal.* **23** (1992), 1–19.

[58] J.Michel and R.Robert. Large deviations for Young measures and statistical mechanics of infinite dimensional dynamical systems with conservation law. *Comm.Math.Phys.* **159** (1994), 195–215.

[59] P.Pedregal. Nonlocal variational principles. *Nonlinear Anal.* **29** (1997), 1379–1392.

[60] P.Pedregal. Parametrized measures and variational principles. Birkhauser, 1997.

[61] B.Dacorogna. Weak continuity and weak lower semicontinuity of Non-linear functionals. Lecture Note in Math. 922, Springer, 1982.

[62] M.Sychev. Young measure approach to characterization of behaviour of integral functionals on weakly convergent sequences by means of their integrands. *Ann.Inst.H.Poincare* **15** (1998), 755–782.

[63] A.Szepessy. An existence result for scalar conservation laws using measure valued solutions. *Comm.Partial Differential Equations* **14** (1989), 1329–1350.

[64] F.Theil. Young-measure solutions for a viscoelastically damped wave equation with nonmonotone stress-strain relation. *Arch.Rational Mech.Anal.* **144** (1998), 47–78.

• WWW

[65] conservation law に関して
`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/conser.html`

[66] compensated compactness に関する文献
`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/bib/bib.html`

[67] Conservation Laws Preprint Server (Norway)
`http://www.math.ntnu.no/conservation/`

[68] Compactness Methods and Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws
`http://www.math.nwu.edu/~gqchen/preprints/cpmthd/`