気体の運動方程式の初期値境界値問題について

新潟大学大学院理学研究科

数学専攻　数学解析学講座

理大63-1　　竹野茂治

目次

§0 序

本論文では理想気体の一次元での断熱変化の方程式：

(0.1) $$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

(0.2) $$(\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0$$

$\left(\begin{array}{l} \rho \geqq 0 : 気体密度、u: 気体速度、P(\rho) = \frac{1}{\gamma}\rho^\gamma : 圧力 \\ 1 < \gamma \leqq \frac{5}{3} : 断熱指数 又は比熱比 \end{array} \right)$、

又は、 $m = \rho u$ ：運動量 による方程式：

(0.3) $$\rho_t + m_x = 0$$

(0.4) $$m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right)_x = 0$$

の、(a) $\{(x,t) ; t>0, x > x(t)\}$、及び (b) $\{(x,t) ; t>0, x_1(t) < x < x_2(t)\}$ における初期値境界値問題を扱う。その初期条件、境界条件は

(a) では

(0.5)
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x,0) = \rho_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad (x>0) \\ x(t) := \int_0^t u_1(s)\,ds \quad に対して \\ \qquad \rho(x(t),t) > 0 \ ならば \ u(x(t),t) = u_1(t) \quad (t>0) \\ (\ 0 \leqq \rho_0(x) \leqq C,\ |u_0(x)| \leqq C,\ C_1 \leqq u_1(t) \leqq C_2\ ) \end{array} \right.$$、

(b) では

(0.6)
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x,0) = \rho_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x) \quad (0<x<L) \\ x_1(t) := \int_0^t u_1(s)\,ds, \quad x_2(t) := \int_0^t u_2(s)\,ds + L \quad に対して \\ \qquad \rho(x_j(t),t) > 0 \ ならば \ u(x_j(t),t) = u_j(t)\ (j=1,2) \quad (t>0) \\ (\ 0 \leqq \rho_0(x) \leqq C,\ |u_0(x)| \leqq C,\ C_1 \leqq u_1(t) \leqq C_2 \leqq u_2(t) \leqq C_3\ ) \end{array} \right.$$

とする。(0.5)の((0.6)の)境界条件は速度 $u_1(t)$ ($u_1(t), u_2(t)$) で動くピストン $x = x(t)$ ($x = x_1(t), x = x_2(t)$) に対し気体が相対運動を起こさないことを意味する。その壁の上での ρ の値は方程式から決まってくる。

(0.1)、(0.3)は質量保存則、(0.2)、(0.4)は運動量保存則を表わし、よってこれらは双曲型保存則 (hyperbolic conservation law) とも呼ばれる。

一般の双曲型保存則：

$$U_t + f(U)_x = U_t + \nabla f(U) U_x = 0 \qquad (t>0,\ x \in R_x)$$

（$\nabla f(U)$の固有値はすべて異なる実数値）

については P.D. Lax（1957[12]）によっていわゆるRiemann問題が解かれ、単独方程式の場合に O.A. Oleinik（1957[19]）が一般の初期値問題の解の存在と一意性を Lax-Friedrichs の差分を用いて与え、一般の方程式系の場合にはいわゆる genuinely nonlinear の場合に J. Glimm（1965[11]）が 定数に非常に近い初期値の初期値問題の解の存在を random choice method による差分を用いて与えた。いずれも解の存在は差分解の全変動の compact性の評価と Hellyの選出定理による部分列の収束によって示された。その後西田（1968[16]）、西田-Smoller（1973[17]）、R.J. DiPerna（1973[5]）、T.P. Liu（1977[13]）らによって Lagrange座標において気体の運動方程式の初期値問題 が Glimm の方法で解かれた。

初期値境界値問題も これにともない、西田（1968[16]）、西田-Smoller（1977[18]）、T.P. Liu（1977[14]、1978[15]）らによって Lagrange座標において Glimmの方法で解かれてきた。 これらの、初期値 についての条件 は

(0.7) $(\gamma-1)\times$(初期値の全変動) が 十分小さい

というもので、よって $\gamma=1$，すなわち等温変化では 初期値は有界 なる条件 のみで よいことが示された。

R.J. DiPerna（1983[6][7]）は、L. Tartar や Murat による compensated compactness（c.f. Tartar 1979[22]）の方法を用いて気体の方程式の初期値問題を解いた。[7] では Euler座標系における 方程式系 (0.1)(0.2) の

(0.8) $$\gamma = \frac{2}{2\tau+1} + 1 = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \cdots \quad (\tau \geq 1 : \text{自然数})$$

の場合を扱っており、(0.7) によらない 一般の 有界なる初期値に対する解答を与えた。 それは Lax-Friedrichs の差分 及び Godunov の差分の一様有界性、つまり 弱 compact性 と Young measure によるものであった。 X. Ding、G. Chen、P. Luo（1985[2][3]、1986[1]、1989[4]）は、精密 な計算により、その結果を、(0.8) にかわり、一般の

$$1 < \gamma \leq \frac{5}{3}$$

にまでひろげた。（より詳しい歴史的経過については J. Smoller[21]、 R.J. DiPerna [6][7]、X. Dingら[2]を参照のこと。)

本論文ではそれを初期値境界値問題に応用し、(0.7)によらない、一般の有界な初期値の場合に解の存在を示した。その証明、計算等は大部分 R.J. DiPerna [6][7]、X. Dingら[2][3]によっている。ただし γ は (0.8) の場合のみであり、境界条件も (0.5)、及び (0.6) の考察にとどまった。これらの一般化が今後の課題であろう。

得られた結果は次のように述べられる。

Theorem

初期値境界値問題 (0.3)(0.4)(0.5) 及び (0.3)(0.4)(0.6) は (0.8) のもと有界、可測でエントロピー条件を満足する弱解 $(\rho(x,t), m(x,t))$ $(\rho(x,t) \geq 0)$ をすべての $t>0$ でもち、$\rho = 0$ のところでは a.e. $m = 0$ で、

$\dfrac{m(x,t)}{\rho(x,t)}$ は $\rho(x,t) > 0$ なるところで有界 (a.e.) ┘

ここで $(\rho(x,t), m(x,t))$ が (0.3)(0.4)(0.5) の弱解であるとは、

$$\iint_{D_1} (\rho \phi_t + m \phi_x)\, dx\, dt + \int_{I_1} \rho_0(x) \phi(x,0)\, dx = 0$$

$$\iint_{D_1} \left\{ m \psi_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right) \psi_x \right\} dx\, dt + \int_{I_1} m_0(x) \psi(x,0)\, dx = 0$$

$(D_1 := \{(x,t) ;\ t \geq 0,\ x \geq x(t)\},\ I_1 = \{x ;\ x > 0\},\ m_0(x) = \rho_0(x) u_0(x))$

を、任意の $\phi \in C_0^1$、及びすべての $t>0$ に対し $\psi(x(t), t) = 0$ となる任意の $\psi \in C_0^1$ に対して満たすものとして定義される。

(0.3)(0.4)(0.6) の場合は D_1, I_1 及び ψ に関する条件を

$D_2 := \{(x,t) ;\ t \geq 0,\ x_1(t) \leq x \leq x_2(t)\}$, $I_2 = \{x ;\ 0 < x < L\}$

及び　すべての $t>0$ に対し $\psi(x_1(t), t) = \psi(x_2(t), t) = 0$

にかえたものになる。

証明の方法、及び本論文の各セクションの役割はおよそ次の通りである。まず通常の Riemann 問題と壁での Riemann 問題の解によって Godunov 型の差分近似解 $U^\Delta(x,t)$ を構成し、それに一様有界評価を与える。それにより ある部分列 $U^{\Delta'}$ と ある probability measure の族 (Young measure と呼ばれる)

$\{\nu_{(x,t)}\} = \{\nu_{(x,t)}(U)\}_{(x,t)}$ が存在して

$$U^{\Delta}(x,t) \longrightarrow \int U \nu_{(x,t)}(dU) \qquad L^{\infty}\ \text{weak}^*$$

がいえる。そして weak (generalized) entropy pair の組 (η, q), (η', q') に対し

$$\nu \circ B = B \circ \nu \qquad B = B(\eta, q, \eta', q') = \eta q' - \eta' q$$

がいえることから、様々な weak entropy をとることによって

$$\nu_{(x,t)}\Big|_{\{\rho>0\}} = \delta_{\overline{U}(x,t)} \quad \text{or} \quad 0 \qquad \delta : \text{Dirac の } \delta \text{ 函数}$$

であることがいえ、よって U^{Δ} の部分列をとって

$$U^{\Delta''} \longrightarrow \overline{U} \qquad a.e$$

とすることができる。 この $\overline{U}$ が解となる。(上の、0 の場合は $\overline{U} := 0$ とする)

§1 では 問題の定式化と Riemann 問題の解の構成、

§2 では 差分近似解の構成とその一様有界評価、

§3 では 本論文で使われるいくつかの定理の提示、

§4 では weak entropy を与える Darboux の公式とそれによる様々な weak entropy の導出とその評価の計算、

§5 では $\nu_{(x,t)}$ の形状を決定するのに用いられる $B = \eta q' - \eta' q$ の評価の計算、

§6 では $\nu \circ B = B \circ \nu$ の証明に用いられる、

$$\eta(U^{\Delta})_t + q(U^{\Delta})_x \in (H^{-1}_{loc}(\Omega) \text{ のある compact set})$$

の証明、

§7 では ν の形状の決定と解の存在の証明、

§8 では 得られた解が entropy condition を満たすことの check

となっている。

§1 準備

Euler座標系における気体の方程式：

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0 \end{cases} \qquad P(\rho) = \frac{1}{\gamma}\rho^\gamma$$

($\rho \geq 0$：気体密度　u：速度　P：圧力，$1<\gamma<3$)

又は

$$m = \rho u \ ; \ 運動量$$

を用いた方程式：

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \rho_t + m_x = 0 \\ m_t + \left\{ \frac{m^2}{\rho} + P(\rho) \right\}_x = 0 \end{cases}$$

の、(a) $\{(x,t) ;\ t>0,\ x> x(t)\}$ 及び (b) $\{(x,t) ;\ t>0,\ x_1(t)<x<x_2(t)\}$ における初期値境界値問題を考える。その初期条件，境界条件は

(a) では

$$(1.2) \qquad \begin{cases} (\rho(x,0),\ u(x,0)) = (\rho_0(x),\ u_0(x)) \qquad (x>0) \\ x(t) := \int_0^t u_1 \quad に対し \\ \rho(x(t),t)>0 \ ならば \ u(x(t),t) = u_1(t) \quad (t>0), \end{cases}$$

(b) では

$$(1.3) \qquad \begin{cases} (\rho(x,0),\ u(x,0)) = (\rho_0(x),\ u_0(x)) \qquad (0<x<L) \\ x_1(t) := \int_0^t u_1, \quad x_2(t) := \int_0^t u_2 + L \quad に対し \\ \rho(x_j(t),t)>0 \ ならば \ u(x_j(t),t) = u_j(t) \quad (t>0)(j=1,2) \end{cases}$$

とする。$\rho_0(x)$, $u_0(x)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ は bounded measurable であるとする。

(1.1) は

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}, \qquad F(U) = \begin{pmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + P(\rho) \end{pmatrix}$$

を用いて system の形に書けば、

$$(1.4)\quad \begin{cases} U_t + F(U)_x = U_t + \nabla F(U)\cdot U_x = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \left(\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial\rho}, \dfrac{\partial}{\partial m}\right) \right) \\ \nabla F(U) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{m^2}{\rho^2} + P'(\rho) & 2\dfrac{m}{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + \rho^{\gamma-1} & 2u \end{pmatrix} \end{cases}$$

であり　∇F の固有値　$\lambda_1 \leq \lambda_2$ は

$$(1.5)\quad \begin{cases} \lambda_1 = u - \sqrt{P'} = u - \rho^\theta = \dfrac{m}{\rho} - \rho^\theta \\ \lambda_2 = u + \sqrt{P'} = u + \rho^\theta = \dfrac{m}{\rho} + \rho^\theta \\ \left(\theta = \dfrac{\gamma-1}{2}, \quad 0 < \theta < 1 \right) \end{cases}$$

となる。このとき

$$(1.6)\quad \begin{cases} w := u + \displaystyle\int^\rho \frac{\sqrt{P'(y)}}{y}dy = u + \frac{1}{\theta}\rho^\theta \\ z := u - \displaystyle\int^\rho \frac{\sqrt{P'(y)}}{y}dy = u - \frac{1}{\theta}\rho^\theta \end{cases}$$

によって、1-Riemann不変量（Riemann invariant）w、
　　2-Riemann不変量 z が定義され、

$$\begin{cases} R_1(U_l) : u = r_1(\rho : U_l) := u_l - \displaystyle\int_{\rho_l}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(y)}}{y}dy \\ \qquad\qquad = u_l - \dfrac{1}{\theta}(\rho^\theta - \rho_l^\theta) \quad (\rho \leq \rho_l) \\ R_2(U_l) : u = r_2(\rho : U_l) := u_l + \displaystyle\int_{\rho_l}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(y)}}{y}dy \\ \qquad\qquad = u_l + \dfrac{1}{\theta}(\rho^\theta - \rho_l^\theta) \quad (\rho \geq \rho_l) \end{cases}$$

によって　1－膨張波曲線（rarefaction wave curve）$R_1(U_l)$、
　　2－膨張波曲線　$R_2(U_l)$ が、

$$\begin{cases} S_1(U_\ell) : u = s_1(\rho ; U_\ell) := u_\ell - \sqrt{\dfrac{(\rho-\rho_\ell)(P(\rho)-P(\rho_\ell))}{\rho\rho_\ell}} & (\rho \geq \rho_\ell) \\ S_2(U_\ell) : u = s_2(\rho ; U_\ell) := u_\ell - \sqrt{\dfrac{(\rho-\rho_\ell)(P(\rho)-P(\rho_\ell))}{\rho\rho_\ell}} & (\rho \leq \rho_\ell) \end{cases}$$

によって、1-衝撃波曲線 (shock wave curve) $S_1(U_\ell)$、
2-衝撃波曲線 $S_2(U_\ell)$ が定義される。

これらの curve は 図1.1 のようなグラフで表わされ、R_1 と S_1, R_2 と S_2 は U_ℓ で 2階導関数まで連続につながる。(Lax[12], Smoller[21] 参照。)

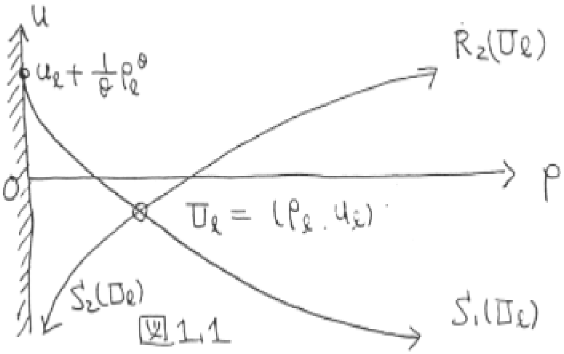


図1.1

これらは (ρ, u) のかわりに (ρ, m) でも (w, z) でも考えることができ、(ρ, m) では

$$\begin{cases} R_1(U_\ell) : m = m_\ell + \dfrac{\rho-\rho_\ell}{\rho_\ell} m_\ell - \rho\,\dfrac{\rho^\theta-\rho_\ell^\theta}{\theta} & (\rho \leq \rho_\ell) \\ R_2(U_\ell) : m = m_\ell + \dfrac{\rho-\rho_\ell}{\rho_\ell} m_\ell + \rho\,\dfrac{\rho^\theta-\rho_\ell^\theta}{\theta} & (\rho \geq \rho_\ell) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1(U_\ell) : m = m_\ell + \dfrac{\rho-\rho_\ell}{\rho_\ell} m_\ell - \sqrt{\dfrac{\rho(\rho-\rho_\ell)(\rho^\gamma-\rho_\ell^\gamma)}{\gamma\rho_\ell}} & (\rho \geq \rho_\ell) \\ S_2(U_\ell) : m = m_\ell + \dfrac{\rho-\rho_\ell}{\rho_\ell} m_\ell - \sqrt{\dfrac{\rho(\rho-\rho_\ell)(\rho^\gamma-\rho_\ell^\gamma)}{\gamma\rho_\ell}} & (\rho \leq \rho_\ell) \end{cases}$$

(w, z) では

$$\begin{cases} R_1(U_\ell) : w = w_\ell & (z \geq z_\ell) \\ R_2(U_\ell) : z = z_\ell & (w \leq w_\ell) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1(U_\ell) \left[\begin{array}{l} w - w_\ell = \dfrac{\rho_\ell^\theta}{\sqrt{\gamma}} \left\{ -\sqrt{\dfrac{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{\alpha}} + \dfrac{\alpha^\theta-1}{\theta}\sqrt{\gamma} \right\} \\ z - z_\ell = \dfrac{\rho_\ell^\theta}{\sqrt{\gamma}} \left\{ -\sqrt{\dfrac{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{\alpha}} - \dfrac{\alpha^\theta-1}{\theta}\sqrt{\gamma} \right\} \end{array} \right. & (\alpha \geq 1) \\ S_2(U_\ell) \left[\; w - w_\ell = \dfrac{\rho_\ell^\theta}{\sqrt{\gamma}} \left\{ -\sqrt{\dfrac{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{\alpha}} - \dfrac{1-\alpha^\theta}{\theta}\sqrt{\gamma} \right\} \right. \end{cases}$$

$$
\left\{ S_2(U_\ell) \quad \left[z - z_\ell = \frac{\rho_\ell^\theta}{\sqrt{\gamma}} \left\{ -\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{\alpha}} + \frac{1-\alpha^\theta}{\theta}\sqrt{\gamma} \right\} \quad (0 < \alpha \leq 1) \right. \right.
$$

と、shock curveの方はパラメーター表示され、そのグラフはそれぞれ図1.2, 1.3のようになる。

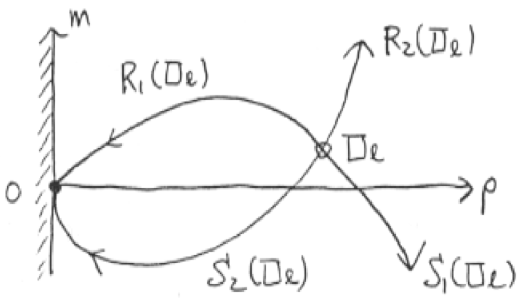


図1.2

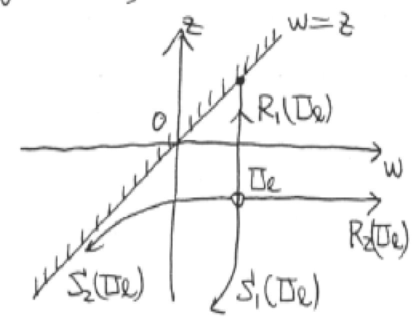


図1.3

そしてこれらのcurveによっていわゆるRiemann問題(Riemann problem)がとかれる。

<u>Theorem 1.1</u> (Lax [12], Smoller [21])

「方程式(1.4)のRiemann problem、すなわち初期値:

$$
(1.7) \qquad U(x,0) = U_0(x) := \begin{cases} U_\ell & (x<0) \\ U_r & (x>0) \end{cases} \qquad (U_\ell, U_r : \text{constants})
$$

に関する初期値問題は、区分的に連続な弱解(weak solution)、すなわち

$$
\iint_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ t>0}} \{ U(x,t)\phi_t(x,t) + F(U(x,t))\phi_x(x,t) \} dx dt + \int_{\mathbb{R}_x} U_0(x)\phi(x,0)dx = 0
$$

(任意の $\phi \in C_0^1 = C_0^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t)$ に対し)

を満たし、

$$
(1.8) \qquad \begin{cases} w(U) \leq \max\{w(U_\ell), w(U_r)\} \\ z(U) \geq \min\{z(U_\ell), z(U_r)\} \end{cases}
$$

を満たすものを持つ。」

このThmで述べる解は次の通り。(w,z)で考える。$\{w \geq z\}$を図1.4のようにI〜Vの領域に分け、U_rがそのいずれに属するかで場合分けを行なう。いずれも

$$
\bar{U} \in R_1(U_\ell) \cup S_1(U_\ell), \quad U_r \in R_2(\bar{U}) \cup S_2(\bar{U})
$$

なる $\bar{U}$ をまずとる。

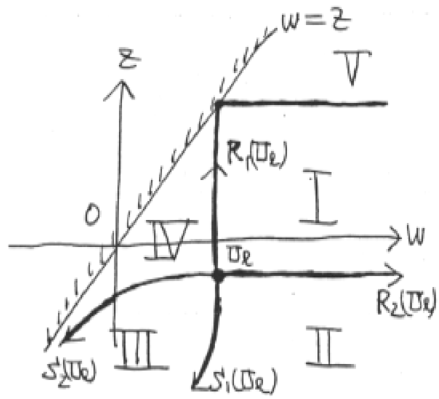


図1.4

(i) I $\ni U_r$

このときは $\bar{U} \in R_1(U_\ell)$, $U_r \in R_2(\bar{U})$ ととれる(図1.5)。この場合のweak solutionは

$$
\begin{cases}
x < \lambda_1(U_l)t \text{ では} & U \equiv U_l \\
\lambda_1(U_l)t \leqq x < \lambda_1(\bar{U})t \text{ では} & \\
\quad \begin{cases} \lambda_1(U(x,t)) = \dfrac{x}{t} \\ u = r_1(\rho : U_l) \end{cases} & \\
\lambda_1(\bar{U})t \leqq x < \lambda_2(\bar{U})t \text{ では} & U \equiv \bar{U} \\
\lambda_2(\bar{U})t \leqq x < \lambda_2(U_r)t \text{ では} & \\
\quad \begin{cases} \lambda_2(U(x,t)) = \dfrac{x}{t} \\ u = r_2(\rho : \bar{U}) \end{cases} & \\
\lambda_2(U_r)t < x \text{ では} & U \equiv U_r
\end{cases}
$$

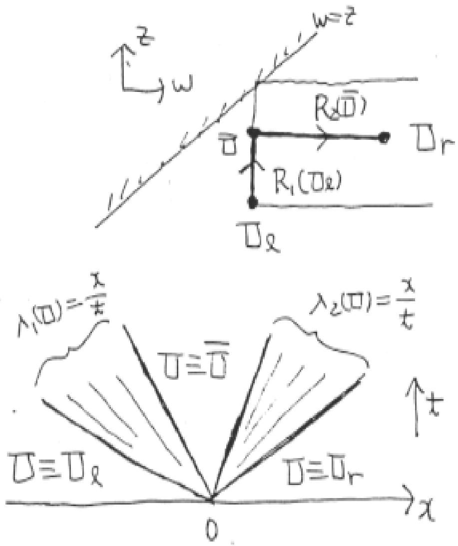


図1.5

によって得られる（図1.5）。なおこれは $\xi = \dfrac{x}{t}$ の増加につれてみていくと

U は，ξ が $-\infty \sim \lambda_1(U_l)$ では U_l にあり，

$\lambda_1(U_l) \sim \lambda_1(\bar{U})$ では $R_1(U_l)$ に沿って U_l から $\bar{U}$ へ動き，

$\lambda_1(\bar{U}) \sim \lambda_2(\bar{U})$ では $\bar{U}$ にあり，

$\lambda_2(\bar{U}) \sim \lambda_2(U_r)$ では $R_2(\bar{U})$ に沿って $\bar{U}$ から U_r へ動き，

$\lambda_2(U_r) \sim \infty$ では U_r

へと変化する（図1.5）。

(ii) $\mathrm{II} \ni U_r$

このときは $\bar{U} \in S_1(U_l)$，$U_r \in R_2(\bar{U})$ ととれ（図1.6），

$$
\begin{cases}
x < \sigma t \text{ では} & U \equiv U_l \\
\sigma t < x < \lambda_2(\bar{U})t \text{ では} & U \equiv \bar{U} \\
\lambda_2(\bar{U})t \leqq x < \lambda_2(U_r)t \text{ では} & \\
\quad \begin{cases} \lambda_2(U(x,t)) = \dfrac{x}{t} \\ u = r_2(\rho : \bar{U}) \end{cases} & \\
\lambda_2(U_r)t \leqq x \text{ では．} & U \equiv U_r
\end{cases}
$$

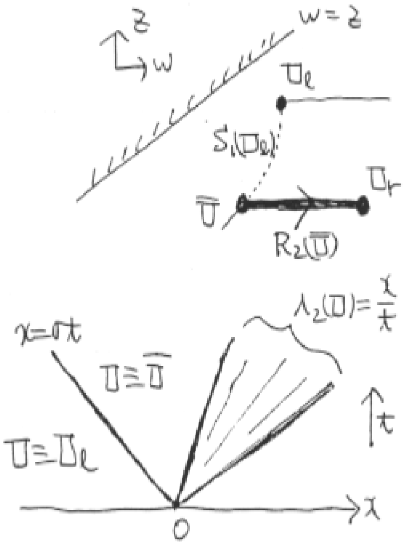


図1.6

によって得られる（図1.6）。ここで σ はランキン－ユゴニオ条件：
(Rankine − Hugoniot condition):

$$\sigma[U] = [F(U)]$$

$\Big($ [ ] はそこでの値のとび，すなわち
$[U] = \bar{U} - U_l, \quad [F(U)] = F(\bar{U}) - F(U_l)$ $\Big)$

で与えられる。

(iii) $\text{III} \ni U_r$

このときは $\bar{U} \in S_1(U_l)$，$U_r \in S_2(\bar{U})$ とでき（図1.7），

$$\begin{cases} x < \sigma_1 t \text{ では} & U \equiv U_l \\ \sigma_1 t < x < \sigma_2 t \text{ では} & U \equiv \bar{U} \\ \sigma_2 t < x \text{ では} & U \equiv U_r \end{cases}$$

によって得られる（図1.7）。

$$\begin{cases} \sigma_1 [U] = [F(U)] & \big([\ ] = (\bar{U}\text{での値}) - (U_l\text{での値})\big) \\ \sigma_2 [U] = [F(U)] & \big([\ ] = (U_r\text{での値}) - (\bar{U}\text{での値})\big) \end{cases}$$

で与えられる。

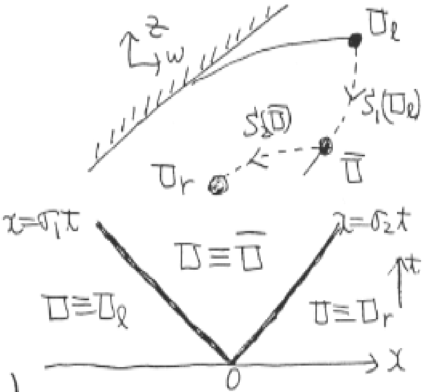


図1.7

(iv) $\text{IV} \ni U_r$

このときは $\bar{U} \in R_1(U_l)$，$U_r \in S_2(\bar{U})$ とでき（図1.8），

$$\begin{cases} x < \lambda_1(U_l) t \text{ では} & U \equiv U_l \\ \lambda_1(U_l) t \leqq x < \lambda_1(\bar{U}) t \text{ では} & \\ \quad \begin{cases} \lambda_1(U(x,t)) = \dfrac{x}{t} \\ u = r_1(\rho : U_l) \end{cases} & \\ \lambda_1(\bar{U}) t \leqq x < \sigma t \text{ では} & U \equiv \bar{U} \\ \sigma t < x \text{ では} & U \equiv U_r \end{cases}$$

によって得られる（図1.8）。 σ は R-H condition：

$$\sigma [U] = [F(U)]$$

で与えられる。

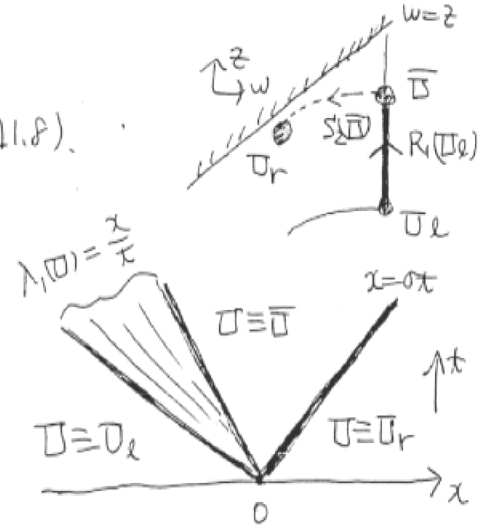


図1.8

(v) $\text{V} \ni U_r$

このときは今までのようにはいかない。まず

$U_1 \in R_1(U_l) \cap \{\rho = 0\}$

$U_2 \in \{\rho = 0\}$，　$U_r \in R_2(U_2)$

なる U_1, U_2 をとる（図1.9）。

このとき解は

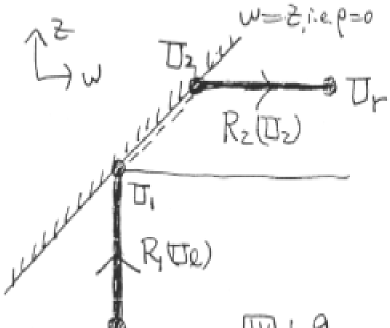


図1.9

$$
\begin{cases}
x < \lambda_1(U_l)t \text{ では} & U \equiv U_l \\
\lambda_1(U_l)t \leqq x \leqq \lambda_1(U_1)t \text{ では} & \\
\quad \begin{cases} \lambda_1(U(x,t)) = \dfrac{x}{t} \\ u = r_1(\rho : U_l) \end{cases} & \\
\lambda_1(U_1)t < x < \lambda_2(U_2)t \text{ では} & \\
\quad \begin{cases} \rho = 0 \\ u : \text{undefined} \end{cases} & \\
\lambda_2(U_2)t < x < \lambda_2(U_r)t \text{ では} & \\
\quad \begin{cases} \lambda_2(U(x,t)) = \dfrac{x}{t} \\ u = r_2(\rho : U_2) \end{cases} & \\
\lambda_2(U_r)t \leqq x \text{ では} & U \equiv U_r
\end{cases}
$$

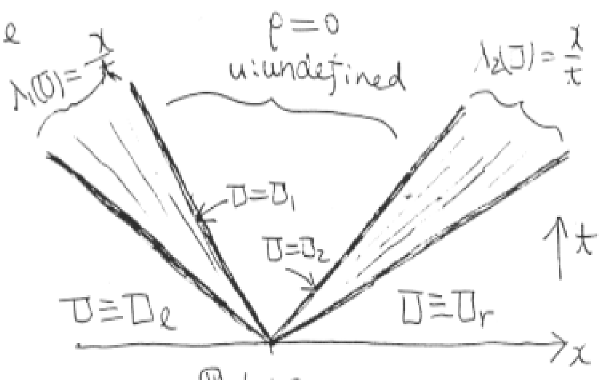


図1.10

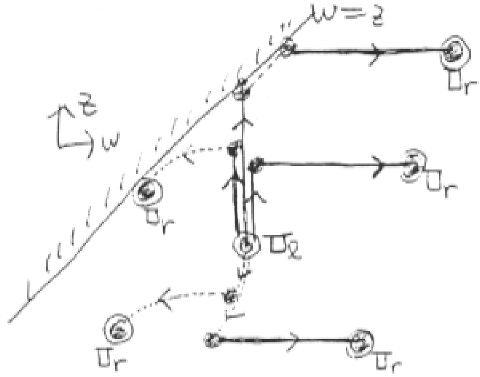


図1.11

によって得られる（図1.9，1.10）。ここで $\rho=0$ のところでは u は任意の値で weak solution になるが，有界性のため，U が U_1 と U_2 の間になるようにとることにする（図1.9）。u はここでは一意には決まらないがそこで $m = \rho u = 0$ より (ρ, m) に関しては unique に決定している。

(1.8) も 図1.11 から明らかに満たされる。

以上で初期値問題の Riemann problem が解かれたわけだが，境界値問題のために，壁での Riemann problem も今と同様に解く。

まず初期値境界値問題 (1.1),(1.2)，及び (1.1),(1.3) の weak solution を定義する。

$(\rho(x,t), m(x,t))$: bounded measurable ($\rho \geqq 0$) な函数が

(i) (1.1)(1.2) の weak solution であるとは，($t>0$ $x > x(t)$)

$$
(1.9)\quad
\begin{cases}
\displaystyle\iint_{D_1} (\rho \phi_t + m \phi_x)\, dx\, dt + \int_0^\infty \rho_0(x)\, \phi(x,0)\, dx = 0 \\
\displaystyle\iint_{D_1} \left\{ m \psi_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right) \psi_x \right\} dx\, dt + \int_0^\infty m_0(x)\, \psi(x,0)\, dx = 0
\end{cases}
$$

を、任意の $\phi \in C_0^1$ ，及び

すべての $t>0$ に対して $\psi(x(t),t)=0$ なる任意の $\psi \in C_0^1$

に対し満たすこと。ここで $m_0(x)$, D_1 は

$$\begin{cases} m_0(x) = \rho_0(x)\, u_0(x) \\ D_1 = \{(x,t) ;\ t \geqq 0,\ x \geqq x(t)\} \end{cases}$$

である(図1.12)。

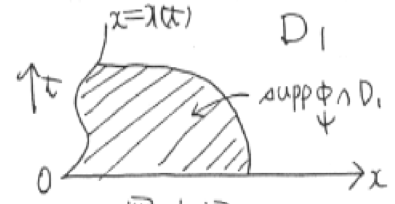


図1.12

(ii) (1.1)(1.3)の weak solution であるとは $(t>0,\ x_1(t)<x<x_2(t))$

$$(1.10)\quad \begin{cases} \displaystyle\iint_{D_2} (\rho\phi_t + m\phi_x)\,dx\,dt + \int_0^L \rho_0(x)\,\phi(x,0)\,dx = 0 \\ \displaystyle\iint_{D_2} \left\{ m\psi_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + P(\rho)\right)\psi_x \right\} dx\,dt + \int_0^L m_0(x)\,\psi(x,0)\,dx = 0 \end{cases}$$

を、任意の $\phi \in C_0^1$ ，及び

すべての $t>0$ に対して $\psi(x_1(t),t)=\psi(x_2(t),t)=0$ なる任意の $\psi \in C_0^1$

に対し満たすこと。ここで D_2 は

$$D_2 = \{(x,t) ;\ t \geqq 0,\ x_1(t) \leqq x \leqq x_2(t)\}$$

である(図1.13)。m_0 は(i)と同様。

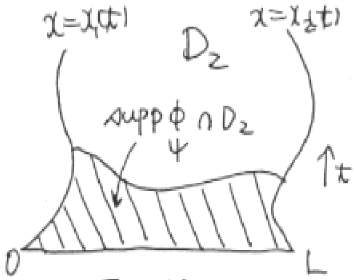


図1.13

これらは smooth solution の拡張である。

ρ, m が smooth solution で、$\rho=0$ では $m=0$ で

$\dfrac{m}{\rho}$ が bounded であるときには、部分積分によって(1.9)又は(1.10)を

得るし、逆に ρ, m が weak solution で、$\rho=0$ では $m=0$ で

$\dfrac{m}{\rho}$ が bounded である smooth な函数のときは、発散定理(divergence theorem)

を使って、ϕ, ψ の任意性から(1.1)(1.2)又は(1.1)(1.3)を得る。

前の4つの波 R_1, R_2, S_1, S_2 と

粒子の動き、すなわち

$\dot{x} = u(x,t)$ ('・' は微分を表わす。)

に従う (x,t) との関係は図1.14のようになり、

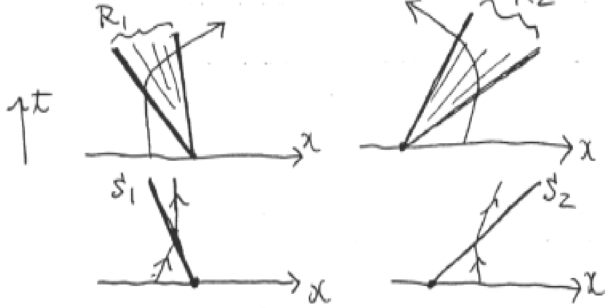


図1.14

(矢印が粒子の動き)、よって定速で動く壁とのRiemann problemを考えるとき、thm 1.1のような解をつくるときには一方のwaveのみからなる解をつくることを考える(図1.15)。

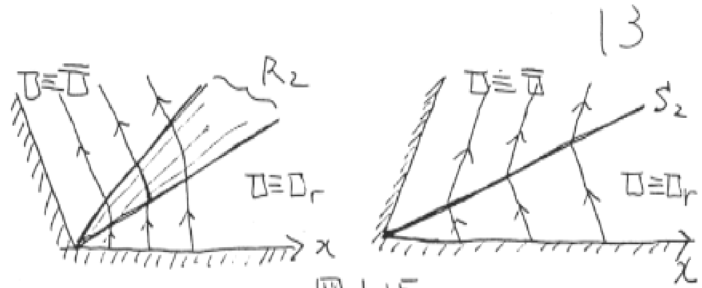


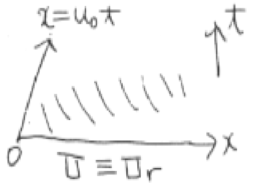
図1.15

<u>Proposition 1.2</u>

(1.4)の壁でのRiemann problem,すなわち

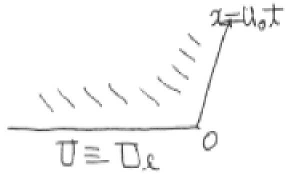
(I) $t>0$, $x > u_0 t$ (u_0 : constant)

$$\begin{cases} U(x,0) \equiv U_r & (x>0)\ (U_r : \text{constant}) \\ \rho(u_0 t, t) > 0 \text{ ならば } u(x_0 t, t) = u_0 & (t>0) \end{cases}$$



(II) $t>0$ $x < u_0 t$

$$\begin{cases} U(x,0) \equiv U_l & (x<0)\ (U_l : \text{const.}) \\ \rho(u_0 t, t) > 0 \text{ ならば } u(x_0 t, t) = u_0 & (t>0) \end{cases}$$



は、区分的に連続で

$$(1.11) \quad \begin{cases} (\text{I}) \begin{cases} w(U) \leq \max\{w(U_r),\ 2u_0 - z(U_r)\} \\ z(U) \geq \min\{z(U_r),\ z(U_0)\} \end{cases} \\ (\text{II}) \begin{cases} w(U) \leq \max\{w(U_l),\ w(U_0)\} \\ z(U) \geq \min\{z(U_l),\ 2u_0 - w(U_l)\} \end{cases} \end{cases}$$

を満たすweak solution $U(x,t)$ をもつ。ここで U_0 は $\rho=0,\ u=u_0$ の点とする。」

上で述べたように

(I) $\bar{U} \in \{u=u_0\}$, $R_2(\bar{U}) \cup S_2(\bar{U}) \ni U_r$

(II) $R_1(U_l) \cup S_1(U_l)$ と $u=u_0$ との交点 $\bar{U}$

なる $\bar{U}$ を waveと壁との間におけばよい(図1.15)。

以下でその解をみる。

(I) 図1.16のように場合分けをし、U_r がそのいずれに属するかで場合分けする。

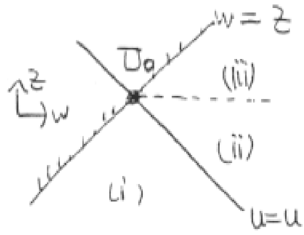


図1.16

(i)

この場合は $S_2(\bar{U}) \ni U_r$, $\bar{U} \in \{u=u_0\}$ なる $\bar{U}$ がとれ (図1.17)

(確かにとれることは $s_2(\rho; \bar{U})$ を調べれば容易にわかる。)

$$\begin{cases} u_0 t < x < \sigma t \ \text{では} & U \equiv \bar{U} \\ \sigma t < x \ \text{では} & U \equiv U_r \end{cases}$$

として解が得られる(図1.17)。σはR-H condition;

$$\sigma[U] = [F(U)]$$

から得られる。

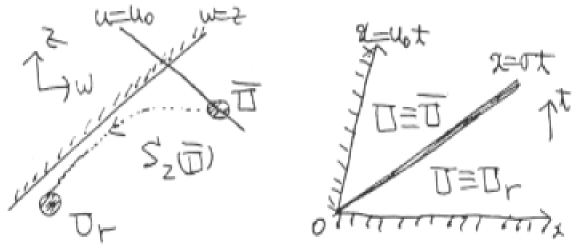


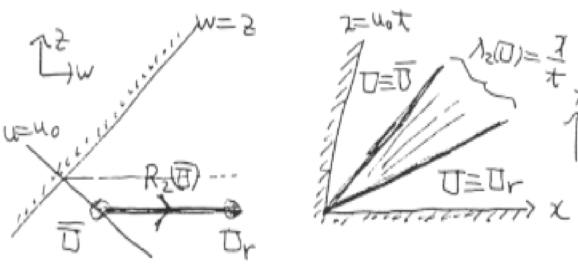
図1.17

(ii)

この場合は $R_2(\bar{U}) \ni U_r$, $\bar{U} \in \{u = u_0\}$ なる $\bar{U}$ がとれ(図1.18)

$$\begin{cases} u_0 t < x < \lambda_2(\bar{U}) t \ \text{では} \ U \equiv \bar{U} \\ \lambda_2(\bar{U}) t \leqq x < \lambda_2(U_r) t \ \text{では} \\ \quad \begin{cases} \lambda_2(U(x,t)) = \dfrac{x}{t} \\ u = r_2(\rho ; \bar{U}) \end{cases} \\ \lambda_2(U_r) t \leqq x \ \text{では} \quad U \equiv U_r \end{cases}$$

から解が得られる(図1.18)。



(iii)

この場合は今までのような $\bar{U}$ はとれないが

$$R_2(U_1) \ni U_r, \quad U_1 \in \{\rho = 0\}$$

なる U_1 をとれば(図1.19).

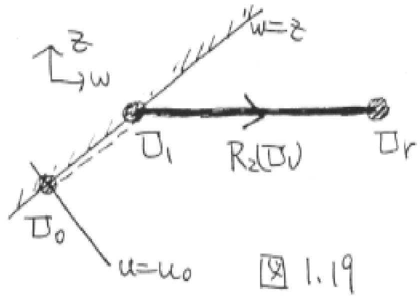


図1.19

$$\begin{cases} u_0 t < x < \lambda_2(U_1) t \ \text{では} \\ \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ u : \text{undefined} \end{cases} \\ \lambda_2(U_1) t \leqq x < \lambda_2(U_r) t \ \text{では} \\ \quad \begin{cases} \lambda_2(U(x,t)) = \dfrac{x}{t} \\ u = r_2(\rho, U_1) \end{cases} \\ \lambda_2(U_r) t \leqq x \ \text{では} \quad U \equiv U_r \end{cases}$$

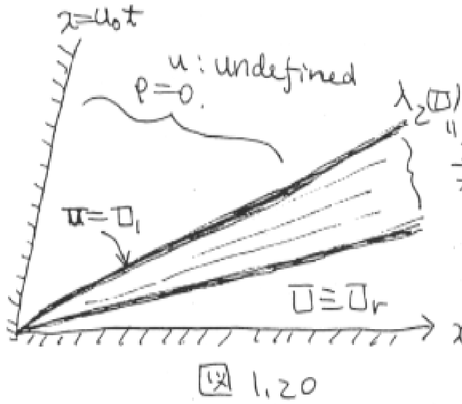
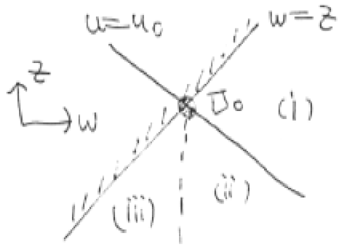


図1.20

から解が得られる(図1.20)。 $\rho = 0$ のところでは u は任意の値でweak solution となるが U が U_0 と U_1 の間の値となるようにとることにする(図1.19)。そのとき、そこでは $m = 0$ と、 ρ, m は unique に決定する。

(II) 図1.21 に従って (I)と同様の場合分けを行なう。



(i)

この場合は $S_1(U_\ell)$ と $u=u_0$ の交点 $\bar{U}$ がとれ(図1.22)、

$$\begin{cases} x < \sigma t \text{ では } & U \equiv U_\ell \\ \sigma t < x < u_0 t \text{ では } & U \equiv \bar{U} \end{cases}$$

として解が得られる(図1.22)。σはR-H condition;

$$\sigma[U] = [F(U)]$$

から得られる。

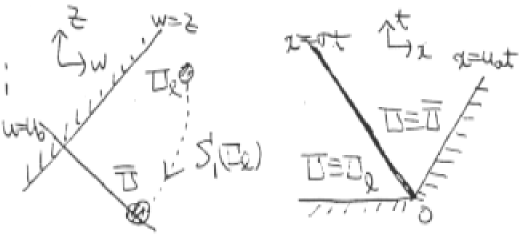


図1.22

(ii)

この場合は $R_1(U_\ell)$ と $u=u_0$ の交点 $\bar{U}$ がとれ(図1.23)、

$$\begin{cases} x < \lambda_1(U_\ell)t \text{ では } U \equiv U_\ell \\ \lambda_1(U_\ell)t \leqq x < \lambda_1(\bar{U})t \text{ では} \\ \quad \begin{cases} \lambda_1(U(x,t)) = \dfrac{x}{t} \\ u = r_1(\rho ; U_\ell) \end{cases} \\ \lambda_1(\bar{U})t \leqq x \leqq u_0 t \text{ では } U \equiv \bar{U} \end{cases}$$

から解が得られる(図1.23)。

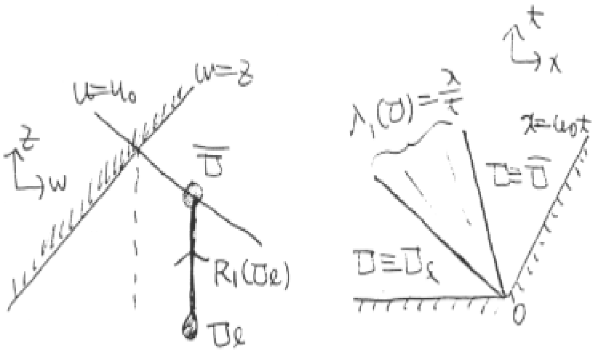


図1.23

(iii)

この場合は (I)(iii) と同様に $R_1(U_\ell)$ と $\rho=0$ との交点 U_1 をとれば(図1.24)、

$$\begin{cases} x < \lambda_1(U_\ell)t \text{ では } U \equiv U_\ell \\ \lambda_1(U_\ell)t \leqq x \leqq \lambda_1(U_1)t \text{ では} \\ \quad \begin{cases} \lambda_1(U(x,t)) = \dfrac{x}{t} \\ u = r_1(\rho ; U_\ell) \end{cases} \\ \lambda_1(U_1)t < x < u_0 t \text{ では} \\ \quad \begin{cases} \rho = 0 \\ u : \text{undefined} \end{cases} \end{cases}$$

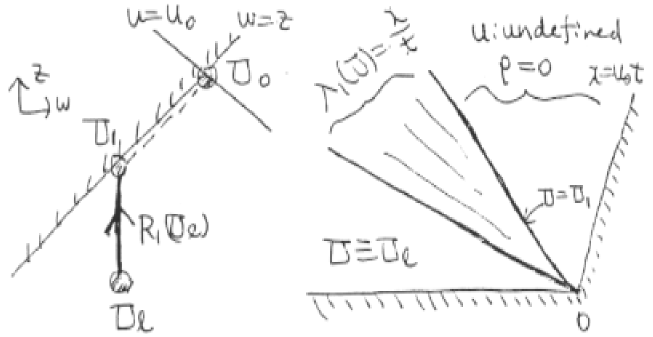


図1.24

から解が得られる(図1.24)。 uは$\rho=0$では Uが U_1とU_0の間になるようにとることにする(図1.24)。 mはここで 0 になり (ρ, m) は unique に決定する。

以上で weak solution がつくられ，しかも (1.11) を満たすことは
図1.25からも
容易にわかる。

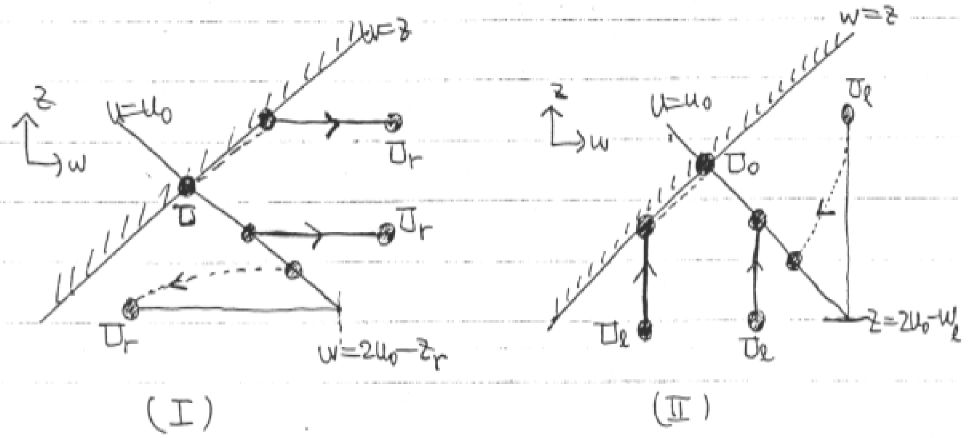


図 1.25

§2 差分近似解の構成

ここでは§1の Riemann problem の solution から Godunov 型の差分近似解を構成しその一様有界評価を求める。

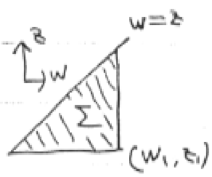
(1.2)(1.3) の data は bounded, つまり

$$
(2.1)\quad \begin{cases} 0 \leqq \rho_0(x) \leqq \rho_M, & |u_0(x)| \leqq u_M \\ u_1^m \leqq u_1(t) \leqq u_1^M, & u_2^m \leqq u_2(t) \leqq u_2^M \\ & (\rho_M,\ u_M,\ u_j^m,\ u_j^M : \text{const}) \end{cases}
$$

であるとする。

まず不変領域を考える。

Thm 1.1 (1.8) より



$$
(2.2)\qquad \Sigma = \Sigma(w_1, z_1) := \{\, w \geqq z,\ w \leqq w_1,\ z \geqq z_1 \,\}
$$

が Riemann problem (1.4), (1.7) の不変領域, すなわち

$U_l, U_r \in \Sigma$ ならば解 U も $U \in \Sigma$ となることがいえる。

壁での Riemann problem に対しては (1.11) より

$$
(2.3)\quad \begin{cases} (\mathrm{I}) & z(U_0) \geqq z_1,\ \ 2u_0 - z_1 \leqq w_1 \\ (\mathrm{II}) & w(U_0) \leqq w_1,\ \ 2u_0 - w_1 \geqq z_1 \end{cases}
$$

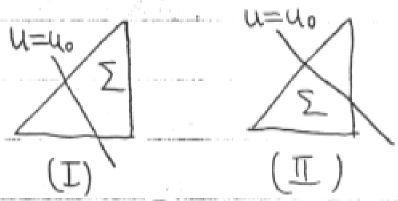


図2.1

なるときには(図2.1) Σは不変領域, すなわち

$$
\begin{matrix} (\mathrm{I}) & U_r \in \Sigma \\ (\mathrm{II}) & U_l \in \Sigma \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad U \in \Sigma \quad \text{がいえる。}
$$

又, Σは (ρ, m) では凸領域であり(図2.2), よって

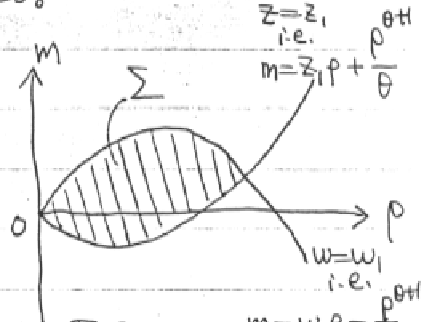


図2.2

<u>Lemma 2.1</u> (Jensenの不等式)

ϕ, ψ : 実数値可測関数 on E で

$\phi \geqq 0$ かつ $\int_E \phi > 0$

f : $\psi(E)$ の convex hull 上定義された凸函数で

$\int_E \phi\psi$, $\int_E \phi f(\psi)$ の値が存在

$$
\Rightarrow\ f\left(\frac{\int_E \phi\psi}{\int_E \phi} \right) \leqq \frac{\int_E \phi f(\psi)}{\int_E \phi} \qquad \lrcorner
$$

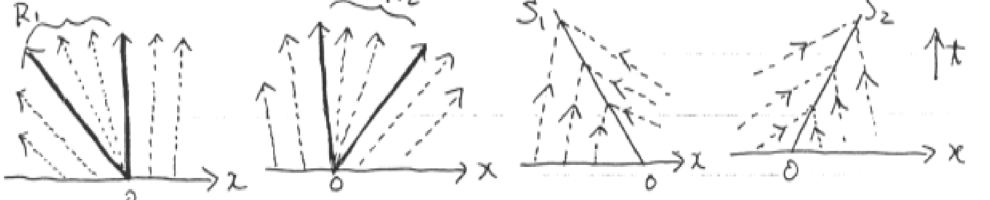
を使えば

$$(\rho(x), m(x)) \in \Sigma \quad (x \in [a,b])$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \rho(x)dx,\ \frac{1}{b-a}\int_a^b m(x)dx \right) \in \Sigma$$

がいえる。これらをまとめると次がいえる。

<u>Proposition 2.2</u>（不変領域）

(2.2) の $\Sigma = \Sigma(w_1, z_1)$ は thm 1.1 で解いた Riemann problem，又.条件 (2.3) のもとでの Prop. 1.2 の<u>壁</u>での Riemann problem，及び有界区間における積分による平均に関し不変領域である。$\perp$

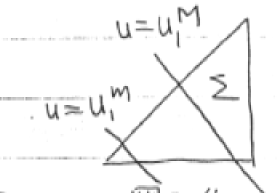


今，R_1, R_2, S_1, S_2 に特性曲線を
1-wave R_1, S_1 には

図 2.3

1- characteristic curve $\dot{x} = \lambda_1(U(x,t))$ を，
2-wave R_2, S_2 には 2- characteristic curve $\dot{x} = \lambda_2(U(x,t))$ を
重ねてみると 図2.3 のようになり（点線が char. curve をあらわす），よって
4つの wave の speed は いずれも char. curve の speed の sup. を（絶対値でみて）越えない。これに注意して近似解を構成していく。

<u>まず (1.1)(1.2) を考える。</u>



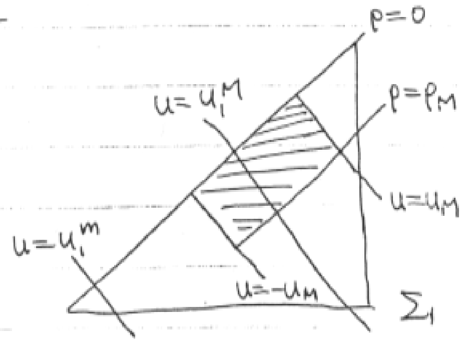
(2.1)，Prop 2.2 より (2.2) の Σ は

(2.4) $\qquad u_1^m \geqslant z_1 \ ; \ 2u_1^M \leqslant w_1 + z_1$ （図 2.4）

なるときは $u_1^m \leqslant u_0 \leqslant u_1^M$ なる任意の u_0 に対し，Σ は

図2.4

Prop 1.2 (I) の不変領域である。今，この (2.4) を
満たし，かつ



$$\{ 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_M \ , \ |u| \leqslant u_M \}$$

を含む Σ を ひとつ fix して Σ_1 とし（図2.5），

(2.5) $\qquad \Lambda_0 := \sup_{U \in \Sigma_1} \{ |\lambda_1(U)|, |\lambda_2(U)| \} \ (<\infty)$

とし，

図2.5

(2.6) $\qquad \Lambda_0 < \Lambda_1 < \infty$

なる Λ_1 を ひとつ fix する。　又，$\Delta x > 0$，$\Delta t > 0$ を

(2.7) $$\Delta_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

なるようにとる。これらの準備のもと、近似解:

$$U^\Delta(x,t) = \begin{pmatrix} \rho^\Delta(x,t) \\ m^\Delta(x,t) \end{pmatrix}$$

を構成する。

1st Step　initial data と壁の近似

$$\left\{ \begin{array}{l} U^\Delta(x,0) := \dfrac{1}{2\Delta x} \displaystyle\int_{2j\Delta x}^{(2j+2)\Delta x} U_0(x)\,dx \quad \left(2j\Delta x < x \leq (2j+2)\Delta x\right) \\ \qquad\qquad (j = 0, 1, \cdots) \\ U_0(x) = \begin{pmatrix} \rho_0(x) \\ m_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0(x) \\ \rho_0(x) u_0(x) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

(2.8) $$\left\{ \begin{array}{l} x^\Delta(t) := (t - n\Delta t) \dfrac{1}{\Delta t} \displaystyle\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} u_1 + x^\Delta(n\Delta t) \quad \left(n\Delta t < t \leq (n+1)\Delta t\right) \\ \qquad\qquad (n = 0, 1, \cdots) \\ x^\Delta(0) := 0 \end{array} \right.$$

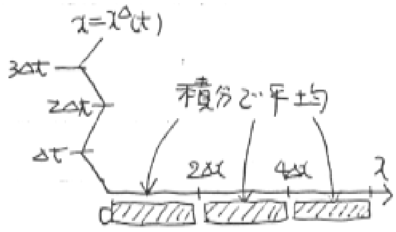


図 2.6

とする(図2.6)。Σ_1 の定義から

$$U_0(x) \in \Sigma_1 \quad (\text{すべての } x > 0 \text{ に対し})。$$

よってProp 2.2により

(2.9) $$U^\Delta(x,0) \in \Sigma_1 \quad (\text{すべての } x > 0 \text{ に対し})。$$

2nd Step　Riemann problem を解く。

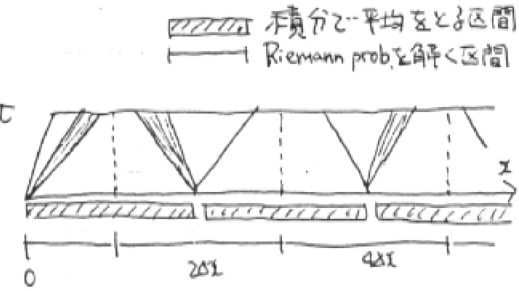


図2.7

x軸上の区間 $(\Delta x, 3\Delta x), (3\Delta x, 5\Delta x), \cdots$ 上、$U^\Delta(x,0)$ は 1st Step よりそれぞれ中点でとびを持ちそれ以外で constant. よってそのおのおのの区間で thm 1.1 の Riemann problem の解を $0<t<\Delta t$ でつくると (2.5)~(2.7)、およびその前で与えた注意によりその wave は幅 $2\Delta x$ におさまりそれぞれぶつかり合ったりはしない。

$(0, \Delta x)$ では壁 $x = x^\Delta(t)$ は $0<t<\Delta t$ では直線でその speed は $u_1(t)$ の積分による平均((2.8))であるから Prop 1.2 の Riemann problem の解をつくれば wave は高々 Δx までしか進まない。これらをもって $U^\Delta(x,t)$ の $0<t<\Delta t$

での値とする(図2.7)。よって (2.9), Σ_1の定義, $\dot{x}$,

$$u_1^m \leqq \dot{x}^\Delta(t) \leqq u_1^M$$

及び Prop 2.2 より

$$U^\Delta(x,t) \in \Sigma_1$$

となる。これで

$$\{(x,t);\quad 0 \leqq t < \Delta t \quad, x \geqq x^\Delta(t)\}$$

で U^Δ が定義されたことになる。

<u>3rd Step</u> 以下帰納的に行なう。

$$\{(x,t);\quad 0 \leqq t < n\Delta t \quad, x \geqq x^\Delta(t)\}$$

で U^Δ が定義され、そこで

(2.10) $$U^\Delta(x,t) \in \Sigma_1$$

を満たすとし、このとき $n\Delta t \leqq t < (n+1)\Delta t$ での U^Δ の値を定義する。

まず $x^\Delta(n\Delta t)$ が

$$\left((2j_0-2)\Delta x, 2j_0\Delta x \right]$$

内にあるとする(j_0:整数)。

このとき 積分による平均 $U^\Delta(x, n\Delta t)$, 及び Riemann problem は図2.8のように解く。すなわち、

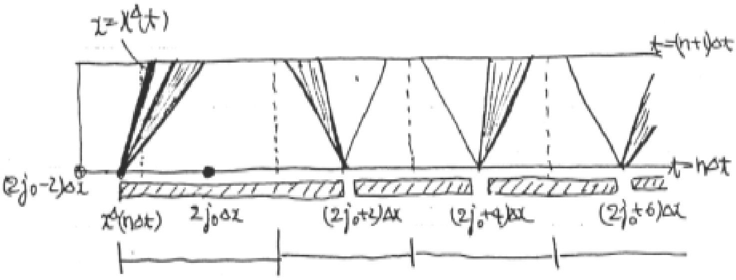


図 2.8

(2.11) $$U^\Delta(x, n\Delta t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\Delta x}\displaystyle\int_{2j\Delta x}^{(2j+2)\Delta x} U^\Delta(x, n\Delta t-0)\,dx & (2j\Delta x < x \leqq (2j+2)\Delta x) \\ & (j = j_0+1,\ j_0+2,\ \cdots\cdots) \\ \dfrac{1}{(2j_0+2)\Delta x - x^\Delta(n\Delta t)}\displaystyle\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{(2j_0+2)\Delta x} U^\Delta(x, n\Delta t-0)\,dx & \\ & (x^\Delta(n\Delta t) < x \leqq (2j_0+2)\Delta x) \end{cases}$$

で $U^\Delta(x, n\Delta t)$ を定め、Riemann problem は Thm 1.1 の方は

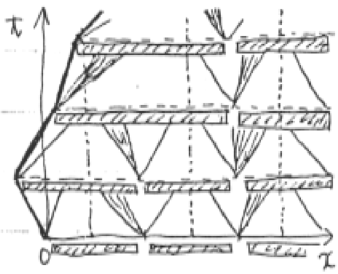
$$\left((2j_0+1)\Delta x, (2j_0+3)\Delta x\right), \left((2j_0+3)\Delta x, (2j_0+5)\Delta x\right), \cdots\cdots$$

で解き、Prop 1.2 の 壁での problem は

$$\left(x^\Delta(n\Delta t), (2j_0+1)\Delta x\right)$$

で解く。このとき 確かに wave は重ならないし、2nd Step と同様に、(2.10)の仮定 及び Prop 2.2 により 今 $n\Delta t \leqq t < (n+1)\Delta t$ で定義された U^Δ は

$$\Pi^\Delta(x,t) \in \Sigma_1$$



を満たす。

以上によって Π^Δ は帰納的に定められ，結局
$\{(x,t);\ t \geqq 0,\ x \geqq x^\Delta(t)\}$ で定義され，
$\Pi^\Delta(x,t) \in \Sigma_1$ （すべての $t \geqq 0$，すべての $x \geqq x^\Delta(t)$ に対し）
を満たす $\Pi^\Delta(x,t)$ が得られる。 これ以外の (x,t)：
$$\{(x,t);\ t<0\} \cup \{(x,t);\ t \geqq 0,\ x < x^\Delta(t)\}$$
では
$$\Pi^\Delta \equiv 0$$
と定める。 Δx，Δt を (2.7) に従って動かすとき，Σ_1 は Δx によらないから Σ_1 で ρ, u が有界であることにより，よって Π^Δ の一様有界性がいえる。

同様に (1.1)(1.3) を考える。

今のと同じような三角形の不変領域をとるため，

(2.12) $\quad u_1^M \leqq u_2^m$

とする。このとき，
$$\begin{cases} u_1^m \geqq z_1, & 2u_1^M \leqq w_1 + z_1 \\ u_2^M \leqq w_1, & 2u_2^m \geqq w_1 + z_1 \end{cases}$$
を満たし，かつ
$$\{0 \leqq \rho \leqq \rho_M,\ |u| \leqq u_M\}$$

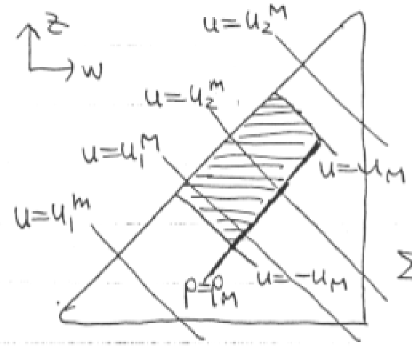
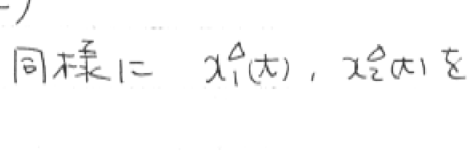


図 2.9

を含むような $\Sigma = \Sigma(w_1, z_1)$ をひとつ fix し Σ_1 とする(図 2.9)。

Δ_0，Δ_1，Δx，Δt は前と同様に定める。ただし Δx は
$$\Delta x := \frac{L}{2l} \quad (l：自然数,\ l \geqq 2)$$
なる値をとるものとする。

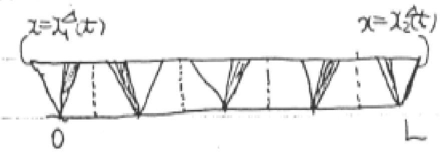


1st Step では
$$(0, 2\Delta x],\ (2\Delta x, 4\Delta x],\ \cdots,\ ((2l-2)\Delta x, L)$$
で initial data を近似し 壁の近似も前と同様に $x_1^\Delta(t)$，$x_2^\Delta(t)$ を

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_1^\Delta(t) := (t - n\Delta t)\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} u_1 + x_1^\Delta(n\Delta t) \\
x_2^\Delta(t) := (t - n\Delta t)\dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} u_2 + x_2^\Delta(n\Delta t) \\
x_1^\Delta(0) = 0, \qquad x_2^\Delta(0) = L
\end{array}
\right.
\qquad
\begin{array}{l}
(n\Delta t < t \leqq (n+1)\Delta t) \\
(n = 0, 1, 2, \cdots)
\end{array}
$$

で定める。

2nd Step での Riemann problem も区間等は前と同じところで考え、もちろん $x_1^\Delta(t)$ のところでは Prop 1.2 の (I)、$x_2^\Delta(t)$ のところでは Prop 1.2 の (II) でとく。



3rd Step でも、$x_1^\Delta(t)$ の近くでは前の $\overset{\Delta}{x}(t)$ と同じようにやればよいし、$x_2^\Delta(t)$ の近くでも前と逆にすればよい（図2.10）。

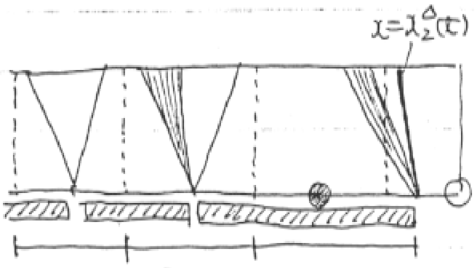


図2.10

これによって U^Δ が

$$\{(x,t) ;\ t \geqq 0 \quad x_1^\Delta(t) \leqq x \leqq x_2^\Delta(t)\}$$

で定義できて

$$U^\Delta \in \Sigma_1$$

が満たされ Δ に関しての一様有界性がいえる。これ以外の (x,t):

$$\{(x,t) ;\ t<0\} \cup \{(x,t) ;\ t \geqq 0,\ x < x_1^\Delta(t)\} \cup \{(x,t) ;\ t \geqq 0,\ x_2^\Delta(t) < x\}$$

ではやはり $U^\Delta \equiv 0$ とする。

以上の結果をまとめると次を得る。

<u>Proposition 2.3</u>

以上のようにして (2.1), (2.12) のもと、(1.1)(1.2)及び (1.1)(1.3) の差分近似解 $U^\Delta(x,t)$ が任意の (x,t) に対して定義できて、これは一様有界評価:

$$0 \leqq \rho^\Delta(x,t) \leqq C, \quad |u^\Delta(x,t)| \leqq C \quad (\text{任意の } (x,t) \text{ に対して})$$
$$C = C(\Sigma_1)$$

を持つ。 ┘

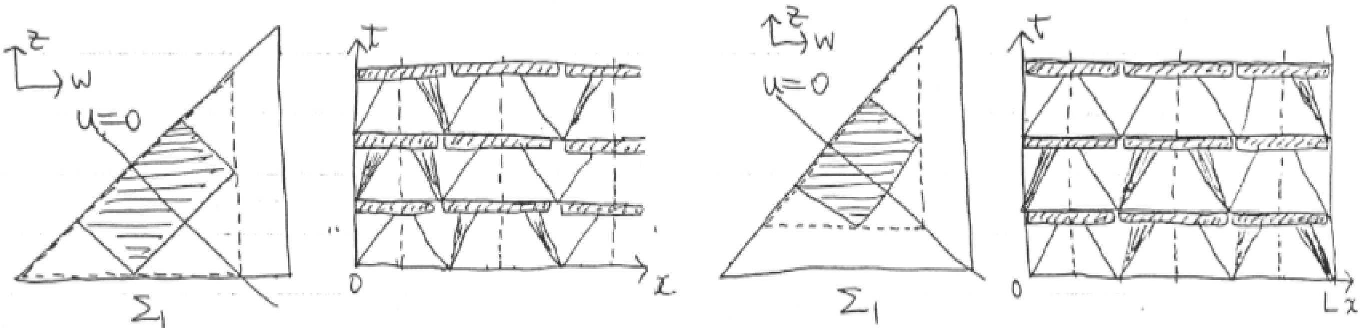
特殊な場合として、$u_1 \equiv u_2 \equiv 0$ の場合をみると このときには 3rd Step の積分の幅はすべて $2\Delta x$ でよくなる。

というのは このときは

$$x^0(t) \equiv x(t) \equiv 0$$

$$x_1^0(t) \equiv x_1(t) \equiv 0 \quad , \qquad x_2^0(t) \equiv x_2(t) \equiv 0$$

であるから Σ_1 ，及び差分解 は 図2.11 のようになるからである。



(点線のものでよい)　　(点線のものでよい)

(1,1) (1,2)　$u_1 \equiv 0$　　(1,1) (1,3)　$u_1 \equiv u_2 \equiv 0$

図 2.11

§3 諸定理

ここでは後で使われる主要な定理をいくつかあげる。

(i) bounded set の弱 compact 性

X : Banach space　　X^* : X の dual space

以下、$x \in X$ 、$f \in X^*$ に対し $f(x)$ を $\langle f, x \rangle$ と書くことにする。

$$x_n \to x \text{ weakly in } X \overset{\text{def}}{\iff} \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \quad ({}^\forall f \in X^*)$$

$$f_n \to f \text{ weakly* in } X \overset{\text{def}}{\iff} \langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle \quad ({}^\forall x \in X)$$

特に　$f_n, f \in L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))^*$ に対し　(Ω : open set)

$$\underline{f_n \to f \ \ L^\infty(\Omega) \text{ weak*}} \iff \int_\Omega \phi f_n \to \int_\Omega \phi f \quad ({}^\forall \phi \in L^1(\Omega))$$

である。

<u>Theorem 3.1</u>

$L^\infty(\Omega) \supset A$: weak* bounded subset 、すなわち

$$\sup_{f \in A} \left| \int_\Omega \phi f \right| < \infty \quad ({}^\forall \phi \in L^1(\Omega))$$

$\Rightarrow$ ${}^\forall \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ に対し

${}^\exists \{f_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$: $\{f_n\}$ の部分列 , ${}^\exists f \in L^\infty(\Omega)$

s.t. $f_{n_j} \to f$ $L^\infty(\Omega)$ weak* $(j \to \infty)$ ┘

($L^1(\Omega)$ の可分性と対角線論法から従う。)

$$C_0(\Omega) \underset{\text{def}}{=} \{ f : \Omega \text{上連続}, \ \operatorname{supp} f \subset \Omega \}$$

$$\mathcal{M}(\Omega) \underset{\text{def}}{=} C_0(\Omega)^* = \{ \Omega \text{上の Radon measure} \}$$

(c.f. Riesz の定理. Folland [9])

以下　$\phi \in C_0(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ に対し

$\int_\Omega \phi \, d\mu$ を $\langle \mu, \phi \rangle$ と書くことにする。

$$\underline{\mu_n \to \mu \text{ weakly in } \mathcal{M}(\Omega)} \overset{\text{def}}{\iff} \langle \mu_n, \phi \rangle \to \langle \mu, \phi \rangle \quad ({}^\forall \phi \in C_0(\Omega))$$

で $\mathcal{M}(\Omega)$ に weakly convergence が定義され、Thm 3.1 と同様に次がいえる。

Theorem 3.2

$\mathcal{M}(\Omega) \supset A$: weakly bounded. すなわち
$\sup_{\mu \in A} |\langle \mu, \phi \rangle| < \infty \quad (\forall \phi \in C_0(\Omega))$

$\Rightarrow$ $\forall \{\mu_n\} \subset A$ に対し
$\exists \{\mu_{n_j}\}$: $\{\mu_n\}$ の部分列, $\exists \mu \in \mathcal{M}(\Omega)$
s.t. $\mu_{n_j} \longrightarrow \mu$ weakly in $\mathcal{M}(\Omega)$ ┘

($C_0(\Omega)$ の可分性, 対角線論法, 及び $\mathcal{M}(\Omega)$ の弱完備性から従う。)

(ii) Young measure

Lemma 3.3

$\Omega \subset \mathbb{R}^{N'}$: bounded open subset
μ : finite nonnegative Radon measure on $\Omega \times \mathbb{R}^N$
(i.e. $\mu(\Omega \times \mathbb{R}^N) < \infty$)
σ : μ の Ω への projection, すなわち $E \subset \Omega$ Borel subset に対し
$\sigma(E) := \mu(E \times \mathbb{R}^N)$
(σ も finite nonnegative Radon measure on Ω)
が $\sigma = m :=$ Lebesgue measure となる
$\Longrightarrow$ ある ν_x : probability Radon measure on $\mathbb{R}^N$
が a.e. (m に関し) $x \in \Omega$ で存在し

$$\begin{cases} \circ \ x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, \nu_x(dy) \quad \text{は } m\text{-measurable な函数} \\ \circ \ \int_{\Omega \times \mathbb{R}^N} f(x,y)\, \mu(dx\,dy) = \int_\Omega \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\, \nu_x(dy) \right\} dx \end{cases}$$

が, 任意の f : $\Omega \times \mathbb{R}^N$ 上連続かつ bounded な函数に対して成り立つ。┘

($C_0(\mathbb{R}^N)$ の可分性, Radon-Nikodymの定理, 及び Rieszの定理から従う。詳しくは Evans [8] 参照。)

Lemma 3.4

$\Omega \subset \mathbb{R}^{N'}$: open subset
$v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$, measurable な函数で
$v(\Omega) \subset K$ K : $\mathbb{R}^N$ の bounded set

のとき

$$C_0(\Omega \times \mathbb{R}^N) \ni \phi(x, y) \longmapsto \int_\Omega \phi(x, v(x))\, dx$$

によって $C_0(\Omega \times \mathbb{R}^N)^* = \mathcal{M}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ の元 μ が定まり、

$$\begin{cases} \circ\ \mu \geqq 0 \\ \circ\ \phi = 0 \ \text{ on } \overline{\mathrm{graph}(v)} \implies \langle \mu, \phi \rangle = 0 \\ \qquad\qquad \text{よって } \operatorname{supp} \mu \subset \overline{\mathrm{graph}(v)} \\ \circ\ \mu \text{ の } \Omega \text{ への projection } = m \end{cases}$$

を満たす。 ┘

この2つの lemma から次が従う。

Theorem 3.5

$K \subset \mathbb{R}^N$: bounded , $\Omega \subset \mathbb{R}^{N'}$: open
$v_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ $(n \in \mathbb{N})$ が $v_n(x) \in K$ a.e. Ω を満たす

$\implies$ $\exists \{v_{n_j}\}$: $\{v_n\}$ の部分列
$\exists \{\nu_x\}$ (a.e. $x \in \Omega$) : probability measure (on $\mathbb{R}^N$) の族

s.t.
$$\begin{cases} \circ\ \operatorname{supp} \nu_x \subset \overline{K} \\ \circ\ {}^\forall F(y) : \mathbb{R}^N \text{ 上連続 に対し} \\ \qquad \overline{F}(x) := \langle \nu_x(y), F(y) \rangle \text{ とすると} \\ \qquad F(v_{n_j}(x)) \longrightarrow \overline{F}(x) \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \text{ weak*} \end{cases}$$
┘

(lemma 3.3 で $f(x, y) = \psi(x)\rho(y)F(y)$, $\psi \in C_0(\Omega)$, $\rho \in C_0(\mathbb{R}^N)$,
$\rho = 1$ on n.b.h.d. of K ととる。詳しくは Tartar[22], Evans[8] 参照。)

この Thm 3.5 の $\{\nu_x\}$ を $\{v_{n_j}\}$ に関する <u>Young measure</u> と呼ぶ。

(iii) div — curl lemma

Theorem 3.6

$\Omega \subset \mathbb{R}^{N'}$: open subset

$u, u^\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}^N$ $u = (u_1, \cdots, u_N)$, $u, u^\varepsilon \in L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$u^\varepsilon \to u$ in $L^\infty(\Omega)$ weak* $(\varepsilon \downarrow 0)$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N'} a_{ijk}\frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_k} \in {}^\exists$ compact set of $H^{-1}_{loc}(\Omega)$

$\forall i = 1, 2, \cdots, q$ (a_{ijk} : const.)

$\Delta := \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N'} : \sum_{j,k} a_{ijk}\lambda_j \xi_k = 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, q\}$

$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{R}^N : {}^\exists \xi \neq 0 \text{ s.t. } (\lambda, \xi) \in \Delta\}$

とするとき

$$Q(\lambda) := \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}\lambda_i\lambda_j \quad (\alpha_{ij} = \alpha_{ji})$$

に対して

$Q(\lambda) \geqq 0 \quad ({}^\forall \lambda \in \Lambda)$

$\underset{L^1(\Omega)}{\underset{\uparrow}{Q(u^\varepsilon)}} \longrightarrow \ell$ (distribution sense)

(ℓ は一般には measure)

$\Longrightarrow \quad \ell \geqq Q(u)$ ┘

ここで $H^{-1}_{loc}(\Omega)$ は Sobolev 空間、

$H^{-1}_{loc}(\Omega) := \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; {}^\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対し $\phi T \in H^{-1}(\Omega)\}$

$= \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \ ; \ T = \sum_{|\alpha| \leq 1} D^\alpha h_\alpha \ . \ h_\alpha \in L^2_{loc}(\Omega) \ ({}^\forall \alpha)\}$.

この Thm 3.6 の証明には

Lemma 3.7

1) $L^\infty(\Omega) \supset B$: bounded (L^∞ norm に関して)

$\Longrightarrow$ ${}^\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し

ϕB は $H^{-1}(\Omega)$ で relatively compact

2) $H^{-1}_{loc}(\Omega) \supset K$: compact ($H^{-1}_{loc}(\Omega)$ は Fréchet 空間)

$\Longrightarrow$ ${}^\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対し

ϕK は $H^{-1}(\Omega)$ で compact ┘

が使われる。(この lemma 自身は Rellich の定理、及び compact の連続像は compact、から従う。Thm 3.6 の証明は Tartar [22] 参照。)

として Thm 3.6 の系として 次を得る。

<u>Corollary 3.8</u> (div – curl lemma)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$: bounded open subset

$v^\varepsilon, v, w^\varepsilon, w : \Omega \to \mathbb{R}^N \quad \in L^\infty(\Omega)$

$v^\varepsilon \longrightarrow v, \quad w^\varepsilon \longrightarrow w \quad$ in $L^\infty(\Omega)$ weak*

$\operatorname{div} v^\varepsilon \in {}^\exists$ compact set of $H^{-1}_{loc}(\Omega)$

$\operatorname{curl} w^\varepsilon \in {}^\exists$ compact set of $H^{-1}_{loc}(\Omega)$

$\Longrightarrow {}^\exists\{\varepsilon'\}$; 部分列

s.t $v^{\varepsilon'} \cdot w^{\varepsilon'} \longrightarrow v \cdot w \quad L^\infty(\Omega)$ weak* ⌋

($N \to 2N$, $N' \to N$, $u = (v, w)$ $F(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \cdot \lambda_{j+N}$ とすればよい。)

(iv) imbedding theorem

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$: <u>bounded</u> open subset とする。

<u>Theorem 3.9</u> (Sobolev imbedding)

$p > N$, $0 \leq \alpha \leq 1 - \frac{N}{p}$ に対し

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_0(\Omega) \longrightarrow C^\alpha(\overline{\Omega})$$

であり、

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C(N,p)\left\{ m(\Omega)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} + (\operatorname{diam}\Omega)^{1-\frac{N}{p}-\alpha} \right\} \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

が任意の $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}_0(\Omega)$ について成り立つ。⌋ (Gilbarg–Trudinger [10] 参照。)

<u>Theorem 3.10</u>

$A \subset \mathcal{M}(\Omega)$ が

$$\sup_{\substack{\mu \in A \\ C_0(\Omega) \ni \phi \neq 0}} \frac{|\langle \mu, \phi \rangle|}{\|\phi\|_{C(\Omega)}} < \infty \quad \text{を満たす}$$

$\Rightarrow$ A は $W^{-1,p}(\Omega)$ ($:= \overset{\circ}{W}{}^{1,\frac{p}{p-1}}_0(\Omega)$ の dual space) にうめこまれ、

A はここで relatively compact $(1 < p < \frac{N}{N-1})$. ⌋

これの証明は

<u>Lemma 3.11</u>

$p > N$ に対し

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}_0(\Omega) \longrightarrow C_0(\overline{\Omega}) \quad \text{compact} \quad ⌋$$

及び Thm 3.2 等により示される。詳しくは Evans [8] 参照のこと。
ここで

$$C_0(\overline{\Omega}) \underset{\text{def}}{:=} \{ f \in C(\overline{\Omega}) \ ; \ f = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \}$$
$$= \{ f|_{\Omega} \ ; \ f \in C_0(\mathbb{R}^N), \ \mathrm{supp}\, f \subset \overline{\Omega} \}$$

は、sup. norm で Banach 空間となる。

(v) Murat の lemma

Theorem 3.12 (Murat の lemma)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$; bounded open subset のとき

$$(\text{compact set in } W^{-1,q}(\Omega)) \cap (\text{bounded set in } W^{-1,r}(\Omega))$$
$$\subset (\text{compact set in } H^{-1}_{loc}(\Omega))$$
$$(1 < {}^{\exists}q \leq 2 < {}^{\exists}r < \infty) \quad \lrcorner$$

(Tartar [22] , Ding ら [2] 参照。)

(vi) Lebesgue derivative

μ : nonnegative Radon measure とする ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$: open)。

$$\underline{D}\mu(x) \underset{\text{def}}{=} \varliminf_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))}, \quad \overline{D}\mu(x) \underset{\text{def}}{=} \varlimsup_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))}$$

を Lebesgue derivative (それぞれ lower derivative, upper derivative) と呼ぶ。
(m : Lebesgue measure , $B_r(x)$: 中心 x , 半径 r の球)

Theorem 3.13

$$\underline{D}\mu(x) = 0 \quad \text{a.e. } \mu \implies \mu \equiv 0 \quad \lrcorner$$

(証明は Radon-Nikodym, Vitali の covering lemma による。詳しくは Rudin [20] 参照。)

§4 weak entropy

ここでは weak solution の存在証明に使われる weak entropy，及び その評価を計算する。

$(\eta(\Box), q(\Box))$ が 系(1.4) の entropy pair であるとは，(1.4)を満たす smooth な $\Box(x,t)$ に対して

(4.1) $$\eta(\Box(x,t))_t + q(\Box(x,t))_x = 0$$

となる smooth な函数の pair であること。η を entropy，q を entropy flux と呼ぶ。

(4.1) は，(1.4) より 両立条件：

(4.2) $$\nabla q = \nabla\eta \cdot \nabla F \qquad \left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}, \frac{\partial}{\partial m}\right)\right)$$

を満たすことを要求する。

又，さらに，η を (ρ, u) の函数とみて

(4.3) $$\eta(\rho, u)\big]_{\rho=0} = \eta(0, u) = 0 .$$

となるとき η を weak entropy と呼ぶ。

η, q は smooth であるから (4.2) を $(\rho, m), (\rho, u), (w, z)$ でみると それぞれ

$$\begin{cases} q_\rho = \left(-\dfrac{m^2}{\rho^2} + \rho^{2\theta}\right)\eta_m \\ q_m = \eta_\rho + 2\dfrac{m}{\rho}\eta_m \end{cases},$$

$$\begin{cases} q_\rho = u\eta_\rho + \rho^{\gamma-2}\eta_u \\ q_u = \rho\eta_\rho + u\eta_u \end{cases},$$

(4.4) $$\begin{cases} q_w = \lambda_2 \eta_w \\ q_z = \lambda_1 \eta_z \end{cases}$$

となる。ここで λ_1, λ_2 は (1.5), (1.6) より

(4.5) $$\lambda_1 = \frac{1-\theta}{2}w + \frac{1+\theta}{2}z, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\theta}{2}w + \frac{1-\theta}{2}z$$

となる。 (4.4) から q を消去すると Euler-Poisson-Darboux の方程式：

(4.6) $$\eta_{wz} + \frac{\tau}{w-z}(\eta_w - \eta_z) = 0 \quad \left(\tau = \frac{1-\theta}{2\theta} = \frac{1}{2}\frac{3-\gamma}{\gamma-1}\right)$$

を得、Darboux の公式：

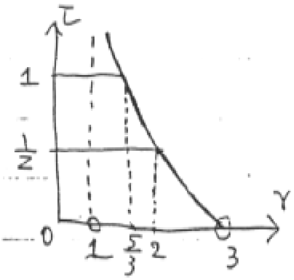
(4.7) $$\eta = \int_z^w \{(w-s)(s-z)\}^\tau \phi(s)\,ds$$

は (4.3) 及び

$$\eta_\rho(\rho,u)\Big]_{\rho=0} = C_\theta \phi(u) \quad \left(C_\theta = \left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{\{\Gamma(\tau+1)\}^2}{\Gamma(2\tau+2)} \right)$$

を満たす EPD の方程式 (4.6) の解を与える。τ は図4.1より

$1<\gamma<3$ では $\tau>0$.



又 weak entropy (4.7) に対する entropy flux q は

(4.8) $$\begin{cases} q = \theta \int_z^w \{(w-s)(s-z)\}^\tau \{s+\tau(w+z)\} \phi(s)\,ds \\ \quad = \lambda_1 \eta + \theta \int_z^w (w-s)^\tau (s-z)^{\tau+1} \phi(s)\,ds \\ \quad = \lambda_2 \eta - \theta \int_z^w (w-s)^{\tau+1} (s-z)^\tau \phi(s)\,ds \end{cases}$$

で与えられる。 以下 ϕ は C^2 級 とする。

後に必要となるいくつかの weak entropy をこの (4.7) (4.8) から生成する。

(i) $\phi(s) = \mathrm{Const}\cdot k^{\tau+1} e^{\pm ks}$ $(k=1,2,\cdots)$

(4.9) $$\begin{cases} \eta^{(1)} \underset{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\theta}{2}\right)^\tau k^{\tau+1} \int_z^w \{(w-s)(s-z)\}^\tau e^{ks}\,ds \\ \eta^{(2)} \underset{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\theta}{2}\right)^\tau k^{\tau+1} \int_z^w \{(w-s)(s-z)\}^\tau e^{-ks}\,ds \end{cases}$$

とし、これらに対する entropy flux を $q^{(1)}, q^{(2)}$ とする。

$$r := \frac{k}{\theta}\rho^\theta = \frac{w-z}{2}k$$

とすると簡単な計算によって

(4.10) $$\eta^{(1)} = \rho^{\frac{1-\theta}{2}} \psi^{(1)}(r)\, e^{ku}, \quad \eta^{(2)} = \rho^{\frac{1-\theta}{2}} \psi^{(1)}(r)\, e^{-ku}$$

$$(4.11)\quad \left\{\begin{aligned} \psi^{(1)}(r) &= 2^{\tau+1} r^{\tau+1} e^{-r} \int_0^1 \{y(1-y)\}^{\tau} e^{2ry}\,dy \\ &= 2^{\tau+1} e^{r} \int_0^r \left\{y\left(1-\frac{y}{r}\right)\right\}^{\tau} e^{-2y}\,dy \end{aligned}\right.$$

$$q^{(1)} = \eta^{(1)}\left(u - \frac{1+\theta}{2k} + \rho^{\theta}\frac{\dot{\psi}^{(1)}}{\psi^{(1)}}\right),\quad q^{(2)} = \eta^{(2)}\left(u + \frac{1+\theta}{2k} - \rho^{\theta}\frac{\dot{\psi}^{(1)}}{\psi^{(1)}}\right)$$

（' ・ ' は微分を表わす。）　を得、Lebesgue 収束定理等から容易に

$$(4.12)\quad \left\{\begin{aligned} e^{-r}\psi^{(1)}(r) &= \Gamma(\tau+1) - \frac{1}{r}\cdot\frac{\tau}{2}\Gamma(\tau+2) + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r\to+\infty) \\ e^{-r}\dot{\psi}^{(1)}(r) &= \Gamma(\tau+1) - \frac{1}{r}\cdot\frac{\tau}{2}\Gamma(\tau+2) + o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (r\to+\infty) \\ \psi^{(1)}(r) &= 2^{\tau+1}\frac{\{\Gamma(\tau+1)\}^2}{\Gamma(2\tau+2)} r^{\tau+1}\{1+o(1)\} \quad (r\to+0) \\ \dot{\psi}^{(1)}(r) &= 2^{\tau+1}(\tau+1)\frac{\{\Gamma(\tau+1)\}^2}{\Gamma(2\tau+2)} r^{\tau}\{1+o(1)\} \quad (r\to+0) \end{aligned}\right.$$

が $\tau > 0$, すなわち $1<\gamma<3$ なる任意の γ についていえる。これらを使うと次がいえる。

<u>Lemma 4.1</u> (DiPerna [7])

$$\left\{\begin{aligned} \eta^{(1)} &= \Gamma(\tau+1)e^{kw}\left\{\rho^{\frac{1-\theta}{2}} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\} \\ \eta^{(2)} &= \Gamma(\tau+1)e^{-kz}\left\{\rho^{\frac{1-\theta}{2}} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\} \end{aligned}\right. \quad (k\to+\infty)$$

が　$\rho \in$ ($\{\rho>0\}$ の compact set) に関し一様に，又．

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{q^{(1)}}{\eta^{(1)}} = \lambda_2 + O\left(\frac{1}{k}\right),\quad \frac{q^{(2)}}{\eta^{(2)}} = \lambda_1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\eta^{(2)}q^{(1)} - \eta^{(1)}q^{(2)} = 2\{\Gamma(\tau+1)\}^2 e^{k(w-z)}\left\{\rho + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\} \quad (k\to\infty) \end{aligned}\right.$$

が　$\rho \in$ ($\{\rho \geqq 0\}$ の compact set) に関し一様にいえる。($1<\gamma<3$) ┘

(Proof)

$$\begin{aligned} \eta^{(1)}e^{-kw} - \Gamma(\tau+1)\rho^{\frac{1-\theta}{2}} &= \eta^{(2)}e^{kz} - \Gamma(\tau+1)\rho^{\frac{1-\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{k}\theta\rho^{\frac{1-3\theta}{2}} \underbrace{r\{e^{-r}\psi^{(1)}(r) - \Gamma(\tau+1)\}}_{(4.12)\text{ より bounded}} \end{aligned}$$

より前半部分はよい。（しかも $1<\gamma\leqq\frac{5}{3}$ では $1-3\theta\geqq 0$ より $\{\rho\geqq 0\}$ の compact set 上一様にいえる。）

$$\frac{q^{(1)}}{\eta^{(1)}} - \lambda_2 = \lambda_1 - \frac{q^{(2)}}{\eta^{(2)}} = \frac{1}{K}\,\theta\underbrace{\left\{ r\left(\frac{\dot\psi^{(1)}}{\psi^{(1)}} - 1\right) - (\tau+1)\right\}}_{(4.11),(4.12)\text{により bounded}}$$

又、

$$\eta^{(2)}q^{(1)} - \eta^{(1)}q^{(2)} = e^{K(w-z)}\rho^{1-\theta}\{e^{-r}\psi^{(1)}\}^2\cdot\left[\frac{2}{K}\theta\left\{r\left(\frac{\dot\psi^{(1)}}{\psi^{(1)}}-1\right)-(\tau+1)\right\}+(\lambda_2-\lambda_1)\right]$$

より

$$e^{-K(w-z)}\left(\eta^{(2)}q^{(1)} - \eta^{(1)}q^{(2)}\right) - 2\{\Gamma(\tau+1)\}^2\rho$$

$$= \frac{1}{K}\underbrace{\rho^{1-\theta}\{e^{-r}\psi^{(1)}\}^2\cdot 2\theta\left\{r\left(\frac{\dot\psi^{(1)}}{\psi^{(1)}}-1\right)-(\tau+1)\right\}}_{(4.11)\ (4.12)\text{により bounded}}$$

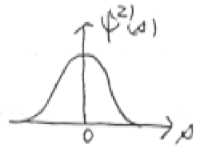
$$+\frac{1}{K}\underbrace{\theta\rho^{1-\theta}r\{e^{-r}\psi^{(1)}-\Gamma(\tau+1)\}}_{(4.12)\text{により bounded}}\times\underbrace{\{e^{-r}\psi^{(1)}+\Gamma(\tau+1)\}}_{(4.12)\text{により bounded}}$$

であるから後半部分もいえる。 //

(ii) $\phi(s) = \psi_n(s) \in C_0^\infty$ で $\psi_n \to \delta(a)$ 及び $\psi_n \to -\delta'(a)$.

まず $\underline{a\in\mathbb{R}}$ を fix し、$\underline{\tau \geq 1}$ (すなわち $1 < \gamma \leq \frac{5}{3}$) とする。

$\psi^{(2)} \in C_0^\infty(-1,1)$ を



(4.13) $\psi^{(2)} \geq 0$, $\int\psi^{(2)} = 1$, かつ偶函数

なるものとし

(4.14) $\psi_n^{(3)}(s) := n\psi^{(2)}(n(s-a))$, $\psi_n^{(4)}(s) := -\left(\psi_n^{(3)}(s)\right)^{\cdot}$

とする。このとき

(4.15) $\psi_n^{(3)} \longrightarrow \delta(a)$, $\psi_n^{(4)} \longrightarrow -\delta'(a)$ $(n\to\infty)$

である。これに対し

(4.16) $$\begin{cases} \eta_n^{(3)} := \int_z^w \{(w-s)(s-z)\}^\tau \psi_n^{(3)}(s)\,ds \\ \eta_n^{(4)} := \int_z^w \{(w-s)(s-z)\}^\tau \psi_n^{(4)}(s)\,ds \end{cases}$$

及びそれぞれに対応する entropy flux $q_n^{(3)}, q_n^{(4)}$ をとる。今、

$$\begin{cases} K^\eta := \chi_{[z,w]}(s)\{(w-s)(s-z)\}^\tau \\ K^q := \chi_{[z,w]}(s)\,\theta\{s+\tau(w+z)\}\{(w-s)(s-z)\}^\tau \end{cases}$$

とすると、

$$\eta_n^{(j)} = \int K^\eta(s)\,\psi_n^{(j)}(s)\,ds, \quad q_n^{(j)} = \int K^q(s)\,\psi_n^{(j)}(s)\,ds \quad (j=3,4)$$

であり, K^η, K^q は s について連続で, $\tau>1$ なら C^1級, $\tau=1$ なら区分的に C^1級で $s=w, z$ で K^η, K^q は第一種不連続。

よって簡単な考察によって (4.13)―(4.15) より

$$(4.17)\quad \left\{\begin{array}{l}
\eta_n^{(j)} \longrightarrow \eta^{(j)}, \quad q_n^{(j)} \longrightarrow q^{(j)} \quad \text{on } \{w \geqq z\} \quad (j=3,4) \\
\left[\begin{array}{l} \eta^{(3)} := \{(w-a)(a-z)\}^{\tau} X \\ q^{(3)} := \theta\{a+\tau(w+z)\}\{(w-a)(a-z)\}^{\tau} X \end{array}\right. \\
\left[\begin{array}{l} \eta^{(4)} := \tau(w+z-2a)\{(w-a)(a-z)\}^{\tau-1} X \\ q^{(4)} := \theta\left[\{(w-a)(a-z)\}^{\tau} + \tau(w+z-2a)\{a+\tau(w+z)\}\{(w-a)(a-z)\}^{\tau-1}\right] X \end{array}\right. \\
X = \left\{\begin{array}{ll} 1 & (z<a<w) \\ \frac{1}{2} & (z=a<w \text{ 又は } z<w=a) \\ 0 & (\text{その他}) \end{array}\right. \quad (\text{図}4.2)
\end{array}\right.$$

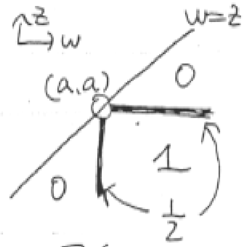


図4.2

がいえる。又,

$$(w-s)(s-z) \leqq \frac{(w-z)^2}{4} \quad (z \leqq s \leqq w)$$

等から,

$$|\eta_n^{(3)}| \leqq \frac{(w-z)^{2\tau}}{4^\tau}, \quad |q_n^{(3)}| \leqq \frac{1+\theta}{2}(|z|+|w|)\frac{(w-z)^{2\tau}}{4^\tau}$$

$$|\eta_n^{(4)}| \leqq \tau\frac{(w-z)^{2\tau-1}}{4^{\tau-1}}, \quad |q_n^{(4)}| \leqq \theta\frac{(w-z)^{2\tau-1}}{4^{\tau-1}}\left\{\frac{w-z}{4} + \tau(1+\tau)(|z|+|w|)\right\}$$

がいえ, 結局以上をまとめると次がいえる。

Lemma 4.2

(4.16)で定義される smooth weak entropy pairs $(\eta_n^{(j)}, q_n^{(j)})$ $(j=3,4)$ は $n\to\infty$ のとき (4.17) の区分的連続函数(特に $\tau=1$ の $j=4$ の場合を除いては連続函数) $(\eta^{(j)}, q^{(j)})$ に各点収束し (on $\{w\geqq z\}$), $(\eta_n^{(j)}, q_n^{(j)})$ は $\{w\geqq z\}$ の compact set 上有界である。又,

$$\eta^{(3)}q^{(4)} - \eta^{(4)}q^{(3)} = \theta\{(w-a)(a-z)\}^{2\tau} X$$

となる ($\tau \geqq 1$, すなわち $1<\gamma\leqq\frac{5}{3}$ のとき)。 ┘

(iii) $\phi(s) = \left(\frac{d}{ds}\right)^{\tau+1}\psi(s) \qquad \psi \in C_0^\infty$

(ii)と同じ $a \in \mathbb{R}$ に対し $\psi^{(5)} \in C_0^\infty(a-1, a+1)$ を

$$\int \psi^{(5)} = 0$$

なるものとる。そして今後

(4.18) $\underline{\tau \geq 1 : 自然数}$ すなわち $\gamma = 1 + \frac{2}{2\tau+1} = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \cdots$

とする。

$$\eta^{(5)} := \int_z^w \{(w-s)(s-z)\}^\tau \left(\frac{d}{ds}\right)^{\tau+1}\psi^{(5)}(s)\,ds$$

及びそれに対応する entropy flux $q^{(5)}$ をとる。部分積分によって容易に

(4.19)
$$\left\{\begin{aligned}
\eta^{(5)} &= \tau!\,(w-z)^\tau\{\psi^{(5)}(w) + (-1)^{\tau-1}\psi^{(5)}(z)\} \\
&\quad + (-1)^{\tau+1}(\tau+1)!\sum_{j=1}^{\tau}(-1)^j\binom{\tau}{j}\binom{\tau}{j-1}\int_z^w (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j-1}\psi^{(5)}(s)\,ds \\
\sigma^{(5)} &= \theta(-1)^\tau\tau!\,(w-z)^{\tau+1}\psi^{(5)}(z) \\
&\quad + \theta(\tau+1)!\sum_{j=0}^{\tau}(-1)^{\tau+j+1}\binom{\tau}{j}\binom{\tau+1}{j+1}\int_z^w (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j}\psi^{(5)}(s)\,ds \\
\bar{\sigma}^{(5)} &= \theta\tau!\,(w-z)^{\tau+1}\psi^{(5)}(w) \\
&\quad + \theta(\tau+1)!\sum_{j=0}^{\tau}(-1)^{\tau+j+1}\binom{\tau}{j}\binom{\tau+1}{j}\int_z^w (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j}\psi^{(5)}(s)\,ds
\end{aligned}\right.$$

を得る。ここで $\sigma, \bar{\sigma}$ は entropy pair (η, q) に対し

$$q = \lambda_2\eta + \sigma = \lambda_1\eta + \bar{\sigma}$$

で定められる函数とする。これらの評価は次の§で行なう。

(iv) $\phi(s) = \mathrm{const}\cdot s^2$

$$\eta_* \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}}\frac{\Gamma(2\tau+2)}{\{\Gamma(\tau+1)\}^2}\int_z^w \{(w-s)(s-z)\}^\tau s^2\,ds$$

とし q_* をこれに対応する entropy flux とする。(1.6), $\tau = \frac{1-\theta}{2\theta}$ 等より簡単な計算によって

$$\eta_* = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma(\gamma-1)}, \quad q_* = \frac{1}{2}\rho u^3 + \frac{\rho^\gamma u}{\gamma-1}$$

を得るが、これは $\underline{力学的エネルギー}$ と呼ばれる。

今 Darboux の公式(4.7) を

$$\eta = (w-z)^{2\tau+1}\int_0^1 \{y(1-y)\}^\tau \phi\left(z+y(w-z)\right) dy$$

$$= \left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \rho \int_0^1 \{y(1-y)\}^\tau \phi\left(\frac{m}{\rho} + \frac{2y-1}{\theta}\rho^\theta\right) dy$$

と書き直すと ϕ: C^2 級のとき、(ρ, m) に関して

$$\eta_\rho = \left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\left[\int_0^1 \{y(1-y)\}^\tau \phi(\quad) dy + \int_0^1 \{y(1-y)\}^\tau \left\{-\frac{m}{\rho} + (2y-1)\rho^\theta\right\} \dot{\phi}(\quad) dy\right]$$

$$\eta_m = \left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \int_0^1 \{y(1-y)\}^\tau \dot{\phi}(\quad) dy$$

であるから、Prop 2.2 の不変領域 Σ_1 上 これらは有界で

$$\begin{cases} |\nabla\eta| \leq M_0 \sup_{z\leq s\leq w} \{|\phi(s)|, |\dot{\phi}(s)|\} \quad \text{on } \Sigma_1 \\ M_0 = M_0(\Sigma_1, \gamma) \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}, \frac{\partial}{\partial m}\right) \end{cases}$$

がいえる。又、部分積分等により

$$\eta_{\rho\rho} = \left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{1}{\rho}\int_0^1 \{y(1-y)\}^\tau \left[4y(1-y)\rho^{2\theta} + \{-u+(2y-1)\rho^\theta\}^2\right] \ddot{\phi}(\quad) dy$$

$$\eta_{\rho m} = \left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{1}{\rho}\int_0^1 \{y(1-y)\}^\tau \{-u+(2y-1)\rho^\theta\} \ddot{\phi}(\quad) dy$$

$$\eta_{mm} = \left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{1}{\rho}\int_0^1 \{y(1-y)\}^\tau \ddot{\phi}(\quad) dy \qquad \left(u = \frac{m}{\rho}\right)$$

となるから $\nabla^2\eta$ のつくる 2次形式は

$$\left(\nabla^2\eta\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right) = \left(\frac{2}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \frac{1}{\rho}\int_0^1 \{y(1-y)\}^\tau \ddot{\phi}(\quad)\left[\{\beta - \alpha u + (2y-1)\rho^\theta\alpha\}^2 + 4\rho^{2\theta} y(1-y)\alpha^2\right] dy$$

となり $\ddot{\phi}(\ )$ 以外の項はすべて正で $\phi = \text{const}\cdot s^2$ では $\ddot{\phi} \equiv \text{const}$. よって

$$\begin{cases} |(\nabla^2\eta Y, Y)| \leq M_1 \sup_{z\leq s\leq w} |\ddot{\phi}(s)| \cdot (\nabla^2\eta_* Y, Y) \\ M_1 = M_1(\gamma) \end{cases}$$

がいえる。又、

$$\nabla^2\eta_* = \begin{pmatrix} \frac{m^3}{\rho^3} + \rho^{\gamma-2} & -\frac{m}{\rho^2} \\ -\frac{m}{\rho^2} & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} u^2 + \rho^{\gamma-1} & -u \\ -u & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$(\nabla^2\eta_* \Upsilon, \Upsilon) = \frac{1}{\rho}\{(u\alpha-\beta)^2 + \alpha^2\rho^{\gamma-1}\} \qquad \left(\Upsilon = \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}\right)$$

となり この値の $|\Upsilon|=1$ なるときの最小値は

$$\frac{1}{2\rho}\left\{u^2+\rho^{\gamma-1}+1-\sqrt{(u^2+\rho^{\gamma-1}+1)^2-4\rho^{\gamma-1}}\right\}$$

$$= \frac{2\rho^{\gamma-2}}{u^2+\rho^{\gamma-1}+1+\sqrt{(u^2+\rho^{\gamma-1}-1)^2+4u^2}}$$

であるから $1<\gamma\leqslant 2$ に対して Σ_1 上

$$(\nabla^2\eta_*\Upsilon, \Upsilon) \geqslant 2\rho_{max}^{\gamma-2} > 0 \quad \left(\rho_{max} = \max_{U\in\Sigma_1}\rho > 0\right)$$

がいえる。これらをまとめると次がいえる。

Lemma 4.3

ϕ : C^2級 に対し Darboux の公式 (4.7) の定める weak entropy は Σ_1 上

$$|\nabla\eta| \leqslant \overline{M}_0 \quad , \quad \overline{M}_0 = \overline{M}_0(\Sigma_1, \gamma, \phi, \dot\phi)$$

$$|\nabla^2\eta| \leqslant \overline{M}_1\nabla^2\eta_* , \quad \overline{M}_1 = \overline{M}_1(\Sigma_1, \gamma, \ddot\phi)$$

$$\nabla^2\eta_* \geqslant \overline{M}_2 > 0 \quad \overline{M}_2 = \overline{M}_2(\Sigma_1, \gamma)$$

を満たす ($1<\gamma\leqslant 2$)。」

§5 weak entropy の評価

ここでは後の証明に使われる§4 (ii), (iii) の (η, q) に対する評価をまとめる。（Dingら[3]に従う。）

§4 の(iii)でとった $\psi^{(5)}$ を

$$(5.1)\quad \begin{cases} \phi_0^{(5)}(x) \in C_0^\infty(-1,1), & \int \phi_0^{(5)} = 0 \\ \operatorname{supp}\phi_0^{(5)} \subset [-1+\varepsilon_0, 1-\varepsilon_0] & \varepsilon_0 > 0 \text{ は十分小} \end{cases}$$

なる $\phi_0^{(5)}$ に対し

$$\psi^{(5)}(x) = \psi_n^{(5)}(x) \underset{\mathrm{def}}{=} n\,\phi_0^{(5)}(n(x-a))$$

ととる。それに対する entropy pair は

$$(5.2)\quad \begin{cases} \eta_n^{(5)} = (w-z)^{\tau}\{A\psi_n^{(5)}(w) + B\psi_n^{(5)}(z)\} + \sum_{j=1}^{\tau} \gamma_j^{\tau} \int_z^w (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j-1}\psi_n^{(5)}(s)\,ds \\ \sigma_n^{(5)} = -\theta(w-z)^{\tau+1} B\psi_n^{(5)}(z) + \theta\sum_{j=0}^{\tau} \delta_j^{\tau} \int_z^w (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j}\psi_n^{(5)}(s)\,ds \\ \bar{\sigma}_n^{(5)} = \theta(w-z)^{\tau+1} A\psi_n^{(5)}(w) + \theta\sum_{j=0}^{\tau} \xi_j^{\tau} \int_z^w (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j}\psi_n^{(5)}(s)\,ds \\ \qquad q_n^{(5)} = \lambda_2\eta_n^{(5)} + \sigma_n^{(5)} = \lambda_1\eta_n^{(5)} + \bar{\sigma}_n^{(5)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{ここで}\quad A = \tau!, \quad B = (-1)^{\tau-1}\tau! \\ \gamma_j^{\tau} = (-1)^{\tau+j}(\tau+1)!\binom{\tau}{j}\binom{\tau}{j-1} \\ \delta_j^{\tau} = -(-1)^{\tau+1+j}(\tau+1)!\binom{\tau}{j}\binom{\tau+1}{j+1} \\ \xi_j^{\tau} = (-1)^{\tau+1+j}(\tau+1)!\binom{\tau}{j}\binom{\tau+1}{j} \end{cases}$$

で与えられる（§4 (iii)）。以下 <u>添え字の'(5)'は省くことにする</u>

又、

$$\hat{\phi}_0(x) \underset{\mathrm{def}}{=} x\phi_0(x) + \int_{-\infty}^{x}\phi_0(y)\,dy = \left\{x\int_{-\infty}^{x}\phi_0(y)\,dy\right\}'$$

で $\hat{\phi}_0$ を定めると(5.1)より やはり $\hat{\phi}_0 \in C_0^\infty(-1,1)$ で、(5.1)の性質をすべてもつ。

よって前と同様に

$$\hat{\varphi}_n(x) \underset{\text{def}}{=} n\hat{\varphi}_0(n(x-a))$$

で $\hat{\varphi}_n$ をとり それに対し(5.2)と同様に(4.19)でとった entropy pair を $(\hat{\eta}_n, \hat{q}_n)$ とする。$\sigma, \bar{\sigma}$ 等もそれぞれ $\hat{\sigma}_n$, $\hat{\bar{\sigma}}_n$ 等とする。

これら,及び§4(ii) の weak pairs $(\eta^{(3)}, q^{(3)})$, $(\eta^{(4)}, q^{(4)})$ に対し

$$\begin{cases} B_n^{(3)} \underset{\text{def}}{=} \eta^{(3)} q_n - \eta_n q^{(3)} \\ B_n^{(4)} \underset{\text{def}}{=} \eta^{(4)} q_n - \eta_n q^{(4)} \\ B_n \underset{\text{def}}{=} \eta_n \hat{q}_n - \hat{\eta}_n q_n \end{cases}$$

と定める。 この $B_n^{(3)}, B_n^{(4)}, B_n$ の,$\{w \geq z\}$ のある compact set K_0 上での評価を求める。

K_0 を図5.1のように

$$(5.3)\quad \begin{cases} I := \left\{(w,z);\ w \geq z,\ -\frac{1}{n} < w-a \leq \frac{1}{n},\ -\frac{1}{n} \leq z-a < \frac{1}{n}\right\} \cap K_0 \\ Q := \left\{(w,z);\ \frac{1}{n} < w-a,\ z-a < -\frac{1}{n}\right\} \cap K_0 \\ \tilde{S}_w := \left\{(w,z);\ -\frac{1}{n} < w-a \leq \frac{1}{n},\ z-a < -\frac{1}{n}\right\} \cap K_0 \\ \tilde{S}_z := \left\{(w,z);\ \frac{1}{n} < w-a,\ -\frac{1}{n} \leq z-a < \frac{1}{n}\right\} \cap K_0 \\ II := K_0 \setminus (I \cup Q \cup \tilde{S}_w \cup \tilde{S}_z) \end{cases}$$

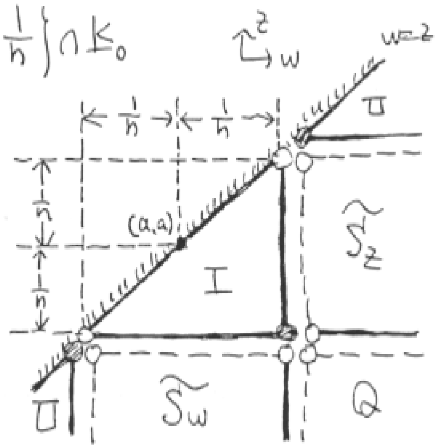


図5.1

と分割し,そのそれぞれで計算する。ここで

$$\begin{cases} \sigma^{(3)} = q^{(3)} - \lambda_2 \eta^{(3)} = -\theta(w-a)^{\tau+1}(a-z)^{\tau} X \\ \bar{\sigma}^{(3)} = q^{(3)} - \lambda_1 \eta^{(3)} = \theta(w-a)^{\tau}(a-z)^{\tau+1} X \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma^{(4)} = q^{(4)} - \lambda_2 \eta^{(4)} = -(\lambda_1 - a)(w-a)^{\tau}(a-z)^{\tau-1} X \\ \bar{\sigma}^{(4)} = q^{(4)} - \lambda_1 \eta^{(4)} = (\lambda_2 - a)(w-a)^{\tau-1}(a-z)^{\tau} X \end{cases}$$

$$\eta q' - \eta' q = \eta\sigma' - \eta'\sigma = \eta\bar{\sigma}' - \eta'\bar{\sigma}$$

や,$(w,z) \in K_0$ より w, z は有界であることにも注意する。

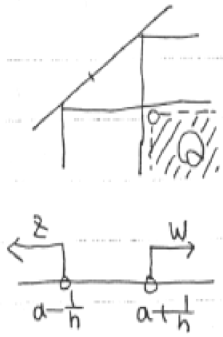
又,(5.2)の積分の項を

$$F_n^{(1)} := \sum_{j=1}^{\tau} \gamma_j^{\tau} \int_z^w (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j-1} \psi_n(s)\,ds\ ,\quad F_n^{(2)} := \sum_{j=0}^{\tau} \delta_j^{\tau} \int_z^w (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j} \psi_n(s)\,ds$$

$$F_n^{(3)} := \sum_{j=0}^{\tau} \zeta_j^{\tau} \int_z^w (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j} \psi_n(s)\,ds$$

とし、$\hat{\psi}_n$に対応するものはそれぞれ$\hat{F}_n^{(1)}$, $\hat{F}_n^{(2)}$, $\hat{F}_n^{(3)}$とする。

(i) Ω



$$\psi_n(w) = \psi_n(z) = \hat{\psi}_n(w) = \hat{\psi}_n(z) = 0$$

$$|F_n^{(1)}| = \left| \sum_{j=1}^{\tau} \gamma_j^{\tau} \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} \left\{ (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j-1} - (w-a)^{\tau-j}(a-z)^{j-1} \right\} \psi_n(s)\,ds \right|$$

$$\leq \frac{M}{n} \qquad M = M(K_0, \gamma, a, \phi_0)$$

(以下 M で上からおさえるような定数を表わすことにする。) 同様に

$$|F_n^{(2)}| \leq \frac{M}{n} \qquad M = M(K_0, \gamma, a, \phi_0)$$

となり

$$B_n^{(3)} = \theta\{(w-a)(a-z)\}^{\tau} \times F_n^{(2)} + \theta(w-a)^{\tau+1}(a-z)^{\tau} \times F_n^{(1)}$$

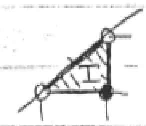
$$B_n^{(4)} = \theta\tau(w+z-2a)\{(w-a)(a-z)\}^{\tau-1} \times F_n^{(2)} + (\lambda_1-a)(w-a)^{\tau}(a-z)^{\tau-1} \times F_n^{(1)}$$

$$B_n = \theta F_n^{(1)} \hat{F}_n^{(2)} - \theta \hat{F}_n^{(1)} F_n^{(2)}$$

より

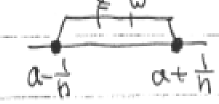
$$|B_n^{(3)}| \leq \frac{M}{n}, \quad |B_n^{(4)}| \leq \frac{M}{n}, \quad |B_n| \leq \frac{M}{n^2}, \quad M = M(K_0, \gamma, a, \phi_0)$$

(ii) I



$$|\eta^{(3)}| = |(w-a)^{\tau}(a-z)^{\tau}\chi| \leq \frac{1}{n^{2\tau}}$$

$$|\eta^{(4)}| = |\tau(w+z-2a)\{(w-a)(a-z)\}^{\tau-1}\chi| \leq \frac{M}{n^{2\tau-1}} \qquad M = M(\gamma)$$



同様に

$$|\sigma^{(3)}| \leq \frac{M}{n^{2\tau+1}}, \quad |\sigma^{(4)}| \leq \frac{M}{n^{2\tau}} \qquad M = M(\gamma)$$

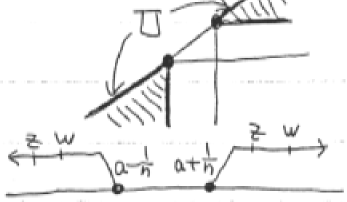
$$|\psi_n(w)| \leq nM, \quad |\psi_n(z)| \leq nM, \quad M = M(\phi_0)$$

$$|F_n^{(1)}| = \left| \sum_{j=1}^{\tau} \gamma_j^{\tau} \int_z^w (w-s)^{\tau-j}(s-z)^{j-1} \psi_n(s)\,ds \right| \leq \frac{M}{n^{\tau-1}} \qquad M = M(\gamma, \phi_0)$$

$$|F_n^{(2)}| \leq \frac{M}{n^{\tau}} \qquad M = M(\gamma, \phi_0)$$

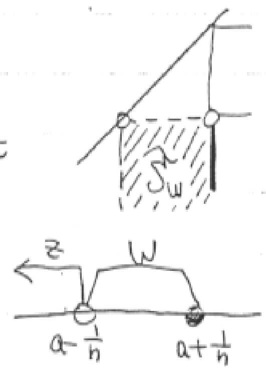
よって
$$|\eta_n| \le \frac{M}{n^{\tau-1}}, \quad |\sigma_n| \le \frac{M}{n^{\tau}}, \quad M = M(\gamma, \phi_0)$$
より故に
$$|B_n^{(3)}| \le \frac{M}{n^{3\tau}}, \quad |B_n^{(4)}| \le \frac{M}{n^{3\tau-1}}, \quad |B_n| \le \frac{M}{n^{2\tau-1}}, \quad M = M(\gamma, \phi_0)$$

(iii) Π



$$\eta^{(j)} = \sigma^{(j)} = \eta_n = \sigma_n \equiv 0 \quad (j=3,4)$$
より $\quad B_n^{(3)} = B_n^{(4)} = B_n \equiv 0$

(iv) $\tilde{S}_w$



$$\psi_n(z) = 0 \qquad |w-a| \le \frac{1}{n}$$
$$|\eta^{(3)}| \le \frac{M}{n^{\tau}}, \quad |\eta^{(4)}| \le \frac{M}{n^{\tau-1}}, \quad |\sigma^{(3)}| \le \frac{M}{n^{\tau+1}}, \quad |\sigma^{(4)}| \le \frac{M}{n^{\tau}}$$
$$M = M(k_0, \gamma, a)$$

又.
$$\begin{aligned}
\eta_n &= n(w-z)^{\tau} A \phi_0(n(w-a)) + \gamma_\tau^\tau (w-z)^{\tau-1} \int_{-1}^{n(w-a)} \phi_0(y)\,dy \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\tau-1} \gamma_j^\tau \int_{-1}^{n(w-a)} \left(w-a-\frac{y}{n}\right)^{\tau-j} \left(a+\frac{y}{n}-z\right)^{j-1} \phi_0(y)\,dy \\
&\quad + \gamma_\tau^\tau \int_{-1}^{n(w-a)} \left\{\left(a+\frac{y}{n}-z\right)^{\tau-1} - (w-z)^{\tau-1}\right\} \phi_0(y)\,dy \\
&= n(w-z)^{\tau} A \phi_0(n(w-a)) + \gamma_\tau^\tau (w-z)^{\tau-1} \int_{-1}^{n(w-a)} \phi_0 + G_n^{(1)}
\end{aligned}$$
として $G_n^{(1)}$ をとると
$$|G_n^{(1)}| \le \frac{M}{n} \qquad M = M(k_0, \gamma, a, \phi_0)$$
となり，又
$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \theta \delta_\tau^\tau (w-z)^{\tau} \int_{-1}^{n(w-a)} \phi_0 + \theta \delta_\tau^\tau \int_{-1}^{n(w-a)} \left\{\left(a+\frac{y}{n}-z\right)^{\tau} - (w-z)^{\tau}\right\} \phi_0(y)\,dy \\
&\quad + \theta \sum_{j=0}^{\tau-1} \delta_j^\tau \int_{-1}^{n(w-a)} \left(w-a-\frac{y}{n}\right)^{\tau-j} \left(a+\frac{y}{n}-z\right)^{j} \phi_0(y)\,dy \\
&= \theta \delta_\tau^\tau (w-z)^{\tau} \int_{-1}^{n(w-a)} \phi_0 + G_n^{(2)}
\end{aligned}$$

として $G_n^{(2)}$ をとると

$$|G_n^{(2)}| \leq \frac{M}{n},\quad M=M(K_0, \gamma, a, \phi_0)$$

となり、よって

$$\begin{aligned} B_n = {} & \theta\delta_\tau^\tau A n(w-z)^{2\tau}\left\{\phi_0(n(w-a))\int_{-1}^{n(w-a)}\hat{\phi}_0 - \hat{\phi}_0(n(w-a))\int_{-1}^{n(w-a)}\phi_0\right\} \\ & +(w-z)^\tau\left\{nA\phi_0(n(w-a))\hat{G}_n^{(2)} - nA\hat{\phi}_0(n(w-a))G_n^{(2)}\right\} \\ & +\left[\left\{\gamma_\tau^\tau(w-z)^{\tau-1}\int_{-1}^{n(w-a)}\phi_0 + G_n^{(1)}\right\}\hat{G}_n^{(2)} - \left\{\gamma_\tau^\tau(w-z)^{\tau-1}\int_{-1}^{n(w-a)}\hat{\phi}_0 + \hat{G}_n^{(1)}\right\}G_n^{(2)}\right] \\ = {} & n(w-z)^{2\tau}A_1 + (w-z)^\tau A_2 + A_3 \end{aligned}$$

と A_1, A_2, A_3 を定めると

$$|A_2| \leq M\left\{|\phi_0(n(w-a))| + \left|\int_{-1}^{n(w-a)}\phi_0\right|\right\},\quad |A_3| \leq \frac{M}{n},\quad M=M(K_0,\gamma,a,\phi_0)$$

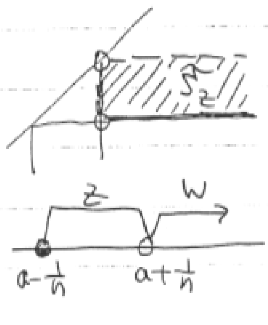
であり

$$\int_{-1}^{x}\hat{\phi}_0 = x\int_{-1}^{x}\phi_0,\qquad \theta\delta_\tau^\tau A = -\frac{1+\theta}{2}A^2$$

より

$$A_1 = \frac{1+\theta}{2}A^2\left(\int_{-1}^{n(w-a)}\phi_0\right)^2$$

(v) $\widehat{S_z}$



ここでは $\sigma^{(3)}, \sigma^{(4)}, \sigma_n$ のかわりに $\bar{\sigma}^{(3)}, \bar{\sigma}^{(4)}, \bar{\sigma}_n$ をとれば (iv) の計算でちょうど w と z が入れかわったような形になって (iv) と同様に計算でき

$$\begin{cases} |B_n^{(3)}| \leq \dfrac{M}{n^3},\quad |B_n^{(4)}| \leq \dfrac{M}{n^{\tau-1}} \\ B_n = n(w-z)^{2\tau}C_1 + (w-z)^\tau C_2 + C_3 \\ C_1 = \dfrac{1+\theta}{2}A^2\left(\displaystyle\int_{-1}^{n(z-a)}\phi_0\right)^2,\quad |C_2| \leq M\left\{|\phi_0(n(z-a))| + \left|\displaystyle\int_{-1}^{n(z-a)}\phi_0\right|\right\} \\ |C_3| \leq \dfrac{M}{n} \qquad M=M(K_0,\gamma,a,\phi_0) \end{cases}$$

を得る。

以上 (i)～(v) をまとめると次を得る。

Lemma 5.1

$$|B_n^{(3)}| \le \frac{M}{n}, \quad |B_n^{(4)}| \leqslant M \qquad \text{on } K_0$$

$$|B_n| \leqslant \frac{M}{n} \qquad \text{on } Q \cup I \cup II$$

$$B_n = n(w-z)^{2\tau} A_1 + (w-z)^{\tau} A_2 + A_3 \qquad \text{on } \tilde{S}_w$$

$$B_n = n(w-z)^{2\tau} C_1 + (w-z)^{\tau} C_2 + C_3 \qquad \text{on } \tilde{S}_z$$

$$A_1 = \frac{1+\theta}{2} A^2 \left(\int_{-1}^{n(w-a)} \phi_0 \right)^2, \quad C_1 = \frac{1+\theta}{2} A^2 \left(\int_{-1}^{n(z-a)} \phi_0 \right)^2$$

$$|A_2| \leqslant M \left\{ \left| \phi_0(n(w-a)) \right| + \left| \int_{-1}^{n(w-a)} \phi_0 \right| \right\}$$

$$|C_2| \leqslant M \left\{ \left| \phi_0(n(z-a)) \right| + \left| \int_{-1}^{n(z-a)} \phi_0 \right| \right\}$$

$$|A_3| \leqslant \frac{M}{n}, \quad |C_3| \leqslant \frac{M}{n}$$

$$M = M(K_0, \gamma, a, \phi_0) \quad \lrcorner$$

§6 $\eta_t + q_x$ の計算

ここでは Cor 3.8 を使うための $\eta_t + q_x$ 等の計算を行なう。(DiPerna [6], Ding ら [2] に従う。)

§1 の

$$D_1 = \{(x,t);\ t \geqq 0,\ x \geqq x(t)\},\quad D_2 = \{(x,t);\ t \geqq 0,\ x_1(t) \leqq x \leqq x_2(t)\}$$

に対し, D_1^Δ, D_2^Δ を

$$D_1^\Delta := \{(x,t);\ t \geqq 0,\ x \geqq x^\Delta(t)\},\quad D_2^\Delta := \{(x,t);\ t \geqq 0,\ x_1^\Delta(t) \leqq x \leqq x_2^\Delta(t)\}$$

と定める。又.

$$\Omega \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t \ :\ \underline{\text{bounded}}\ \text{open subset}$$

を fix し. m, ℓ : 自然数を十分大にとって, K を

$$\text{(6.1)}\quad \left\{ \begin{array}{l} K := \{(x,t);\ 0 \leqq t < T,\ |x| < J\} \supset \Omega \cap \{(x,t);\ t \geqq 0\} \\ \qquad J = 2\ell\Delta x,\ T = m\Delta t \end{array} \right.$$

と定める。 そして (4.7), (4.8) の entropy pair (η, q) に対し

$$\iint \{\eta(U^\Delta)\phi_t + q(U^\Delta)\phi_x\}\,dx\,dt \qquad (\phi \in C_0^1(\Omega))$$

を計算する。$U=0$ のとき $\eta(U) = q(U) = 0$ であるから D_1^Δ 又は D_2^Δ でのみ考えればよい。

(i) まず (1.1), (1.2) の方を考える。

K は (6.1) に加え 次を満たす最小のものとする:

$$K \supset \{(x,t);\ x = x(t),\ 0 \leqq t < T\} \cup \{(x,t);\ x = x^\Delta(t),\ 0 \leqq t < T\}.$$

($0 \leqq t < T$ で $|x(t)|, |x^\Delta(t)| \leqq T\|u_1\|_{L^\infty(0,T)}$ であるから $\Delta x < C$ とすれば T, J は Ω と Σ_1 にのみ依存するもので上からおさえることができる。)

$U^\Delta(x,t)$ はほとんど至るところ smooth solution で, $\eta(U^\Delta), q(U^\Delta)$ は shock wave 及び $t = n\Delta t$ $(1 \leqq n < m)$ の上 以外で連続だから (4.1) 及び divergence thm より

$$\iint_{D_1^\Delta} \eta(U^\Delta)\phi_t + q(U^\Delta)\phi_x = \sum_{n=1}^{m} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} dt \int_{x^\Delta(t)}^{J} \{(\eta\phi)_t + (q\phi)_x\}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \Bigg[\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J} (\eta(U^\Delta)\phi)(x, n\Delta t - 0)\,dx - \int_{x^\Delta((n-1)\Delta t)}^{J} (\eta(U^\Delta)\phi)(x, (n-1)\Delta t + 0)\,dx$$

$$+ \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \sum_{\text{shock}}^{n} \{(\sigma[\eta] - [q])\phi\}\,dt$$

$$+\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t}\left(\{\eta(U^\Delta)\dot{x}^\Delta(t)-q(U^\Delta)\}\phi\right)(x^\Delta(t),t)\,dt\ \Big]$$

$\left(\begin{array}{ll}\sum_{shock}^{n} & : (n-1)\Delta t < t < n\Delta t \text{ でのすべての shock にわたる和} \\ \sigma & : \text{その shock の shock speed} \\ [\ ] & : \text{shock での(右岸の値)}-\text{(左岸の値)}\end{array}\right)$

$$= -\int_0^J \eta(U^\Delta(x,+0))\phi(x,0)\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{m-1}\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J}\underbrace{\{\eta(U^\Delta(x,n\Delta t-0))-\eta(U^\Delta(x,n\Delta t+0))\}}_{\shortparallel\ [\eta(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0}}\phi(x,n\Delta t)\,dx$$

$[\eta(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0}$ のように書くことにする。

$$+\int_0^T \sum_{shock}\{(\sigma[\eta]-[q])\phi\}\,dt$$

$$+\int_0^T\left(\{\eta(U^\Delta)\dot{x}^\Delta(t)-q(U^\Delta)\}\phi\right)(x^\Delta(t),t)\,dt$$

($\sum_{shock}$: $K\cap D_1^\Delta$ 内の shock すべてにわたる和)

となり これを下の4つの部分に分ける:

$$\left[\begin{aligned}
N(\phi) &:= -\int_0^J \eta(U^\Delta(x,+0))\phi(x,0)\,dx\\
L(\phi) &:= \sum_{n=1}^{m-1}\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J}[\eta(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0}\phi(x,n\Delta t)\,dx\\
\Sigma(\phi) &:= \int_0^T \sum_{shock}\{(\sigma[\eta]-[q])\phi\}\,dt\\
\Pi(\phi) &:= \int_0^T\left(\{\eta(U^\Delta)\dot{x}^\Delta(t)-q(U^\Delta)\}\phi\right)(x^\Delta(t),t)\,dt
\end{aligned}\right.$$

今、§2に従って

$$x^\Delta(n\Delta t)\in\left((2j_0-2)\Delta x,\ 2j_0\Delta x\right]\quad (j_0=j_0(n\,;x^\Delta(t)) : \text{整数})$$

とすると (図2.8)

$$L(\phi)=\sum_{n=1}^{m-1}\left\{\sum_{j=j_0+1}^{\ell-1}\int_{2j\Delta x}^{(2j+2)\Delta x}[\eta(U^\Delta)]\phi\,dx+\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{(2j_0+2)\Delta x}[\eta(U^\Delta)]\phi\,dx\right\}$$

であるから これを次の2つの部分に分ける:

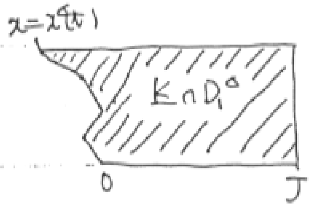
$$
\begin{cases}
L_1(\phi) := \displaystyle\sum_{n=1}^{m-1} \left\{ \sum_{j=j_0+1}^{l-1} \phi\big((2j+1)\Delta x, n\Delta t\big) \int_{2j\Delta x}^{(2j+2)\Delta x} [\eta(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0} dx \right. \\
\qquad\qquad \left. + \phi(2j_0\Delta x, n\Delta t) \displaystyle\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{(2j_0+2)\Delta x} [\eta(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0} dx \right\} \\
L_2(\phi) := \displaystyle\sum_{n=1}^{m-1} \left[\sum_{j=j_0+1}^{l-1} \int_{2j\Delta x}^{(2j+2)\Delta x} \big\{\phi(x, n\Delta t) - \phi((2j+1)\Delta x, n\Delta t)\big\} [\eta(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0} dx \right. \\
\qquad\qquad \left. + \displaystyle\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{(2j_0+2)\Delta x} \big\{\phi(x, n\Delta t) - \phi(2j_0\Delta x, n\Delta t)\big\} [\eta(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0} dx \right]
\end{cases}
$$

この評価をする前に §4 (iv) の η_*, q_* に関し計算をする。

a.e. defined な measurable な函数:

$$\eta_*(U^\Delta(x,t))_t + q_*(U^\Delta(x,t))_x$$

は、U^Δ が a.e smooth solution であるから a.e. 0 。よってこれを K 上積分すると 今と同様の計算により



$$
\begin{aligned}
0 &= \iint_K \eta_*(U^\Delta)_t + q_*(U^\Delta)_x = \iint_{K\cap D_i^\Delta} \\
&= \int_{x^\Delta(T)}^{J} \eta_*(U^\Delta(x, T-0))\,dx - \int_0^J \eta_*(U^\Delta(x,+0))\,dx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{m-1} \int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J} [\eta_*(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0} dx + \int_0^T \sum_{\text{shock}} (\sigma[\eta_*] - [q_*])\,dt \\
&\quad + \int_0^T q_*(U^\Delta(J-0,t))\,dt + \int_0^T \big\{\eta_*(U^\Delta(x^\Delta(t),t))\dot{x}^\Delta(t) - q_*(U^\Delta(x^\Delta(t),t))\big\}\,dt
\end{aligned}
$$

ここで

$$\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J} [\eta_*(U^\Delta)]\,dx = \sum_{j=j_0+1}^{l-1} \int_{2j\Delta x}^{(2j+2)\Delta x} [\eta_*(U^\Delta)]\,dx + \int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{(2j_0+2)\Delta x} [\eta_*(U^\Delta)]\,dx$$

は $\rho^\Delta(x, n\Delta t+0) > 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
[\eta_*(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0} &= \nabla\eta_*(U^\Delta(x, n\Delta t+0))[U^\Delta]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0} \\
&\quad + \int_0^1 (1-y)[U^\Delta]^t \nabla^2\eta_*\big(U^\Delta(x, n\Delta t+0) + y[U^\Delta]\big)[U^\Delta]\,dy
\end{aligned}
$$

であり $U^\Delta(x, n\Delta t+0)$ は $U^\Delta(x, n\Delta t-0)$ を積分で平均したものだから

$$\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J} [\eta_*(U^\Delta)]\,dx = \int_{\rho^\Delta(x, n\Delta t+0)>0} dx \int_0^1 (1-y)[U^\Delta]^t \nabla^2\eta_*\big(U^\Delta(x, n\Delta t+0) + y[U^\Delta]\big)[U^\Delta]\,dy$$

$\left(\begin{array}{l}\rho^{\Delta}(x, n\Delta t+0)=0 \text{ ならば その平均をとる区間で } \rho^{\Delta}(x, n\Delta t-0)\equiv 0\text{。そこでは } m^{\Delta}\equiv 0\text{。よってそこでは} \\ \overline{U}^{\Delta}\equiv 0 \ (t=n\Delta t-0 \text{ でも } t=n\Delta t+0 \text{ でも}) \text{ より } [\eta_*(\overline{U}^{\Delta})]\equiv 0 \text{ となりそこでは左辺の積分は } 0\text{。}\end{array}\right)$

又

$$\{q_*(\overline{U}^{\Delta})-\dot{x}^{\Delta}(t)\eta_*(\overline{U}^{\Delta})\}(x^{\Delta}(t),t)=\begin{cases}\left\{\frac{1}{\gamma}(\rho^{\Delta})^{\gamma-1}m^{\Delta}\right\}(x^{\Delta}(t),t) & (\rho^{\Delta}(x^{\Delta}(t),t)>0)\\ 0 & (\rho^{\Delta}(x^{\Delta}(t),t)=0)\end{cases}$$

より故に（$\overline{U}^{\Delta}$ の一様有界評価 Prop 2.3 より）

$$(6.2)\quad \sum_{n=1}^{m-1}\int_{\rho^{\Delta}(x,n\Delta t+0)>0}dx\int_0^1(1-y)[\overline{U}^{\Delta}]^t\nabla^2\eta_*\left(\overline{U}^{\Delta}(x,n\Delta t+0)+y[\overline{U}^{\Delta}]\right)[\overline{U}^{\Delta}]dy+\int_0^T\sum_{\text{shock}}(\sigma[\eta_*]-[q_*])dt$$

$$=\int_0^J\eta_*(\overline{U}^{\Delta}(x,+0))dx-\int_{x^{\Delta}(T)}^J\eta_*(\overline{U}^{\Delta}(x,T-0))dx+\frac{1}{\gamma}\int_0^T\{(\rho^{\Delta})^{\gamma-1}m^{\Delta}\}(x^{\Delta}(t),t)dt-\int_0^T q_*(\overline{U}^{\Delta}(J-0,t))dt$$

$$\leq M\quad,\quad M=M(\Sigma_1,\|u_1\|_{L^\infty},\gamma,T,J)=M(\Sigma_1,\gamma,\Omega)$$

を得る。lemma 4.3 の

$$|\nabla^2\eta|\leq\overline{M}_1\nabla^2\eta_*\ ,$$

及び $\rho>0$ での shock に対して成り立つ、

$$|\sigma[\eta]-[q]|\leq\overline{M}_1\ (\sigma[\eta_*]-[q_*])$$

（$\sigma[\eta]-[q]$ を Taylor 展開で $\nabla^2\eta$ に帰着させることにより得る。詳しくは Dingら[2]。）

を使えば (6.2) より

$$|\Sigma(\phi)|\leq M\|\phi\|_{C(\Omega)}\ ,\ M=M(\gamma,\eta,\Sigma_1,\Omega)$$

$$|L_1(\phi)|\leq\|\phi\|_{C(\Omega)}\sum_{n=1}^{m-1}\left\{\sum_{j=j_0+1}^{\ell-1}\left|\int_{2j\Delta x}^{(2j+2)\Delta x}[\eta(\overline{U}^{\Delta})]dx\right|+\left|\int_{x^{\Delta}(n\Delta t)}^{(2j_0+2)\Delta x}[\eta(\overline{U}^{\Delta})]dx\right|\right\}$$

$$\leq\|\phi\|_{C(\Omega)}\sum_{n=1}^{m-1}\int_{\rho^{\Delta}(x,n\Delta t+0)>0}dx\int_0^1(1-y)\left|[\overline{U}^{\Delta}]^t\nabla^2\eta\left(\overline{U}^{\Delta}(x,n\Delta t+0)+y[\overline{U}^{\Delta}]\right)[\overline{U}^{\Delta}]\right|dy$$

$$\leq M\|\phi\|_{C(\Omega)}\qquad M=M(\gamma,\eta,\Sigma_1,\Omega)$$

又、N Π は $\overline{U}^{\Delta}$ の一様有界性 Prop 2.3 より明らかに

$$\left.\begin{array}{l}|N(\phi)|\leq M\|\phi\|_{C(\Omega)}\\ |\Pi(\phi)|\leq M\|\phi\|_{C(\Omega)}\end{array}\right.\qquad M=M(\gamma,\eta,\Sigma_1,\Omega)$$

よって

$$(6.3)\qquad |(N+L_1+\Sigma+\Pi)(\phi)|\leq M\|\phi\|_{C(\Omega)}\ ,\ M=M(\gamma,\eta,\Sigma_1,\Omega)$$

がでる。又 (6.4) と、lemma 4.3

$$\nabla^2\eta_*\geq\overline{M}_2\qquad(\overline{M}_2=\overline{M}_2(\gamma,\Sigma_1))$$

とから（$\rho^\Delta(x, n\Delta t+0)=0$ では $[\mathbb{U}^\Delta]=0$ より）

(6.4) $$\sum_{n=1}^{m-1}\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J}\left|[\mathbb{U}^\Delta]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0}\right|^2 dx \leqq M, \quad M=M(\gamma, \Sigma_1, \Omega)$$

を得る。今，$0<\alpha<1$ に対し

$$|L_2(\phi)| \leqq 2^\alpha \|\phi\|_{C^\alpha(\bar\Omega)}\sum_{n=1}^{m-1}\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J}(\Delta x)^\alpha |[\eta(\mathbb{U}^\Delta)]|dx$$

$$\leqq 2^{\alpha-1}\|\phi\|_{C^\alpha(\bar\Omega)}\sum_{n=1}^{m-1}\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J}\left\{(\Delta x)^{\alpha+\frac12}+(\Delta x)^{\alpha-\frac12}|[\eta(\mathbb{U}^\Delta)]|^2\right\}dx$$

(2.7)，lemma 4.3 より

$$m\Delta x=\Lambda_1 m\Delta t=\Lambda_1 T, \quad |\nabla\eta|\leqq M, \quad M=M(\Sigma_1, \gamma, \eta)$$

より

(6.5) $$|L_2(\phi)|\leqq M\|\phi\|_{C^\alpha(\bar\Omega)}\left\{(\Delta x)^{\alpha-\frac12}+(\Delta x)^{\alpha-\frac12}\sum_{n=1}^{m-1}\int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J}|[\mathbb{U}^\Delta]|^2dx\right\}$$

$$\leqq M(\Delta x)^{\alpha-\frac12}\|\phi\|_{C^\alpha(\bar\Omega)}, \quad M=M(\Sigma_1, \gamma, \eta, \Omega, \alpha)$$

が $0<\alpha<1$ なる任意の α についていえる。

(ii) 次に (1.1)(1.3) の方を考える。

この場合は

$$K\supset\{(x,t);\ x=x_1(t), x_2(t), x_1^\Delta(t), x_2^\Delta(t), \quad 0\leqq t<T\}$$

とする。

$$\iint_{D_2^\Delta}\{\eta(\mathbb{U}^\Delta)\phi_t+q(\mathbb{U}^\Delta)\phi_x\}$$

$$=-\int_0^L\eta(\mathbb{U}^\Delta(x,+0))\phi(x,0)dx+\sum_{n=1}^{m-1}\int_{x_1^\Delta(n\Delta t)}^{x_2^\Delta(n\Delta t)}[\eta(\mathbb{U}^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0}\phi(x,n\Delta t)dx$$

$$+\int_0^T\sum_{\text{shock}}\{(\sigma[\eta]-[q])\phi\}dt$$

$$+\int_0^T\left(\{q(\mathbb{U}^\Delta)-\dot x_2^\Delta(t)\eta(\mathbb{U}^\Delta)\}\phi\right)(x_2^\Delta(t),t)dt$$

$$-\int_0^T\left(\{q(\mathbb{U}^\Delta)-\dot x_1^\Delta(t)\eta(\mathbb{U}^\Delta)\}\phi\right)(x_1^\Delta(t),t)dt$$

であり，(i) と同様に これを次の4つに分けると：

$$
\begin{cases}
N(\phi) := -\int_0^L \eta(U^\Delta(x,+0))\,\phi(x,0)\,dx \\
L(\phi) := \sum_{n=1}^{m-1} \int_{x_1^\Delta(n\Delta t)}^{x_2^\Delta(n\Delta t)} [\eta(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0}\,\phi(x,n\Delta t)\,dx \\
\Sigma(\phi) := \int_0^T \sum_{shock} \{(\sigma[\eta]-[q])\phi\}\,dt \\
\Pi(\phi) := \int_{x=x_2^\Delta(t)} \{q(U^\Delta)-\dot{x}_2^\Delta(t)\eta(U^\Delta)\}\phi\,dt - \int_{x=x_1^\Delta(t)} \{q(U^\Delta)-\dot{x}_1^\Delta(t)\eta(U^\Delta)\}\phi\,dt
\end{cases}
$$

N, Π は一様有界性 Prop 2.3 より (i) と同様に評価される。L と Σ に関しては

$$
\begin{aligned}
0 &= \iint_{K\cap D_2^\Delta} \{\eta_*(U^\Delta)_t + q_*(U^\Delta)_x\} \\
&= \int_{x_1^\Delta(T)}^{x_2^\Delta(T)} \eta_*(U^\Delta(x,T-0))\,dx - \int_0^L \eta_*(U^\Delta(x,+0))\,dx \\
&\quad + \sum_{n=1}^{m-1} \int_{x_1^\Delta(n\Delta t)}^{x_2^\Delta(n\Delta t)} [\eta_*(U^\Delta)]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0}\,dx + \int_0^T \sum_{shock} (\sigma[\eta_*]-[q_*])\,dt \\
&\quad + \int_{\substack{x=x_2^\Delta(t)\\ 0\le t<T}} \{q_*(U^\Delta)-\dot{x}_2^\Delta(t)\eta_*(U^\Delta)\}\,dt - \int_{\substack{x=x_1^\Delta(t)\\ 0\le t<T}} \{q_*(U^\Delta)-\dot{x}_1^\Delta(t)\eta_*(U^\Delta)\}\,dt
\end{aligned}
$$

であるから これを (i) と同様に変型すれば (6.2) と同様の評価を得る(積分領域がかわるのみ)。(6.4) も積分区間がかわるだけで同様に成り立ち、結局 (6.3) (6.5) が今の場合もいえる。

よって (i) (ii) どちらの場合も

$$
(6.6)\quad
\begin{cases}
\iint \{\eta(U^\Delta)\phi_t + q(U^\Delta)\phi_x\} = (N+L_1+\Sigma+\Pi)(\phi) + L_2(\phi) \\
|(N+L_1+\Sigma+\Pi)(\phi)| \le M\|\phi\|_{C(\Omega)} \\
|L_2(\phi)| \le M(2\Delta x)^{\alpha-\frac{1}{2}}\|\phi\|_{C_0^\alpha(\Omega)}, \quad M=M(\Sigma_1,\gamma,\eta,\Omega)
\end{cases}
$$

が $0<\alpha<1$ なる任意の α, 任意の $\phi\in C_0^1(\Omega)$ に対していえる。この評価と Prop 2.3, Thm 3.9, Thm 3.10, Thm 3.12 から容易に次の結果を得る(詳しくは DiPerna [6], Ding ら [2] 参照)。

Proposition 6.1

$\Omega \subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$: bounded open subset

(η, q) : (4.7) (4.8) で与えられる smooth weak entropy に対し §2の (1.1)(1.2) 及び (1.1)(1.3) の $U^\Delta(x,t)$ に対して、

$$\eta(U^\Delta(x,t))_t + q(U^\Delta(x,t))_x \in (H^{-1}_{loc}(\Omega) \text{ のある compact set})$$ ⌟

又、今までの評価、計算を使うと 次が言える。

Proposition 6.2

$$\left| \iint_{D_j} (\rho^\Delta \phi_t + m^\Delta \phi_x)\, dx\, dt + \int_{I_j} \rho_0(x)\phi(x,0)\, dx \right| \leq M\sqrt{\Delta x}$$

$$\left| \iint_{D_j} \left[m^\Delta \psi_t + \left\{ \frac{(m^\Delta)^2}{\rho^\Delta} + P(\rho^\Delta) \right\} \psi_x \right] dx\, dt + \int_{I_j} m_0(x)\psi(x,0)\, dx \right| \leq M\sqrt{\Delta x}$$

$$\phi,\ \psi \in C_0^1(\Omega) \quad (j=1,2)$$

$j=1$ のときは $I_1 = (0, \infty)$, $\psi(x(t), t) = 0$ (任意の $t>0$ に対し)

$j=2$ のときは $I_2 = (0, L)$, $\psi(x_1(t), t) = \psi(x_2(t), t) = 0$ (任意の $t>0$ に対し)

$M = M(\Sigma_1, \Omega, \|\phi\|_{C^1(\Omega)}, \|\psi\|_{C^1(\Omega)})$ ⌟

(Proof)

(1.1) (1.2) の方を考える。

前の計算で $\eta = \rho$ $q = m$ とすれば

$$\iint (\rho^\Delta \phi_t + m^\Delta \phi_x)$$

$$= -\int_0^J \rho^\Delta(x,0)\phi(x,0)\, dx + \sum_{n=1}^{m-1} \int_{x^\Delta(n\Delta t)}^J [\rho^\Delta]_{t=n\Delta t+0}^{t=n\Delta t-0} \phi(x, n\Delta t)\, dx$$

(shock では R-H condition より $\sigma[\rho] - [m] = 0$

壁では $\rho^\Delta(x^\Delta(t), t)\dot{x}^\Delta(t) - m^\Delta(x^\Delta(t), t) = 0$)

$$= -\int_0^J \rho^\Delta(x,0)\phi(x,0)\, dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{m-1} \left[\sum_{j=j_0+1}^{l-1} \int_{2j\Delta x}^{(2j+2)\Delta x} \{\phi(x, n\Delta t) - \phi((2j+1)\Delta x, n\Delta t)\} [\rho^\Delta]\, dx \right.$$

$$\left. + \int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{(2j_0+2)\Delta x} \{\phi(x, n\Delta t) - \phi(2j_0\Delta x, n\Delta t)\} [\rho^\Delta]\, dx \right]$$

故に

(6.7) $$\left| \iint (\rho^\Delta \phi_t + m^\Delta \phi_x) + \int_{x\geq 0} \rho^\Delta(x,0)\phi(x,0)\,dx \right|$$

$$\leq 2\Delta x \|\phi_x\|_{C(\Omega)} \sum_{n=1}^{m-1} \int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J} |[\rho^\Delta]|\,dx$$

$$\leq M\sqrt{\Delta x}\,\|\phi_x\|_{C(\Omega)} \sqrt{\sum_{n=1}^{m-1} \int_{x^\Delta(n\Delta t)}^{J} |[\rho^\Delta]|^2\,dx} \quad \leq M\sqrt{\Delta x}$$

$$M = M(\|\phi\|_{C^1(\Omega)}, \Sigma_1, \Omega) \quad ((6.4)より)$$

(6.8) $$\left| \int_{x\geq 0} \rho^\Delta(x,0)\phi(x,0)\,dx - \int_{x\geq 0} \rho_0(x)\phi(x,0)\,dx \right|$$

$$= \left| \sum_{j=0}^{l-1} \int_{2j\Delta x}^{(2j+2)\Delta x} \{\rho^\Delta(x,0) - \rho_0(x)\}\{\phi(x,0) - \phi((2j+1)\Delta x, 0)\}\,dx \right|$$

($\rho^\Delta(x,0)$ は $\rho_0(x)$ の積分による近似より)

$$\leq M\Delta x \qquad M = M(\Sigma_1, \Omega, \|\phi\|_{C^1(\Omega)})$$

となる。又、(2.8)より

$$x(n\Delta t) = x^\Delta(n\Delta t) \qquad (n=0,1,\cdots)$$

であり よって 容易に

(6.9) $$|x(t) - x^\Delta(t)| \leq 2\|u_1\|_{L^\infty} \cdot \Delta t$$

を得るから $x = x(t)$ と $x = x^\Delta(t)$ の $0 \leq t < T$ の部分の囲む面積は

$$S = \int_0^T |x(t) - x^\Delta(t)|\,dt \leq M\Delta t \qquad M = M(\Omega, \|u_1\|_{L^\infty})$$

となり、Π^Δ は D_1^Δ の外では 0 であるから

(6.10) $$\left| \iint_{D_1} (\rho^\Delta \phi_t + m^\Delta \phi_t) - \iint_{D_1^\Delta} (\rho^\Delta \phi_t + m^\Delta \phi_x) \right|$$

$$\leq 2S\,\|\phi\|_{C^1(\Omega)} \cdot \sup|\Pi^\Delta|$$

$$\leq M\Delta x \qquad M = M(\Sigma_1, \Omega, \|\phi\|_{C^1(\Omega)})$$

よって(6.7)(6.8)(6.10)より Prop 6.2の最初のものは いえる。

第2のものは 今と同様に計算すると

$$\iint \left\{ m^\Delta \psi_t + \left(\frac{(m^\Delta)^2}{\rho^\Delta} + P(\rho^\Delta) \right) \psi_x \right\}$$

の計算で残ってくる壁での積分:

$$\int_0^T P(\rho^\Delta(x^\Delta(t),t))\,\psi(x^\Delta(t),t)\,dt$$

以外は今と全く同様にいえる。この項は、$\psi(x(t),t)=0$ より絶対値が

$$\int_0^T P(\rho^\Delta(x^\Delta(t),t))\,|\psi(x^\Delta(t),t)-\psi(x(t),t)|\,dt$$

$$\leqq M\Delta x \quad , \quad M=M(\Sigma_1, \|\psi\|_{C^1(\Omega)}, \Omega)$$

でおさえられるからやはりいえる。(1.1)(1.3)の方も同様。

//

§7 収束性

ここではTartarの定理を用いて近似解から解への収束部分列がとれることをいう（DiPerna[7]、Dingら[3]に従う）。

U^ΔはProp 2.3によって一様有界であるからThm 3.5によって

ある可算列 $\{\Delta^{(1)}\} = \{\Delta^{(1)}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(\Delta^{(1)}x = \Delta^{(1)}_n x \downarrow 0 \ (n\to\infty))$，及び

あるmeasureの族 $\{\nu_{(x,t)}\}_{(x,t)\in\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_t}$ a.e.（Young measure）があって

$$(7.1)\quad \begin{cases} \bullet\ \operatorname{supp}\nu_{(x,t)} \subset \Sigma_1 \\ \circ\ \text{任意の、}\Sigma_1\text{の近傍で連続な函数}f(U)\text{に対して} \\ \qquad f(U^{\Delta^{(1)}}) \longrightarrow \bar{f} = \langle \nu_{(x,t)}(U), f(U)\rangle \quad L^\infty\text{weak}^* \end{cases}$$

とできる。よって(4.7)(4.8)で与えられるsmooth weak entropy pair (η, q)に対し

$$(7.2)\quad \begin{cases} \eta(U^{\Delta^{(1)}}) \longrightarrow \langle \nu, \eta\rangle \\ q(U^{\Delta^{(1)}}) \longrightarrow \langle \nu, q\rangle \end{cases} \quad L^\infty\text{ weak}^*$$

がいえる。又、Ω: bounded，(η, q)，(η', q')：(4.7)(4.8)で与えられるsmooth pairsに対し，

$$v^{\Delta^{(1)}} := (q(U^{\Delta^{(1)}}), \eta(U^{\Delta^{(1)}})),\quad w^{\Delta^{(1)}} := (-\eta'(U^{\Delta^{(1)}}), q'(U^{\Delta^{(1)}}))$$

とすれば(7.2)，Prop 6.1 Cor 3.8，及び

$$\operatorname{div} v^{\Delta^{(1)}} = \eta(U^{\Delta^{(1)}})_t + q(U^{\Delta^{(1)}})_x$$
$$\operatorname{curl} w^{\Delta^{(1)}} = \eta'(U^{\Delta^{(1)}})_t + q'(U^{\Delta^{(1)}})_x$$

から、

ある部分列 $\{\Delta^{(2)}\}\ (\subset\{\Delta^{(1)}\})$ があって $(\Delta^{(2)} = \Delta^{(2)}(\Omega, \eta, q, \eta', q'))$

$$(7.3)\quad (\eta q' - \eta' q)(U^{\Delta^{(2)}}) \to \langle\nu,\eta\rangle\langle\nu,q'\rangle - \langle\nu,\eta'\rangle\langle\nu,q\rangle \quad L^\infty(\Omega)\text{ weak}^*$$

となるようにできる。よって

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \quad \bigcup_n \Omega_n = \mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_t$$

なるbounded open setの列 $\{\Omega_n\}$ をとれば(7.3)により

$$\{\Delta^{(1)}\} \supset \{\Delta^{(2)}(\Omega_1)\} \supset \{\Delta^{(2)}(\Omega_2)\} \supset \cdots$$

と、部分列が次々とれて結局対角線論法によって

ある部分列 $\{\Delta^{(3)}\} \subset \{\Delta^{(1)}\}$ がとれて $(\Delta^{(3)} = \Delta^{(3)}(\eta, g, \eta', g'))$

$$(7.4) \quad \begin{cases} (\eta g' - \eta' g)(\Pi^{\Delta^{(3)}}) \to \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, g' \rangle - \langle \nu, \eta' \rangle \langle \nu, g \rangle \\ \qquad L^\infty(\Omega) \text{ weak}^* \ (\text{任意の bounded な } \Omega \text{ に対し}) \end{cases}$$

とできる。しかし Prop 2.3 より

$$\sup_{\Delta^{(3)}} \|(\eta g' - \eta' g)(\Pi^{\Delta^{(3)}})\|_{L^\infty} < \infty$$

であるから (7.4) の収束は Ω によらず

$$L^\infty \text{ weak}^*$$

となる。しかるに (7.1) より

$$(\eta g' - \eta' g)(\Pi^{\Delta^{(1)}}) \to \langle \nu, \eta g' - \eta' g \rangle \quad L^\infty \text{weak}^*$$

であるから結局 次がいえる。

<u>Proposition 7.1</u>

$$\langle \nu, \eta g' - \eta' g \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, g' \rangle - \langle \nu, \eta' \rangle \langle \nu, g \rangle$$

が a.e. (x, t) で成り立つ。 ┘

この $\nu_{(x,t)}$ を このProp 7.1 と前の weak entropy の評価 及び §3 の定理から決定する。特に measure $\nu_{(x,t)}$ の support を調べる。それに使われる weak entropy pair は高々可算個であるから Prop 7.1 は、そのすべての組に対し、あるひとつの零集合 $\subset \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ を除いて成り立つ。

以下、その零集合以外の点 (x, t) をひとつ fix する(今後 (x,t) は記さない)。

(7.1) により

$$\operatorname{supp}\nu \subset \Sigma,$$

であり、以後

$$\operatorname{supp}\nu \cap \{\rho > 0\}$$

が<u>空でない場合</u>を考え、これを含む次のような三角領域で最小のもの Σ_0:

$$\Sigma_0 = \{(w, z);\ w \geq z,\ w \leq w_0,\ z \geq z_0\}$$

をとる。点 (w_0, z_0) を R とする(図7.1)。

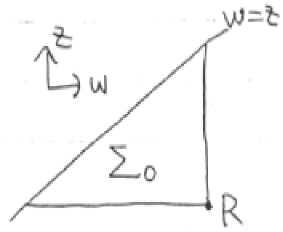


図7.1

<u>Lemma 7.2</u>

$$\operatorname{supp}\nu \ni R \quad ┘$$

(Proof) DiPerna [7] に従う。

$$\mathrm{supp}\,\nu \ni R$$

とする。Σ_0 の最小性より $w=w_0$ 及び $z=z_0$ は $\mathrm{supp}\,\nu \cap \{\rho>0\}$ と交わる。
そのそれぞれの交点の ε 近傍で、k：十分大に対し

$$\eta^{(1)} \geqslant M e^{k(w_0-\varepsilon)},\ \eta^{(2)} \geqslant M e^{-k(z_0+\varepsilon)},\quad M=M(\gamma,\Sigma_0)>0$$

が lemma 4.1 よりいえる（任意の $\varepsilon>0$ に対して）。ν は nonnegative probability measure で、$\eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ は (4.9) より non negative であるから

$$(7.5)\quad \begin{cases} \langle \nu, \eta^{(1)} \rangle \geqslant M e^{k(w_0-\varepsilon)} \\ \langle \nu, \eta^{(2)} \rangle \geqslant M e^{-k(z_0+\varepsilon)} \end{cases},\quad M=M(\gamma,\Sigma_0,\nu,\varepsilon)>0$$

がいえる。又 $\mathrm{supp}\,\nu \ni R$、及び lemma 4.1 より k：十分大に対し
ある $\delta>0$ があって

$$|\langle \nu, \eta^{(2)} q^{(1)} - \eta^{(1)} q^{(2)} \rangle| \leqslant M e^{k(w_0-z_0-\delta)},\quad M=M(\gamma,\Sigma_0)$$

となる。よって ε を十分小さく、$2\varepsilon<\delta$ なるようにとれば Prop 7.1 より

$$(7.6)\quad \begin{cases} \left| \dfrac{\langle \nu, q^{(1)} \rangle}{\langle \nu, \eta^{(1)} \rangle} - \dfrac{\langle \nu, q^{(2)} \rangle}{\langle \nu, \eta^{(2)} \rangle} \right| = \left| \dfrac{\langle \nu, \eta^{(2)} q^{(1)} - \eta^{(1)} q^{(2)} \rangle}{\langle \nu, \eta^{(1)} \rangle \langle \nu, \eta^{(2)} \rangle} \right| \\ \qquad \leqslant M e^{-k(\delta-2\varepsilon)} \longrightarrow 0 \quad (k\to+\infty) \\ M = M(\gamma,\Sigma_0,\nu,\varepsilon) \end{cases}$$

がいえる。

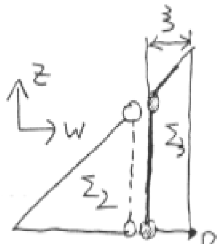


図7.2

今、Σ_0 を、$\xi>0$：十分小に対し

$$\Sigma_2 := \{(w,z);\ w<w_0-\xi,\ z\geqslant z_0,\ w\geqslant z\}$$
$$\Sigma_3 := \{(w,z);\ w_0-\xi \leqslant w \leqslant w_0,\ z\geqslant z_0,\ w\geqslant z\}$$

と分ける（図7.2）。(4.10) (4.12) より

$$\eta^{(1)} e^{-kw} = \rho^{\frac{1-\theta}{2}} e^{-r} \psi^{(1)}(r)\ ;\ \text{bounded on } \Sigma_0$$

であるから

$$\langle \nu|_{\Sigma_2}, \eta^{(1)} \rangle \leqslant M e^{k(w_0-\xi)},\quad M=M(\gamma,\Sigma_0).$$

又、(7.5) より $\varepsilon=\frac{1}{2}\xi>0$ とすれば、ξ：fix に対し

$$\begin{cases} \dfrac{\langle \nu|_{\Sigma_2}, \eta^{(1)} \rangle}{\langle \nu, \eta^{(1)} \rangle} \leqslant M e^{-\frac{3}{2}k} \longrightarrow 0 \quad (k\to+\infty) \\ M=M(\gamma,\nu,\Sigma_0,\xi) \end{cases}$$

となる。

又(4.5)より

$$\lambda_2(w,z) \geqq \lambda_2(w_0-\xi,\ z_0) \quad \text{on } \Sigma_3$$

であるから(図7.3)、lemma 4.1より

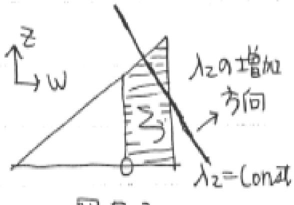


図7.3

$$(7.7)\quad \begin{cases} \dfrac{\langle \nu, g^{(1)}\rangle}{\langle \nu, \eta^{(1)}\rangle} = \dfrac{\langle \nu|_{\Sigma_2}, \eta^{(1)}\lambda_2\rangle}{\langle \nu, \eta^{(1)}\rangle} + \dfrac{\langle \nu|_{\Sigma_3}, \eta^{(1)}\lambda_2\rangle}{\langle \nu, \eta^{(1)}\rangle} + O(\tfrac{1}{k}) \\ \qquad\qquad \geqq o(1) + \lambda_2(w_0-\xi,\ z_0) \quad (k\to+\infty) \end{cases}$$

となる。同様に lemma 4.1, (7.5) 等より

$$(7.8)\quad \frac{\langle \nu, g^{(2)}\rangle}{\langle \nu, \eta^{(2)}\rangle} \leqq o(1) + \lambda_1(w_0,\ z_0+\xi) \quad (k\to+\infty)$$

がいえ、よって (7.6)—(7.8) より $k\to+\infty$ に対して

$$\lambda_2(w_0-\xi,\ z_0) - \lambda_1(w_0,\ z_0+\xi) \leqq 0$$

が $\xi>0$：十分小 に対しいえる。よって $\xi\downarrow 0$ とすれば

$$\lambda_2(R) \leqq \lambda_1(R)$$

となりこれは $R\in\{w=z\}$ を意味するから矛盾。 //

ν : probability Borel measure であるから lemma 4.2, Prop 7.1, 及び Lebesgue有界収束定理により

$$(7.9)\quad \begin{cases} \langle \nu, B_n^{(3)}\rangle = \langle \nu, \eta^{(3)}\rangle\langle \nu, g_n\rangle - \langle \nu, \eta_n\rangle\langle \nu, g^{(3)}\rangle \\ \langle \nu, B_n^{(4)}\rangle = \langle \nu, \eta^{(4)}\rangle\langle \nu, g_n\rangle - \langle \nu, \eta_n\rangle\langle \nu, g^{(4)}\rangle \\ \langle \nu, \eta^{(3)}g^{(4)} - \eta^{(4)}g^{(3)}\rangle = \langle \nu, \eta^{(3)}\rangle\langle \nu, g^{(4)}\rangle - \langle \nu, \eta^{(4)}\rangle\langle \nu, g^{(3)}\rangle \end{cases}$$

がいえる。以下、§4 (ii),(iii) の $a\in\mathbb{R}$ は

$$z_0 < a < w_0$$

の範囲にとり(図7.4)、(5.3)の K_0 を Σ_0 ととる。このとき次がいえる。

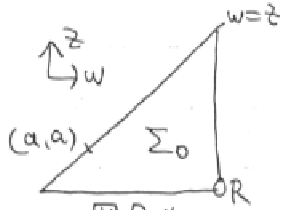


図7.4

Lemma 7.3

$$\lim_{n\to\infty} \langle \nu, B_n\rangle = 0$$

(証明は lemma 4.2, lemma 7.2 から得られる、$\langle \nu, \eta^{(3)}g^{(4)} - \eta^{(4)}g^{(3)}\rangle > 0$, $\langle \nu, \eta^{(3)}\rangle > 0$ 及び lemma 5.1, (7.9) から $\langle \nu, \eta_n\rangle, \langle \nu, g_n\rangle$: bounded がいえ、同様の考察を再びくり返せば得られる。詳しくは Dingら[3]参照。)

§5 (5.1) の $\phi_0 = \phi_0^{(5)}$ を

$$\phi^{(6)}(x) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & (|x|<1) \\ 0 & (|x|\geqq 1) \end{cases} \in C_0^\infty$$

に対し　ε_0：十分小として

$$\phi_0(x) := \frac{1}{\bar\varepsilon_0}\left\{\phi^{(6)}\left(\frac{x+\bar\varepsilon_0}{\bar\varepsilon_0}\right) - \phi^{(6)}\left(\frac{x-\bar\varepsilon_0}{\bar\varepsilon_0}\right)\right\}$$

$$\left(\bar\varepsilon_0 := \frac{1-\varepsilon_0}{2}\right)$$

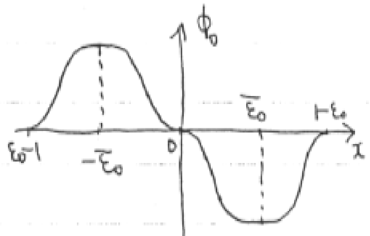


図7.5

とする(図7.5)。これは明らかに(5.1)を満足する。又、

$$S_w^{\varepsilon_0} \underset{\text{def}}{=} \left\{(w,z) ;\ w \geqq z,\ |w-a| \leqq \frac{1-3\varepsilon_0}{n}\right\}$$

$$S_z^{\varepsilon_0} \underset{\text{def}}{=} \left\{(w,z) ;\ w \geqq z,\ |z-a| \leqq \frac{1-3\varepsilon_0}{n}\right\}$$

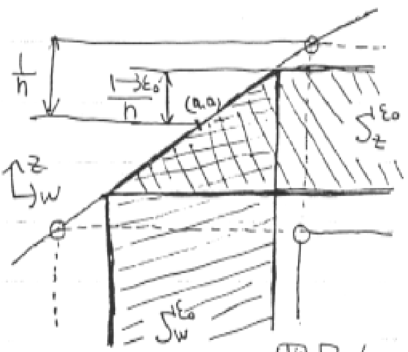


図7.6

とするとき(図7.6)、次がいえる。

Lemma 7.4

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\langle \nu|_{S_w^{\varepsilon_0}},\ n(w-z)^{2\tau}\rangle + \langle \nu|_{S_z^{\varepsilon_0}},\ n(w-z)^{2\tau}\rangle\right\} = 0$$

(Proof) Dingら[3]に従う。

$$\tilde S_w^{\varepsilon_0} \underset{\text{def}}{=} S_w^{\varepsilon_0} \cap \tilde S_w,\quad \tilde S_z^{\varepsilon_0} \underset{\text{def}}{=} S_z^{\varepsilon_0} \cap \tilde S_z$$

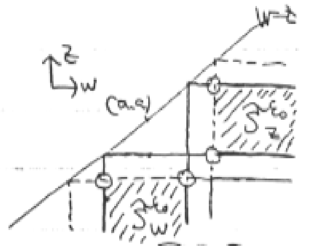


図7.7

とするとき(図7.7) lemma 5.1 より このlemmaを示すには、

(7.10) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\langle \nu|_{\tilde S_w^{\varepsilon_0}},\ n(w-z)^{2\tau}\rangle + \langle \nu|_{\tilde S_z^{\varepsilon_0}},\ n(w-z)^{2\tau}\rangle\right\} = 0$$

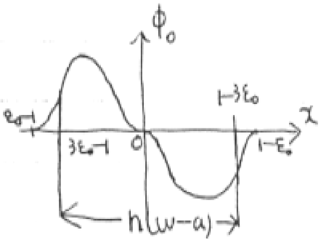
をいえばよい。

lemma 5.1, lemma 7.3 より

(7.11) $$\lim_{n\to\infty}\left\{\langle \nu|_{\tilde S_w},\ n(w-z)^{2\tau}A_1 + (w-z)^\tau A_2\rangle + \langle \nu|_{\tilde S_z},\ n(w-z)^{2\tau}C_1 + (w-z)^\tau C_2\rangle\right\} = 0$$

がいえる。又、

(7.12) $$A_1 = \frac{1+\theta}{2}A^2\left(\int_{-1}^{n(w-a)}\phi_0\right)^2 \geqq M_0 > 0 \quad \text{on } \tilde S_w^{\varepsilon_0}$$
$$M_0 = M_0(\varepsilon_0, \gamma, \phi^{(6)}) > 0$$



であり

$$E_n^\mu \underset{\text{def}}{=} \{(w,z)\ ;\ 0 \le w-z \le (\tfrac{1}{n})^\mu\} \quad (\mu>0)$$

をとれば lemma 5.1 より

$$(7.13)\quad \begin{cases} E_n^\mu \cap \tilde{S}_w \text{ 上} & |(w-z)^\tau A_2| \le M(\frac{1}{n})^{\mu\tau} = o(1) \\ (E_n^\mu)^c \cap \tilde{S}_w \text{ 上} & |(w-z)^\tau A_2| \le M\cdot n(w-z)^{2\tau}(\frac{1}{n})^{1-\mu\tau} \end{cases}$$

$$M = M(\varepsilon_0, \Sigma_0, \gamma, a, \phi^{(6)})$$

である。この $(E_n^\mu)^c \cap \tilde{S}_w$ 上の評価のために $\mu_0>0$ に対して

$$\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad d_n \downarrow 0$$

を

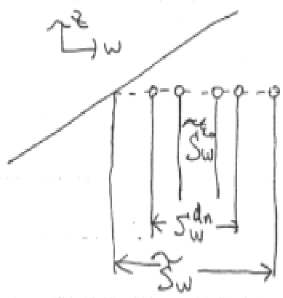
$$\int_{-1+\varepsilon_0}^{1-\varepsilon_0-d_n} \phi_0 = -\int_{1-\varepsilon_0-d_n}^{1-\varepsilon_0} \phi_0 \ge \left(\frac{1}{n}\right)^{\mu_0}$$

なるようにとる ($d_n = d_n(\mu_0, \phi_0)$)。このとき

$$(7.14)\quad \begin{cases} |x| \le 1-\varepsilon_0-d_n \text{ のとき} & \left(\int_{-1}^{x}\phi_0\right)^2 \ge \left(\frac{1}{n}\right)^{2\mu_0} \\ 1-\varepsilon_0-d_n \le |x| \le 1 \text{ のとき} & |\phi_0(x)| + \left|\int_{-1}^{x}\phi_0\right| = o(1) \quad (d_n\downarrow 0 \text{ より}) \end{cases}$$

となる。今

$$S_w^{d_n} \underset{\text{def}}{=} \tilde{S}_w \cap \left\{(w,z) ;\ |w-a| \le \frac{1-\varepsilon_0-d_n}{n}\right\}$$



とすれば n:十分大に対し $\tilde{S}_w \supset S_w^{d_n} \supset \tilde{S}_w^{\varepsilon_0}$ であり

(7.13) (7.14) lemma 5.1 により

$$(7.15)\quad \begin{cases} \tilde{S}_w \setminus S_w^{d_n} \text{ 上} & |(w-z)^\tau A_2| = o(1) \\ S_w^{d_n} \cap (E_n^\mu)^c \text{ 上} & n(w-z)^{2\tau}A_1 + (w-z)^\tau A_2 \\ & \quad \ge n(w-z)^{2\tau}\left\{\frac{1+\theta}{2}A^2\left(\frac{1}{n}\right)^{2\mu_0} - \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\mu\tau}\right\} \\ & \quad \ge 0 \end{cases}$$

となることが, μ, μ_0 を

$$(7.16)\qquad 1-\mu\tau > 2\mu_0 > 0$$

なるようにとれば n:十分大に対していえる。これらを合わせると

$$\langle \nu|_{\tilde{S}_w},\ n(w-z)^{2\tau}A_1 + (w-z)^\tau A_2 \rangle$$
$$= \langle \nu|_{\tilde{S}_w \cap E_n^\mu},\ n(w-z)^{2\tau}A_1 \rangle + \langle \nu|_{\tilde{S}_w \cap (E_n^\mu)^c},\ n(w-z)^{2\tau}A_1 + (w-z)^\tau A_2 \rangle$$
$$+\ o(1) \qquad ((7.13) \text{ より.})$$

$$\geqslant M_0 \langle \nu|_{\tilde{S}_w^{\varepsilon_0} \cap E_n^{\mu}}, n(w-z)^{2\tau} \rangle + \langle \nu|_{(S_w \setminus S_w^{d_n}) \cap (E_n^{\mu})^c}, n(w-z)^{2\tau} A_1 \rangle$$

$$+ \langle \nu|_{\tilde{S}_w^{\varepsilon_0} \cap (E_n^{\mu})^c}, n(w-z)^{2\tau} A_1 + (w-z)^{\tau} A_2 \rangle + o(1)$$

((7.12), (7.15) $S_w^{d_n} \supset \tilde{S}_w^{\varepsilon_0}$ より。)

$$\geqslant M_0 \langle \nu|_{\tilde{S}_w^{\varepsilon_0} \cap E_n^{\mu}}, n(w-z)^{2\tau} \rangle + \langle \nu|_{\tilde{S}_w^{\varepsilon_0} \cap (E_n^{\mu})^c}, n(w-z)^{2\tau} \{ M_0 - M (\tfrac{1}{n})^{1-\mu\tau} \} \rangle$$

$+ o(1)$ ($A_1 \geqslant 0$ (7.12) (7.13) より。)

$$\geqslant \frac{M_0}{2} \langle \nu|_{\tilde{S}_w^{\varepsilon_0}}, n(w-z)^{2\tau} \rangle + o(1) \quad ((7.16) \text{ より } n: \text{十分大に対し。})$$

同様に $\tilde{S}_z^{\varepsilon_0}$ に対しても lemma 5.1, lemma 7.3 より n: 十分大に対し

$$\langle \nu|_{\tilde{S}_z}, n(w-z)^{2\tau} C_1 + (w-z)^{\tau} C_2 \rangle \geqslant \frac{M_0}{2} \langle \nu|_{\tilde{S}_z^{\varepsilon_0}}, n(w-z)^{2\tau} \rangle + o(1)$$

が成り立ち，よって n: 十分大に対して

$$0 \leqslant \langle \nu|_{\tilde{S}_w^{\varepsilon_0}}, n(w-z)^{2\tau} \rangle + \langle \nu|_{\tilde{S}_z^{\varepsilon_0}}, n(w-z)^{2\tau} \rangle$$

$$\leqslant \frac{2}{M_0} \{ \langle \nu|_{\tilde{S}_w}, n(w-z)^{2\tau} A_1 + (w-z)^{\tau} A_2 \rangle + \langle \nu|_{\tilde{S}_z}, n(w-z)^{2\tau} C_1 + (w-z)^{\tau} C_2 \rangle \} + o(1)$$

$$M_0 = M_0(\varepsilon_0, \gamma, \phi^{(6)}) > 0$$

であるから (7.11) より (7.10) がいえる。 //

Proposition 7.5

$$\nu|_{\{\rho > 0\}} = \delta(R)$$

(Proof)

lemma 7.4 は $\tilde{\nu} := (w-z)^{2\tau} \nu$ の，w, z への projection $P_w \tilde{\nu}$, $P_z \tilde{\nu}$ の，点 a での Lebesgue lower derivative $\underline{D} P_w \tilde{\nu}(a)$, $\underline{D} P_z \tilde{\nu}(a)$ (§3 (vi)) に対し

$$(0 \leqslant) \ 2(1 - 3\varepsilon_0) \{ \underline{D} P_w \tilde{\nu}(a) + \underline{D} P_z \tilde{\nu}(a) \} \leqslant 0$$

が成り立つことを示している。 $z_0 < a < w_0$ は任意であるから Thm 3.13 より

$$\operatorname{supp} \nu \cap \{\rho > 0\} = \{R\}$$

がいえる。ν は measure であるから

$$\nu|_{\{\rho > 0\}} = M_1 \delta(R)$$

となり，(7.9) から

$$M_1 (\eta^{(3)} g^{(4)} - \eta^{(4)} g^{(3)})(R) = M_1^2 (\eta^{(3)} g^{(4)} - \eta^{(4)} g^{(3)})(R)$$

であり．lemma 4.2 及び $\mathrm{supp}\,\nu\cap\{\rho>0\}\neq\phi$ なる仮定より $M_1=1$．

$\therefore \nu|_{\{\rho>0\}}=\delta(R)$ //

この Prop 7.5 により，$\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_t$ 上 a.e. defined な measure $\nu_{(x,t)}$ は support は有界で $\nu|_{\{\rho>0\}}$ は 0 か又は ある1点での δ 函数 となること がいえる。よって．

$$\overline{\Box}(x,t) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} R \text{ を } (\rho,m) \text{ であらわした値} & (\nu_{(x,t)}|_{\{\rho>0\}}=\delta(R) \text{ のとき}) \\ 0 & (\nu_{(x,t)}|_{\{\rho>0\}}=0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$=\begin{pmatrix} \overline{\rho}(x,t) \\ \overline{m}(x,t) \end{pmatrix}$$

$$=\langle \nu_{(x,t)}(\Box),\ \Box \rangle$$

とすると，(7.1) より　　($\rho=0$ のときは $m=0$ より)

$$(7.17)\quad \begin{cases} \rho^{\Delta^{(1)}} \longrightarrow \overline{\rho}, & m^{\Delta^{(1)}} \longrightarrow \overline{m} \\ (\rho^{\Delta^{(1)}})^2 \longrightarrow (\overline{\rho})^2, & (m^{\Delta^{(1)}})^2 \longrightarrow (\overline{m})^2 \end{cases} \quad L^\infty \text{ weak}^*$$

がいえ，$\overline{\rho}$，$\overline{m}$: bounded であるから 任意の bounded な Ω に対し

$$\|\rho^{\Delta^{(1)}}-\overline{\rho}\|^2_{L^2(\Omega)}=\iint\{(\rho^{\Delta^{(1)}})^2-(\overline{\rho})^2\}\chi_\Omega+\iint(\overline{\rho}-\rho^{\Delta^{(1)}})\cdot 2\chi_\Omega\overline{\rho}$$

$$\longrightarrow 0 \quad ((7.17) \text{ より})$$

。

よって (対角線論法により)

ある部分列 $\{\Delta^{(4)}\}\subset\{\Delta^{(1)}\}$ があって

$$\begin{pmatrix} \rho^{\Delta^{(4)}}(x,t) \\ m^{\Delta^{(4)}}(x,t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \overline{\rho}(x,t) \\ \overline{m}(x,t) \end{pmatrix} \quad \text{a.e}$$

となる。Prop 2.3 より $\overline{\rho}(x,t)$ は bounded で

$$\frac{\overline{m}(x,t)}{\overline{\rho}(x,t)} \text{ は } \overline{\rho}(x,t)\neq 0 \text{ のところで a.e. defined かつ bounded}$$

であることがいえる。そして Lebesgue 収束定理，及び Prop 6.2 より 上のことから 結局 次の 解の存在定理がいえる。

Theorem 7.7（弱解の存在）

dataに関する仮定(2.1)(2.12)(4.18)のもと，(1.9)及び(1.10)をそれぞれ満足する bounded, measurableな函数 $(\bar{\rho}_1(x,t),\ \bar{m}_1(x,t))$，$(\bar{\rho}_2(x,t),\ \bar{m}_2(x,t))$ $(\bar{\rho}_1 \geq 0,\ \bar{\rho}_2 \geq 0)$ が存在し，

$\bar{\rho}_j(x,t) = 0$ では a.e. $\bar{m}_j(x,t) = 0$ で

$\dfrac{\bar{m}_j(x,t)}{\bar{\rho}_j(x,t)}$ は $\bar{\rho}_j(x,t) > 0$ 上 a.e. bounded

$(j=1,2)$

であり，これらは §2で構成した差分近似解の，ある部分列の a.e.収束の極限として得られる。∎

§8 entropy condition

ここでは §7で得られた解が entropy condition を満足することをみる。

方程式 (1.5) の weak solution $\overline{U}(x,t)$ が <u>entropy condition</u> を満足するとは

任意の weak convex entropy （すなわち $\nabla^2\eta \geqq 0$, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial\rho}, \frac{\partial}{\partial m})$ ）に対して 内部で

$$(8.1) \qquad \eta(\overline{U}(x,t))_t + q(\overline{U}(x,t))_x \leqq 0 \qquad (\text{distribution sense})$$

を満足すること。

ここでは (η, q) smooth weak entropy は

$$(8.2) \qquad \begin{cases} q(0,u) = 0 & ((\rho,u) \text{ の関数とみて}) \\ \nabla\eta : \text{bounded on } \Sigma_1 & \qquad (\nabla = (\frac{\partial}{\partial\rho}, \frac{\partial}{\partial m})) \\ \nabla^2\eta \geqq 0 \end{cases}$$

を満たすとする。

まず (1.1) (1.2) の方を考える。

$$\phi \in C_0^\infty(\{(x,t);\ t>0,\ x>x(t)\}), \quad \phi \geqq 0$$

なる任意の ϕ に対し

$$\iint_{D_1} \{\eta(\overline{U})\phi_t + q(\overline{U})\phi_x\}\,dxdt \geqq 0$$

を示せばよい。§6の記号を使えば

$$\iint_{D_1^\Delta} \{\eta(U^\Delta)\phi_t + q(U^\Delta)\phi_x\} = (L_1 + L_2 + \Sigma + \Pi)(\phi)$$

となり，(6.9) 及び $\phi(x(t),t) = 0$ より

$$(8.3) \qquad |\Pi(\phi)| = \left| \int_0^T \{\eta(U^\Delta)\dot{x}^\Delta(t) - q(U^\Delta)\}(x^\Delta(t),t)\cdot\{\phi(x^\Delta(t),t) - \phi(x(t),t)\}\,dt \right|$$

$$\leqq M\Delta x, \qquad M = M(\Sigma_1, \|\phi_x\|_C, \eta, q, \operatorname{supp}\phi).$$

又，$\phi \geqq 0$, $\nabla^2\eta \geqq 0$ より $\sigma[\eta] - [q] \geqq 0$ (Dingら[2]参照) もいえ

$$(8.4) \qquad L_1(\phi) \geqq 0, \qquad \Sigma(\phi) \geqq 0$$

となる。$L_2(\phi)$ も (6.7) の計算と同様にして

(8.5) $$|L_2(\phi)| \leq M\sqrt{\Delta x}\,\|\phi_x\|_C\,\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Sigma_1)}\sqrt{\sum_{n=1}^{m-1}\int_{J^\Delta(n\Delta t)}|[\Pi^\Delta]|^2 dx}$$
$$\leq M\sqrt{\Delta x}\quad,\quad M = M(\|\phi\|_{C^1},\ \Sigma_1,\ \|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Sigma_1)},\ \mathrm{supp}\,\phi)$$

であるから (6.10) と同様の計算、及び (8.3)−(8.5) から

$$\iint_{D_1}\{\eta(\Pi^\Delta)\phi_t + q(\Pi^\Delta)\phi_x\} \geq -M\sqrt{\Delta x}$$

$$M = M(\Sigma_1,\ \|\phi\|_{C^1},\ \mathrm{supp}\,\phi,\ \|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Sigma_1)},\ \eta,\ q)$$
$$= M(\Sigma_1,\ \phi,\ \eta,\ q)$$

となる。よって Thm 7.7 より $\Delta = \Delta^{(k)}$ の limit をとれば

$$\iint_{D_1}\{\eta(\overline{\Pi})\phi_t + q(\overline{\Pi})\phi_x\} \geq 0$$

を得る。(1.1)(1.3) の方も同様。　故に次がいえる。

Proposition 8.1

Thm 7.7 で得られた weak solution $\overline{\Pi}(x,t)$ は、(8.2) をみたす weak entropy pair (特に (η_*, q_*) など (4.7)(4.8) で得られる convex な entropy) に対しては entropy condition (8.1) を満足する。┘

最後に本論文を作成するにあたり、DiPerna、Dingらの仕事を紹介してくださった京都大学の西田孝明先生、[8]の論文を紹介してくださった新潟大学の小林良和先生、筆者をこの興味深い双曲型保存則の分野へ導いてくださり、長い間御指導してくださった新潟大学の浅野和雄先生、名古屋工業大学の岩下弘一先生、及びいつも激励してくれた院生の級友達、これらの方々に大変にお世話になりました。この場を借りて深くお礼申し上げます。

参考文献

[1] Chen Guiqiang, Convergence of the Lax—Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics(III), Acta Mathematica Scientica, 6(1986), 75-120.

[2] Ding Xiaxi, Chen Guiqiang, Luo Peizhu, Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I), Acta Mathematica Scientica, 5(1985), 415—432.

[3] Ding Xiaxi, Chen Guiqiang, Luo Peizhu, Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics(II), Acta Mathematica Scientica, 5(1985), 433—472.

[4] Ding Xiaxi, Chen Guiqiang, Luo Peizhu, A supplement to the papers Convergence of the Lax—Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (II)—(III), Acta Mathematica Scientica, 9(1989), 43—44.

[5] DiPerna, R.J., Existence in the large for quasilinear hyperbolic conservation laws, Arch. Rat. Mech. Anal., 52(1973), 244—257.

[6] DiPerna, R.J., Convergence of approximate solutions to conservation laws, Arch. Rat. Mech. Anal., 82(1983), 27—70.

[7] DiPerna, R.J., Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics, Comm. Math. Phys., 91(1983), 1—30.

[8] Evans, L.C., Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations. (to appear)

[9] Folland, G.B., Real analysis: modern techniques and their applications, New York: Wiley, 1984.

[10] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., Elliptic partial differential equations of second order (2nd edition), Springer-Verlag, 1983.

[11] Glimm, J., Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Comm. Pure Appl. Math., 18(1965), 697—715.

[12] Lax, P.D., Hyperbolic systems of conservation laws II, Comm. Pure Appl. Math., 10(1957), 537—566.

[13] Liu, T.P., Solutions in the large for the equations of nonisentropic gas dynamics., Indiana Univ. Math. J. 26(1977), 147—176.

[14] Liu, T. P., Initial-boundary value problems for gas dynamics, Arch. Rat. Mech. Anal., 64 (1977), 137–168.
[15] Liu, T. P., The free piston problem for gas dynamics, J. Differential Eq., 30 (1978), 175–191.
[16] 西田孝明, Global solution for an initial boundary value problem of a quasilinear hyperbolic system, Proc. Japan Acad., 44 (1968), 642–646.
[17] 西田孝明, Smoller, J., Solutions in the large for some nonlinear hyperbolic conservation laws, Comm. Pure Appl. Math. 26 (1973), 183–200.
[18] 西田孝明, Smoller, J., Mixed problems for nonlinear conservation laws, J. Differential Eq., 23 (1977), 244–269.
[19] Oleĭnik, O. A., Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, Usp. Mat. Nauk., 12 (1957), 3–73. (English translation: Amer. Math. Soc. Transl. Ser 2, 26 95–172.)
[20] Rudin, W., Real and complex analysis, New York: McGraw-Hill, 1966.
[21] Smoller, J., Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer-Verlag, 1983.
[22] Tartar, L., Compensated compactness and applications to partial differential equations. In: Research notes in mathematics, nonlinear analysis, and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. 4, Knops, R. J. (ed.). New York: Pitman Press, 1979.