2015 年 08 月 27 日
2020 年 02 月 28 日 (一部修正)

気体の 1 次元運動方程式に対する LF 差分の有界性について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

1 次元のバロトロピックな気体の運動方程式は以下の通り。

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで、t は時刻、$x \in R$ は位置、$\rho = \rho(t,x)$ (≥ 0) は気体の密度、$u = u(t,x)$ は気体の速度、$P = P(\rho)$ (≥ 0) は気体の圧力を意味する。

この方程式の Lax-Friedrichs 型差分近似解の有界性は、通常微分方程式 (1) に対する Riemann 問題の解の有界性と、不変領域の凸性を用いて示されることが多いが、それらを使わずに直接差分式から有界性を示す証明は、ないわけではないだろうが、あまり見かけない。

その直接証明はかなりわずらわしいが不可能ではなく、本稿ではそれを紹介する。

2 基本事項

方程式 (1) をベクトル形で書くと、

$$\begin{bmatrix} \rho \\ m \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho + P(\rho) \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

の形となる。ここで、$m = \rho u$ (気体の運動量) とした。

一般に、次の形の方程式を、**1 次元保存則方程式** と呼ぶ。

$$U_t + F(U)_x = 0 \tag{3}$$

ここで、$U = U(t,x) = {}^t(u_1(t,x),\dots,u_N(t,x))$ は (t,x) 2 変数の N 次元ベクトル値の未知関数、$F(U) = {}^t(f_1(U),\dots,f_N(U))$ は $U = {}^t(u_1,\dots,u_N)$ に関して滑らかな N 次元ベクトル関数で、$F(U)$ 自体 ($F(U(t,x))$ ではなく) は既知とする。例えば、(2) では、$U(t,x) = {}^t(\rho(t,x), m(t,x))$, $F(U) = {}^t(m, m^2/\rho + P(\rho))$ である。

この $F(U)$ の U に関する勾配 ($N\times N$ 行列)

$$\nabla_U F(U) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_N}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_N}{\partial u_N} \end{bmatrix}$$

が異なる実固有値 $\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \cdots < \lambda_N(U)$ を持つ場合、保存則方程式 (3) は **双曲型** と呼ばれる。

本稿では、(1) の圧力 $P = P(\rho)$ は以下の条件 (4), (5) を満たすとする。

$$P(+0) = 0, \quad P'(\rho) > 0\ (\rho > 0), \quad \rho P''(\rho) + 2P'(\rho) \ge 0\ (\rho > 0) \tag{4}$$

かつ、ある正数 $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho}\,d\rho < \infty. \tag{5}$$

なお、(4), (5) により、自然に $C(+0) = 0$ となる (A 節参照)。ポリトロピック、すなわち $P = A\rho^\gamma$ の場合は、(4) の条件は $\gamma > 0$ に対応し、(5) の条件は $\gamma > 1$ (等エントロピー的) に対応する。今後、

$$\begin{aligned} &C(\rho) = \sqrt{P'(\rho)}, \quad G(\rho) = \int_0^\rho \frac{\sqrt{P'(y)}}{y}\,dy \ \left(= \int_0^\rho \frac{C(y)}{y}\,dy\right), \\ &H(\rho) = G(\rho) + C(\rho)\ \ (= \{\rho G(\rho)\}') \end{aligned}$$

と書くことにする。なお、(4) の最後の条件は、

$$H'(\rho) = \frac{C(\rho)}{\rho} + \frac{P''}{2\sqrt{P'}} = \frac{2P' + \rho P''}{2\rho C} \ge 0, \tag{6}$$

$$(\rho C(\rho))' = C(\rho) + \frac{\rho P''}{2\sqrt{P'}} = \frac{2P' + \rho P''}{2C} \ge 0 \tag{7}$$

などに対応する。

$$w(U) = u + G(\rho), \quad z(U) = u - G(\rho)$$

を **Riemann 不変量** と呼ぶ。

(2) に関する $\nabla_U F(U)$ は

$$\nabla_U F(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -m^2/\rho^2 + P'(\rho) & 2m/\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + C^2 & 2u \end{bmatrix} \tag{8}$$

であり、よってその固有値は

$$\lambda_1(U) = u - C(\rho), \quad \lambda_2(U) = u + C(\rho)$$

となり、よって (4) より、$\rho > 0$ では (2) は双曲型となる。なお、この λ_1, λ_2 を使うと、(8) は

$$\nabla_U F(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

と書くこともできる。

3 LF 差分

1 次元双曲型保存則方程式に対する差分近似として有名なものに、**Lax-Friedrichs 型差分** (以後 LF 差分と呼ぶ) がある:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{1}{2\mu}\{F(U_{j+1}^n) - F(U_{j-1}^n)\} \tag{10}$$

ここで $n = 0, 1, 2, \ldots$ で、j は通常 $n + j$ が奇数のもののみを考える。また、U_j^n は (3) の解 $U(t, x)$ の $(t, x) = (n\Delta t,\ j\Delta x)$ での値を近似するもの ($U^\Delta(n\Delta t, j\Delta x)$) であり、よって (10) は、微分方程式 (3) を

$$\frac{U^\Delta(t + \Delta t,\ x) - \dfrac{U^\Delta(t,\ x - \Delta x) + U^\Delta(t,\ x + \Delta x)}{2}}{\Delta t} + \frac{F(U^\Delta(t, x + \Delta x)) - F(U^\Delta(t, x - \Delta x))}{2\Delta x} = 0$$

のように差分化したものと見ることができる ($\mu = \Delta x/\Delta t$)。

以後、(10) の右辺の式を、$LF(U^n_{j-1}, U^n_{j+1})$, あるいは $LF(U^n_{j-1}, U^n_{j+1}; \mu)$ と書くこととする:

$$LF(U_L, U_R) = LF(U_L, U_R; \mu) = \frac{1}{2}(U_L + U_R) - \frac{1}{2\mu}\{F(U_R) - F(U_L)\} \tag{11}$$

LF 差分の μ には、安定性のため通常 **CFL 条件** (Courant-Friedrichs-Lewy 条件):

$$\mu > \max\{|\lambda_j(U)|;\ U = U_L, U_R,\ j = 1, 2\} \quad (= \Lambda_1(U_L, U_R)) \tag{12}$$

を課す。ここで、$|a| = \max\{-a, a\}$ なので、

$$\begin{aligned}\max\{|\lambda_1(U)|, |\lambda_2(U)|\} &= \max\{-\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_2, \lambda_2\} = \max\{-\lambda_1, \lambda_2\}\\ &= \max\{-u + C(\rho), u + C(\rho)\} = |u| + C(\rho)\end{aligned}$$

であり、よって $\Lambda_1(U_L, U_R)$ は、

$$\Lambda_1(U_L, U_R) = \max\{|u_L| + C(\rho_L), |u_R| + C(\rho_R)\} \tag{13}$$

と書ける。$\bar{U} = LF(U_L, U_R; \mu)$ の $\bar{\rho}$ は、

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \frac{\rho_L + \rho_R}{2} - \frac{\rho_R u_R - \rho_L u_L}{2\mu} = \frac{1}{2}(\rho_L D^+_L + \rho_R D^-_R)\\ &\quad (D^\pm_L = 1 \pm u_L/\mu,\ \ D^\pm_R = 1 \pm u_R/\mu)\end{aligned}$$

と変形できるが、CFL 条件 (12) のもとでは、(13) より $D^+_L > 0$, $D^-_R > 0$ となるので、これにより ρ_L, ρ_R の両方が 0 でない限り $\bar{\rho} > 0$ となることが保証される。

4 不変領域

Riemann 不変量 w, z に対して、後で「不変領域」として使用する次のような領域を考える。

$$\Sigma(w_0, z_0) = \{U;\ w(U) \le w_0,\ z(U) \ge z_0\} \tag{14}$$

なお、本稿ではこの w_0, z_0 は、ある U_0 に対して $w_0 = w(U_0)$, $z_0 = z(U_0)$ であるもののみを考える。$G(+\infty) = \infty$ であれば任意の w_0, z_0 ($w_0 > z_0$) に対してそのような U_0 が常にみつかるが、$G(+\infty) < \infty$ の場合はそうとは限らないことに注意せよ (本稿では、P に関する条件として $G(+\infty) = \infty$ は仮定していない)。

領域 $\Sigma(w_0,z_0)$ に U が入る条件は、ρ, u で考えると

$$u+G(\rho)\leq w_0=u_0+G(\rho_0),\quad u-G(\rho)\geq z_0=u_0-G(\rho_0)$$

という不等式となり、これは

$$|u-u_0|\leq G(\rho_0)-G(\rho)$$

と書ける。$G'(\rho)=C(\rho)/\rho>0$ $(\rho>0)$ なので、この不等式は $0\leq\rho\leq\rho_0$ の範囲のみで意味を持ち、よって (14) は

$$\Sigma(w_0,z_0)=\{U;\ |u-u_0|\leq G(\rho_0)-G(\rho),\ 0\leq\rho\leq\rho_0\} \tag{15}$$

と書くこともできる。この領域は、(w,z), (ρ,u), (ρ,m) の座標軸では、それぞれ図 1~3 のようになる (厳密な図ではなく、おおよその図)。これらの図からもわ

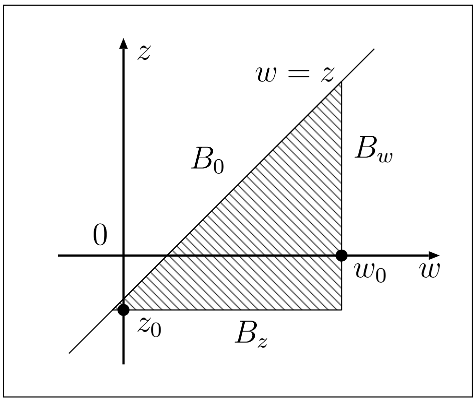

図 1: (w,z) 座標での $\Sigma(w_0,z_0)$

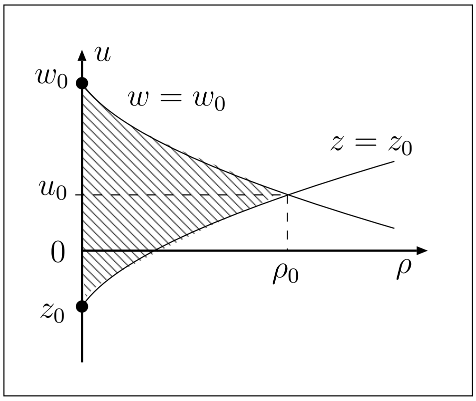

図 2: (ρ,u) 座標での $\Sigma(w_0,z_0)$

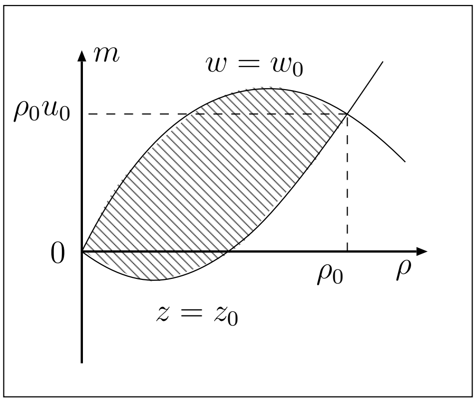

図 3: (ρ,m) 座標での $\Sigma(w_0,z_0)$

かるが、(w,z), (ρ,u) 座標系での $w=z$、すなわち $\rho=0$ 上の線分は、本来の U である (ρ,m) 座標系では原点 1 点に対応することに注意する。

今、この領域 $\Sigma(w_0,z_0)$ での固有値の絶対値の上限を、$\Lambda(w_0,z_0)$ と書くことにする:

$$\Lambda(w_0,z_0)=\sup\{|\lambda_j(U)|;\ j=1,2,\ U\in\Sigma(w_0,z_0)\} \tag{16}$$

(15) より、$\Sigma(w_0,z_0)$ での $\max\{|\lambda_1(U)|,|\lambda_2(U)|\}=|u|+C(\rho)$ の最大値は、

$$\begin{aligned}&\max\{u_0+G(\rho_0)-G(\rho)+C(\rho),-u_0+G(\rho_0)-G(\rho)+C(\rho)\}\\ &\quad=\ |u_0|+G(\rho_0)+C(\rho)-G(\rho)\end{aligned}$$

の $0\le\rho\le\rho_0$ での最大値に等しく、よって $\Lambda(w_0,z_0)$ は

$$\Lambda(w_0,z_0)=|u_0|+G(\rho_0)+\sup\{C(\rho)-G(\rho);\ 0\le\rho\le\rho_0\} \tag{17}$$

となることがわかる。例えば $P=A\rho^\gamma$, $\gamma>1$ (等エントロピー) の場合は、

$$C(\rho)=\alpha\rho^\theta,\quad G(\rho)=\frac{\alpha}{\theta}\rho^\theta\quad\left(\alpha=\sqrt{A\gamma},\ \theta=\frac{\gamma-1}{2}\right)$$

なので、$\gamma\le 3$ ならば $0<\theta\le 1$ より

$$C(\rho)-G(\rho)=-\alpha\frac{1-\theta}{\theta}\rho^\theta\le 0$$

となり、よって

$$\Lambda(w_0,z_0)=|u_0|+G(\rho_0)=\max\{w_0,-z_0\} \tag{18}$$

に等しい。また、$\gamma>3$ ならば $\theta>1$ より

$$C(\rho)-G(\rho)=\alpha\frac{\theta-1}{\theta}\rho^\theta\in[0,C(\rho_0)-G(\rho_0)]$$

なので、

$$\Lambda(w_0,z_0)=|u_0|+C(\rho_0)=\max\{-\lambda_1(U_0),\lambda_2(U_0)\} \tag{19}$$

となる。しかし、一般には $(C-G)$ は単調とは限らず、よって、(17) は (18), (19) のような易しい式になるとは限らない。

最後に、6 節で利用する以下の性質を示しておく。

命題 1

$\Sigma(w_0, z_0)$ は、(ρ, m) の座標系では凸図形、すなわち、

$$\Sigma(w_0, z_0) = \{U;\ f_1(\rho) \leq m \leq f_2(\rho),\ 0 \leq \rho \leq \rho_0\} \tag{20}$$

で、$f_1(\rho)$ は下に凸、$f_2(\rho)$ は上に凸。

証明

$m = f_2(\rho)$ は $w(U) = w_0$ なので、

$$f_2(\rho) = \rho u = \rho(w_0 - G(\rho))$$

となり、その導関数は

$$\frac{dm}{d\rho} = w_0 - (\rho G(\rho))' = w_0 - (G(\rho) + C(\rho)) = w_0 - H(\rho)$$

となる。よって、(6) により $d^2m/d\rho^2 \leq 0$ だからこの曲線は上に凸となる。$m = f_1(\rho)$ も $z(U) = z_0$ なので、

$$f_1(\rho) = \rho u = \rho(z_0 + G(\rho))$$

だから、上と同様にして下に凸であることがわかる。■

5 LF 差分の有界性

我々が目標とする、LF 差分の有界性とは以下のようなものである。

定理 2

CFL 条件

$$\mu > \Lambda(w_0, z_0) \tag{21}$$

の元で、$U_L, U_R \in \Sigma(w_0, z_0)$ ならば、$LF(U_L, U_R) \in \Sigma(w_0, z_0)$, すなわち、

$$w(LF(U_L, U_R)) \leq w_0, \quad z(LF(U_L, U_R)) \geq z_0 \tag{22}$$

が成り立つ (この意味で、$\Sigma(w_0, z_0)$ は、LF 差分に対する **不変領域** と呼ばれる)。

なお、この定理 2 は、次の仮説 3 よりもやや条件が強いことに注意せよ。

仮説 3

CFL 条件 (12) ($\mu > \Lambda_1(U_L, U_R)$) の元で、

$$\begin{cases} w(LF(U_L, U_R)) \leq \max\{w(U_L), w(U_R)\}, \\ z(LF(U_L, U_R)) \geq \min\{z(U_L), z(U_R)\} \end{cases} \tag{23}$$

が成り立つ。

もし、仮説 3 が成り立てば、定理 2 はそれにより示される。それは、$U_L, U_R \in \Sigma(w_0, z_0)$ で (21) が満たされていれば、μ は当然 (12) を満たすので、(23) が成り立つことになり、$U_L, U_R \in \Sigma(w_0, z_0)$ から (22) が得られる。

しかし、この逆、すなわち定理 2 から仮説 3 は一般には得られない。$w_0 = \max\{w(U_L), w(U_R)\}$, $z_0 = \min\{z(U_L), z(U_R)\}$ とすればいいように思うかもしれないが、例えば $G(+\infty) < \infty$ の場合は、まずその w_0, z_0 に対応する U_0 が存在するとは限らない。実際、$w(U_L)$ に対して、

$$\begin{aligned} z(U_L) &= w(U_L) - G(+\infty), \\ w(U_R) &= w(U_L) - 2G(+\infty), \\ z(U_R) &= w(U_L) - 3G(+\infty) \end{aligned}$$

とすると、ρ_L, ρ_R は、$G(\rho_1) = G(+\infty)/2$ なる $\rho_1 > 0$ に対して $\rho_L = \rho_R = \rho_1$ となり、$u_R = u_L - 2G(+\infty)$ より U_L, U_R はちゃんと存在するが、

$$\begin{aligned} w_0 &= \max\{w(U_L), w(U_R)\} = w(U_L), \\ z_0 &= \min\{z(U_L), z(U_R)\} = z(U_R) = w(U_L) - 3G(+\infty) \end{aligned}$$

となるので、$G(\rho_0) = (w_0 - z_0)/2 = (3/2)G(+\infty)$ となるが、そのような ρ_0 は存在しない。

また、その U_0 が存在したとしても、仮説 3 の仮定として満たすべき CFL 条件 (12) から、定理 2 で必要な CFL 条件 (21) が得られるとは限らない。それは、一般には

$$\Lambda(w_0, z_0) \geq \Lambda_1(U_L, U_R)$$

であり、逆向きの不等式が成り立つとは限らないからである。実際、$P = A\rho^\gamma$ $(1 < \gamma < 3)$ の場合でも、$u_1 > 0, \rho_1 > 0$ に対して、

$$u_L = u_1, \quad u_R = -u_1, \quad \rho_L = \rho_R = \rho_1$$

とすると、(13) より

$$\Lambda_1(U_L, U_R) = u_1 + C(\rho_1)$$

となるが、この場合は

$$\begin{aligned} w_0 &= \max\{w_L, w_R\} = w_L = u_L + G(\rho_L) = u_1 + \frac{C(\rho_1)}{\theta}, \\ z_0 &= \min\{z_L, z_R\} = z_R = u_R - G(\rho_R) = -u_1 - \frac{C(\rho_1)}{\theta} \end{aligned}$$

となるので、$u_0 = 0$ で、ρ_0 は

$$G(\rho_0) = \frac{w_0 - z_0}{2} = u_1 + \frac{C(\rho_1)}{\theta}$$

となり、よって、(18) より

$$\Lambda(w_0, z_0) = |u_0| + G(\rho_0) = u_1 + \frac{C(\rho_1)}{\theta} > \Lambda_1(U_L, U_R) \quad (0 < \theta < 1)$$

となる。よって、μ がその間に入ってしまうと定理 2 からは何も言えなくなってしまう。

よって今回は、仮説 3 ではなく、少し強い CFL 条件 (21) を仮定に置く定理 2 について考察する。なお、仮説 3 が実際に成立するか、それとも反例があるかはよくわからない。

6 通常の方法

まずは、定理 2 の通常の証明を簡単に紹介する。

方程式 (2) に、原点で段差を持つ階段関数の初期値

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L & (x < 0 \text{ のとき}) \\ U_R & (x > 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{24}$$

を与えた問題を **Riemann 問題** と呼ぶ。これは、

$$U_{sol}(t, x) = V(x/t)$$

の自己相似形の、区分的に滑らかな解を持ち、$U_L, U_R \in \Sigma(w_0, z_0)$ に対し、

- $x/t < -\Lambda(w_0, z_0)$ ならば $U_{sol}(t,x) = U_L$,
- $x/t > \Lambda(w_0, z_0)$ ならば $U_{sol}(t,x) = U_R$,
- $w(U_{sol}) \le \max\{w(U_L), w(U_R)\}, \quad z(U_{sol}) \ge \min\{z(U_L), z(U_R)\}$

を満たすことが知られている。この最後のものから、$U_{sol}(t,x) \in \Sigma(w_0, z_0)$ であることもわかる。

さらに、方程式 (2) は発散形で、不連続線上では Rankine-Hugoniot 条件を満たすので、CFL 条件

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu > \Lambda(w_0, z_0)$$

を満たす $\Delta x, \Delta t$ に対し、

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{\Delta t}\int_{-\Delta x}^{\Delta x}\{(U_{sol})_t + F(U_{sol})_x\}dxdt \\
&= \int_{-\Delta x}^{\Delta x} U_{sol}(\Delta t, x)dx - \int_{-\Delta x}^{\Delta x} U_{sol}(0,x)dx + \int_0^{\Delta t}\left[F(U_{sol}(t,x)\right]_{x=-\Delta x}^{x=\Delta x} dt \\
&= \int_{-\Delta x}^{\Delta x} U_{sol}(\Delta t, x)dx - (U_L + U_R)\Delta x + \{F(U_R) - F(U_L)\}\Delta t
\end{aligned}$$

が成り立つ。この最後の式から、

$$\frac{1}{2\Delta x}\int_{-\Delta x}^{\Delta x} U_{sol}(\Delta t, x)dx = \frac{1}{2}(U_L + U_R) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\{F(U_R) - F(U_L)\}$$

すなわち、

$$\frac{1}{2\Delta x}\int_{-\Delta x}^{\Delta x} U_{sol}(\Delta t, x)dx = LF(U_L, U_R, \Delta x/\Delta t) \tag{25}$$

がわかる。つまり U_{sol} の $t = \Delta t$ 上の $[-\Delta x, \Delta x]$ での積分平均が $LF(U_L, U_R)$ となる。

命題 4

$\psi(x)$ が $[a,b]$ 上の、区間 I に値を取る実数値関数で、$f(y)$ が区間 I 上で下に凸ならば、

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(x)dx\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\psi(x))dx$$

$f(y)$ が区間 I 上で上に凸ならば、

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(x)dx\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\psi(x))dx$$

この命題 4 は **Jensen の不等式** と呼ばれる。積分を Riemann 和に分けて、それに凸に対する不等式を適用すれば容易に得られる。

今、$\bar{U} = LF(U_L, U_R)$ とすると、(25) と命題 1、命題 4、および $U_{sol}(t,x) \in \Sigma(w_0, z_0)$ により、

$$\begin{aligned} f_1(\bar{\rho}) &= f_1\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{-\Delta x}^{\Delta x} \rho_{sol}(\Delta t, x)\,dx\right) \leq \frac{1}{2\Delta x}\int_{-\Delta x}^{\Delta x} f_1(\rho_{sol}(\Delta t, x))\,dx \\ &\leq \frac{1}{2\Delta x}\int_{-\Delta x}^{\Delta x} m_{sol}(\Delta t, x)\,dx = \bar{m}, \\ f_2(\bar{\rho}) &= f_2\left(\frac{1}{2\Delta x}\int_{-\Delta x}^{\Delta x} \rho_{sol}(\Delta t, x)\,dx\right) \geq \frac{1}{2\Delta x}\int_{-\Delta x}^{\Delta x} f_2(\rho_{sol}(\Delta t, x))\,dx \\ &\geq \frac{1}{2\Delta x}\int_{-\Delta x}^{\Delta x} m_{sol}(\Delta t, x)\,dx = \bar{m} \end{aligned}$$

が成り立ち、よって $f_1(\bar{\rho}) \leq \bar{m} \leq f_2(\bar{\rho})$ となるので、命題 1 より ${}^t(\bar{\rho}, \bar{m}) \in \Sigma(w_0, z_0)$ が言えることになる。これが、定理 2 の通常の証明の流れである。

7 直接証明: 停留点

次は、いよいよ定理 2 を、Riemann 問題の解を経由せずに、直接計算で示す方法を紹介する。

まず、定理 2 の (22) は w の不等式の方だけ考えれば良いことを先に示す。

$U = {}^t(\rho, \rho u)$ に対して、速度の符号を反対にしたものを $U^* = {}^t(\rho, -\rho u)$ のように書くことにする。このとき、容易に

$$w(U^*) = -z(U), \quad z(U^*) = -w(U), \quad LF(U_1^*, U_2^*) = LF(U_2, U_1)^* \tag{26}$$

となることがわかる。そして、$U_L, U_R \in \Sigma(w_0, z_0)$ のときは、$w(U_L^*) = -z(U_L) \leq -z_0 = w(U_0^*)$ 等より $U_L^*, U_R^* \in \Sigma(w_0^*, z_0^*)$ であり、(17) より $\Lambda(w_0, z_0) = \Lambda(w_0^*, z_0^*)$ もいえるので、よって、もし定理 2 の (22) の w に関する不等式が成り立てば、それを $\Sigma(w_0^*, z_0^*) \ni U_L^*, U_R^*$ に適用すると

$$w(LF(U_R^*, U_L^*)) \leq w_0^*$$

が得られるが、これは、(26) より

$$-z(LF(U_L,U_R)) \leq -z_0$$

を意味するので、(22) の z に関する不等式が得られる。よって以後 w の方のみ考える。

$w(LF(U_L,U_R))$ は、U_L, U_R が領域 $\Sigma(w_0,z_0)$ を動く 4 変数関数と見ることができるが、まずは一方を固定して 2 変数関数として考える。

以後、$\bar{U}=LF(U_L,U_R)$ とし、$U_L, U_R, \bar{U}$ を λ_j や w 等に代入したものを、それぞれ λ_j^L, λ_j^R, $\bar{\lambda}_j$, w_L, w_R, $\bar{w}$ のようにも書くこととする。

まず、$U_L\in\Sigma(w_0,z_0)$ を固定し、$w(\bar{U})$ を U_R に関する 2 変数関数とみて、その停留点を求めてみる。

$$\nabla_{U_R}w(\bar{U}) = \nabla_{\bar{U}}w(\bar{U})\nabla_{U_R}\bar{U}$$

だが、(9) より

$$\begin{aligned}
\nabla_U w(U) &= \left(\frac{\partial w}{\partial\rho},\frac{\partial w}{\partial m}\right) = \left(-\frac{m}{\rho^2}+\frac{C}{\rho},\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}(-\lambda_1,1),\\
\nabla_{U_R}\bar{U} &= \nabla_{U_R}\left(\frac{1}{2}U_R-\frac{1}{2\mu}F(U_R)\right) = \frac{1}{2\mu}(\mu I-\nabla F(U_R))\\
&= \frac{1}{2\mu}\left[\begin{array}{cc}\mu & -1\\ \lambda_1^R\lambda_2^R & \mu-\lambda_1^R-\lambda_2^R\end{array}\right]
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
\nabla_{U_R}w(\bar{U}) &= \frac{1}{2\mu\bar{\rho}}(-\bar{\lambda}_1,1)\left[\begin{array}{cc}\mu & -1\\ \lambda_1^R\lambda_2^R & \mu-\lambda_1^R-\lambda_2^R\end{array}\right]\\
&= \frac{1}{2\mu\bar{\rho}}(-\mu\bar{\lambda}_1+\lambda_1^R\lambda_2^R,\mu+\bar{\lambda}_1-\lambda_1^R-\lambda_2^R)
\end{aligned}$$

となる。よって、$w(\bar{U})$ の U_R に関する停留点があるとすると、そこで

$$\left\{\begin{array}{l}\mu\bar{\lambda}_1=\lambda_1^R\lambda_2^R,\\ \mu+\bar{\lambda}_1=\lambda_1^R+\lambda_2^R\end{array}\right.$$

となるが、これは μ, $\bar{\lambda}_1$ が 2 次方程式 $t^2-(\lambda_1^R+\lambda_2^R)t+\lambda_1^R\lambda_2^R=0$ の解であることを意味し、よって

$$(\mu,\bar{\lambda}_1)=(\lambda_1^R,\lambda_2^R),(\lambda_2^R,\lambda_1^R)$$

のいずれかとなるが、しかし CFL 条件より $\mu > |\lambda_j(U_R)|$ なので、これらはいずれも成立しない。つまり、U_R に関する停留点は存在しない。

よって、U_R を動かした場合、$w(\bar{U})$ はその最大値を領域 $\Sigma(w_0, z_0)$ の内部で取ることはない。

同様に $U_R \in \Sigma(w_0, z_0)$ を固定して U_L に関する停留点を考えると、

$$\begin{aligned}
\nabla_{U_L} w(\bar{U}) &= \nabla_{\bar{U}} w(\bar{U}) \nabla_{U_L} \bar{U} = \frac{1}{\bar{\rho}}(-\bar{\lambda}_1, 1)\frac{1}{2\mu}(\mu I + \nabla F(U_L)) \\
&= \frac{1}{2\mu\bar{\rho}}(-\bar{\lambda}_1, 1)\left[\begin{array}{cc} \mu & 1 \\ -\lambda_1^L\lambda_2^L & \mu + \lambda_1^L + \lambda_2^L \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2\mu\bar{\rho}}(-\mu\bar{\lambda}_1 - \lambda_1^L\lambda_2^L, \mu - \bar{\lambda}_1 + \lambda_1^L + \lambda_2^L)
\end{aligned}$$

となるので、停留点では

$$\left\{\begin{array}{l} -\mu\bar{\lambda}_1 = \lambda_1^L\lambda_2^L, \\ -\mu + \bar{\lambda}_1 = \lambda_1^L + \lambda_2^L \end{array}\right.$$

となるが、これは

$$(\mu, \bar{\lambda}_1) = (-\lambda_1^L, \lambda_2^L), (-\lambda_2^L, \lambda_1^L)$$

のいずれかとなって、やはり CFL 条件に反するので、U_L を動かした場合の停留点も存在しない。

よって、$w(\bar{U})$ は U_L に関する最大値を領域 $\Sigma(w_0, z_0)$ の内部では取らない。

これらにより、4 変数関数 $w(\bar{U})$ の最大値は、U_L, U_R の両方が領域 $\Sigma(w_0, z_0)$ の境界上にあるときに取ることがわかる。

8 直接証明: 境界上

次は、$w(\bar{U})$ の、U_L, U_R が $\Sigma(w_0, z_0)$ の境界上を動くときの最大値を考える。$\Sigma(w_0, z_0)$ の境界は、

$$\begin{aligned}
B_w &= \{U;\ w(U) = w_0,\ z_0 \le z(U) \le w_0\}, \\
B_z &= \{U;\ z(U) = z_0,\ z_0 \le w(U) \le w_0\}, \\
B_0 &= \{U;\ \rho = 0,\ z_0 \le u \le w_0\}
\end{aligned}$$

の 3 つの部分からなる (図 1) が、まず B_0 を除外しておく。

$U_L \in B_0$ の場合は、$\rho_L = 0$ より、

$$U_L = \begin{bmatrix} \rho_L \\ \rho_L u_L \end{bmatrix} = 0, \quad F(U_L) = \begin{bmatrix} \rho_L u_L \\ \rho_L u_L^2 + P(\rho_L) \end{bmatrix} = 0$$

となるので、

$$\bar{U} = \frac{1}{2\mu}(\mu U_R - F(U_R))$$

となるが、これは B_z の端 $(z(U_L) = w(U_L) = z_0)$、および B_w の端 $(z(U_L) = w(U_L) = w_0)$ でも同じなので、それらに含まれると考えてよい。$U_R \in B_0$ の場合も同様なので、よって、$U_L, U_R \in B_w \cup B_z$ としてよいことになる。

今後、$\bar{w} \leq w_0$ であることを示す代わりに、

$$I = \bar{\rho}(w_0 - \bar{w}) \tag{27}$$

とし、この I が 0 以上になるかどうかを考えることにする。まず I を変形する。

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \frac{1}{2}(\rho_L u_L + \rho_R u_R) - \frac{1}{2\mu}(\rho_R u_R^2 + P_R - \rho_L u_L^2 - P_L) \\ &= \frac{1}{2}(\rho_L u_L D_L^+ + \rho_R u_R D_R^-) - \frac{1}{2\mu}(P_R - P_L) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} I &= \bar{\rho} w_0 - \bar{\rho}(\bar{u} + G(\bar{\rho})) = \bar{\rho} w_0 - \bar{m} - \bar{\rho}\bar{G} \\ &= \frac{1}{2}(\rho_L D_L^+ + \rho_R D_R^-) w_0 - \frac{1}{2}(\rho_L u_L D_L^+ + \rho_R u_R D_R^-) + \frac{1}{2\mu}(P_R - P_L) - \bar{\rho}\bar{G} \end{aligned}$$

となるので、

$$I = \frac{1}{2}\rho_L D_L^+(w_0 - u_L) + \frac{1}{2}\rho_R D_R^-(w_0 - u_R) + \frac{1}{2\mu}(P_R - P_L) - \bar{\rho}\bar{G} \tag{28}$$

と書ける。

まず、U_L を $B_w \cup B_z$ 上に固定して、U_R を B_z 上で動かして考える。この場合、$z(U_R) = z_0$ より

$$u_R = z_0 + G(\rho_R)$$

なので、これを代入すれば I は ρ_R の 1 変数関数と見ることができる。その ρ_R に関する導関数を計算する。

$$\frac{dI}{d\rho_R} = \frac{1}{2}\{\rho_R D_R^-(w_0 - z_0 - G(\rho_R))\}_{\rho_R} + \frac{1}{2\mu}P'(\rho_R) - (\bar{\rho}\bar{G})_{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{d\rho_R}$$

となるが、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\bar{\rho}}(\bar{\rho}G(\bar{\rho})) &= G(\bar{\rho}) + C(\bar{\rho}) = H(\bar{\rho}),\\
\frac{dD_R^-}{d\rho_R} &= -\frac{1}{\mu}\frac{du_R}{d\rho_R} = -\frac{1}{\mu}(z_0 + G(\rho_R))_{\rho_R} = -\frac{C_R}{\mu\rho_R},\\
\frac{d(\rho_R D_R^-)}{d\rho_R} &= D_R^- + \rho_R\left(-\frac{C_R}{\mu\rho_R}\right) = D_R^- - \frac{C_R}{\mu},\\
\frac{d\bar{\rho}}{d\rho_R} &= \frac{1}{2}(\rho_R D_R^-)_{\rho_R} = \frac{1}{2}\left(D_R^- - \frac{C_R}{\mu}\right)
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\rho_R} &= \frac{1}{2}\left(D_R^- - \frac{C_R}{\mu}\right)(w_0 - z_0 - G_R) + \frac{1}{2}\rho_R D_R^-\left(-\frac{C_R}{\rho_R}\right) + \frac{C_R^2}{2\mu}\\
&\quad - \frac{1}{2}H(\bar{\rho})\left(D_R^- - \frac{C_R}{\mu}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(D_R^- - \frac{C_R}{\mu}\right)(w_0 - z_0 - G_R - C_R - \bar{H})
\end{aligned}$$

より、

$$\frac{dI}{d\rho_R} = \frac{1}{2}\left(D_R^- - \frac{C_R}{\mu}\right)(w_0 - z_0 - H_R - \bar{H}) \tag{29}$$

となることがわかる。ここで、右辺の最初の部分は、CFL 条件より

$$D_R^- - \frac{C_R}{\mu} = 1 - \frac{u_R + C_R}{\mu} = 1 - \frac{\lambda_2^R}{\mu} > 0$$

となるので、$dI/d\rho_R$ の符号は $(w_0 - z_0 - H_R - \bar{H})$ の符号に等しい。

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\rho_R} = \frac{1}{2}\left(D_R^- - \frac{C_R}{\mu}\right) > 0$$

で、$H'(\rho)\geq 0$ より

$$\frac{d}{d\rho_R}(w_0-z_0-H_R-\bar{H})=-H'(\rho_r)-H'(\bar{\rho})\frac{d\bar{\rho}}{d\rho_R}\leq 0$$

となるから $w_0-z_0-H_R-\bar{H}$ は ρ_R に関して非増加関数となる。よって、(29) の右辺は正の値と非増加関数の積なので、常に負か、常に正か、またはあるところまでは正であるところから負、の 3 通りのうちのいずれかとなり、I はそれぞれ単調減少、単調増加、または増加して減少する関数となるから、いずれの場合でもその最小値は両端の $\rho_R=0,\ \rho_R=\rho_0$ のいずれかで取ることになる。

$\rho_R=0$ の場合は、B_0 に含まれ、それはどこでも値は変わらなかったので、結局その端の値は B_w の端での値と同じになるから、結局 $U_R\in B_z\cup B_w$ での I の最小値は、$U_R\in B_w$ での最小値に等しい。

よって次は、$U_R\in B_w$ を固定して、$U_L\in B_z$ を動かしてその最小値を考える。この場合は、$z(U_L)=z_0$ より

$$u_L=z_0+G(\rho_L)$$

なので、これを I に代入すれば ρ_L の 1 変数関数となり、それを ρ_L で微分する。この場合、

$$\frac{dI}{d\rho_L}=\frac{1}{2}\{\rho_L D_L^+(w_0-z_0-G(\rho_L))\}_{\rho_L}-\frac{1}{2\mu}P'(\rho_L)-(\bar{\rho}\bar{G})_{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{d\rho_L}$$

で、

$$\begin{aligned}
\frac{dD_L^+}{d\rho_L} &= \frac{1}{\mu}\frac{du_L}{d\rho_L}=\frac{1}{\mu}(z_0+G(\rho_L))_{\rho_L}=\frac{C_L}{\mu\rho_L},\\
\frac{d(\rho_L D_L^+)}{d\rho_L} &= D_L^+ +\rho_L\left(\frac{C_L}{\mu\rho_L}\right)=D_L^+ +\frac{C_L}{\mu},\\
\frac{d\bar{\rho}}{d\rho_L} &= \frac{1}{2}(\rho_L D_L^+)_{\rho_L}=\frac{1}{2}\left(D_L^+ +\frac{C_L}{\mu}\right)
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\rho_L} &= \frac{1}{2}\left(D_L^+ +\frac{C_L}{\mu}\right)(w_0-z_0-G_L)+\frac{1}{2}\rho_L D_L^+\left(-\frac{C_L}{\rho_L}\right)-\frac{C_L^2}{2\mu}\\
&\quad -\frac{1}{2}H(\bar{\rho})\left(D_L^+ +\frac{C_L}{\mu}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(D_L^+ +\frac{C_L}{\mu}\right)(w_0-z_0-H_L-\bar{H})
\end{aligned}$$

となる。ρ_R の場合同様、CFL 条件により

$$D_L^+ + \frac{C_L}{\mu} = 1 + \frac{\lambda_2^L}{\mu} > 0$$

であり、$(w_0 - z_0 - H_L - \bar{H})$ も ρ_L に関して非増加となるので、I の最小値は両端 $\rho_L = 0, \rho_L = \rho_0$ で取る。よって、$U_L \in B_z \cup B_w$ での I の最小値は $U_L \in B_w$ の最小値に等しくなる。

以上により、$U_L, U_R \in B_w$ での最小値を考えればよいことになる。

最後に、$U_R \in B_w$ に固定したまま、$U_L \in B_w$ を動かして考える。この場合は $w(U_L) = w_0$ より

$$u_L = w_0 - G(\rho_L)$$

なので、

$$\frac{dI}{d\rho_L} = \frac{1}{2}\{\rho_L D_L^+ G(\rho_L)\}_{\rho_L} - \frac{1}{2\mu}P'(\rho_L) - (\bar{\rho}\bar{G})_{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{d\rho_L}$$

で、

$$\begin{aligned}
\frac{dD_L^+}{d\rho_L} &= \frac{1}{\mu}\frac{du_L}{d\rho_L} = \frac{1}{\mu}(w_0 - G(\rho_L))_{\rho_L} = -\frac{C_L}{\mu\rho_L}, \\
\frac{d(\rho_L D_L^+)}{d\rho_L} &= D_L^+ + \rho_L\left(-\frac{C_L}{\mu\rho_L}\right) = D_L^+ - \frac{C_L}{\mu}, \\
\frac{d\bar{\rho}}{d\rho_L} &= \frac{1}{2}(\rho_L D_L^+)_{\rho_L} = \frac{1}{2}\left(D_L^+ - \frac{C_L}{\mu}\right)
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{d\rho_L} &= \frac{1}{2}\left(D_L^+ - \frac{C_L}{\mu}\right)G_L + \frac{1}{2}D_L^+ C_L - \frac{C_L^2}{2\mu} - \frac{1}{2}H(\bar{\rho})\left(D_L^+ - \frac{C_L}{\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(D_L^+ - \frac{C_L}{\mu}\right)(H_L - \bar{H})
\end{aligned}$$

となる。

$$D_L^+ - \frac{C_L}{\mu} = 1 + \frac{u_L - C_L}{\mu} = 1 + \frac{\lambda_1^L}{\mu} > 0$$

なので、$dI/d\rho_L$ の符号は $(H_L - \bar{H})$ の符号に等しく、$H' \geq 0$ よりそれは $(\rho_L - \bar{\rho})$ の符号に等しい。

$$\rho_L - \bar{\rho} = \rho_L - \frac{1}{2}(\rho_L D_L^+ + \rho_R D_R^-) = \frac{1}{2}\rho_L D_L^- - \frac{1}{2}\rho_R D_R^-$$

となり、よって

$$\frac{d}{d\rho_L}(\rho_L - \bar{\rho}) = \frac{1}{2}(\rho_L D_L^-)_{\rho_L} = \frac{1}{2}\left(D_L^- + \frac{C_L}{\mu}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1^L}{\mu}\right) > 0$$

となるので $(\rho_L - \bar{\rho})$ は増加関数。$\rho_L = \rho_R$ のときは、

$$u_L = (w_0 - G(\rho_L))|_{\rho_L = \rho_R} = w_0 - G(\rho_R)$$

となるが、$U_R \in B_w$ より $w(U_R) = w_0$ なので $w_0 - G_R = w_R - G_R = u_R$、よって $u_L = u_R$ となるから、

$$(\rho_L - \bar{\rho})|_{\rho_L = \rho_R} = \frac{1}{2}\left(\rho_L D_L^- - \rho_R D_R^-\right)\Big|_{\rho_L = \rho_R} = \frac{1}{2}(\rho_R D_R^- - \rho_R D_R^-) = 0$$

となるので、$(\rho_L - \bar{\rho})$ は $\rho_L = \rho_R$ で符号を変え、$\rho_L > \rho_R$ ならば正、$\rho_L < \rho_R$ ならば負となる。

$dI/d\rho_L$ の符号はその符号に等しいので、よって I は $\rho_L = \rho_R$ で最小値を取る。$\rho_L = \rho_R$ のときは $u_L = u_R$ なので、

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_L D_L^+ + \rho_R D_R^-) = \frac{1}{2}\rho_R(D_R^+ + D_R^-) = \rho_R$$

となり、よって I の最小値は

$$\begin{aligned} I|_{\rho_L = \rho_R} &= \frac{1}{2}\rho_R(D_R^+ + D_R^-)(w_0 - u_R) - \rho_R G_R = \rho_R(w_0 - u_R - G_R) \\ &= \rho_R(w_0 - w_R) = 0 \end{aligned}$$

となる。以上で I の最小値が 0 であることがわかり、$w(\bar{U}) \leq w_0$ が示されたことになる。

9 最後に

7 節、8 節が本稿の主要部分で、差分の式には本来微分計算を適用しづらいのであるが、7 節、8 節ではいずれも最大最小問題を考えるために微分を多用

し、それにより方程式の微分に関する構造、性質をうまく利用できていて、そして話がうまく進んでいることがわかる。

特に 8 節では、計算する導関数に毎回似た形の項が出てきたり、$(1 \pm \lambda_j/\mu)$ のようなもので割り切れる形になることなどは、むしろきれいにできすぎていると感じる位である。

ただ、本稿は特に新しい結果を示してはいないので、今のところ特に意味があるわけではない。今後この手法が他の方程式、あるいはさらに微分に関する評価に使えれば価値がでてくるかもしれないが、今のところそれははわからない。

A 補遺

ここでは、2 節で触れた、(4), (5) から $C(+0)=0$ が導かれることを説明する。

命題 5

$(0,1)$ 上の関数 $f(x)$ が $f(x)\geq 0$ で、

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx < \infty \tag{30}$$

を満たし、かつ $g(x)=xf(x)$ が非減少関数であれば、$f(+0)$ が存在して $f(+0)=0$ となる。

(30) は当然 (5) に対応するが、「$xf(x)$ が非減少」というのは、(4) の最後の条件から得られる (7) の条件に対応する。よって命題 5 が成り立てば $C(+0)=0$ が成り立つ。

なお、この命題 5 は、「$xf(x)$ が非減少」という条件がなければ成り立たないことに注意する。もし $f(+0)$ が存在すれば、(30) よりそれが 0 でなければいけないことはすぐにわかるが、$xf(x)$ が非減少でなければ $f(+0)$ が存在しない例が容易に作れる。例えば、$\phi_0(x)\in C_c(R)$ を

$$\phi_0(x)\geq 0,\quad \operatorname{supp}\phi_0\subset[1,2],\quad \int\phi_0\,dx=1$$

であるような関数とし、$\{p_n\}$, $\{a_n\}$ を $p_n\downarrow 0$ で $p_n+1/a_n<p_{n-1}$ となるように取り、

$$\phi_n(x)=\phi_0\left(a_n\left(x-p_n+\frac{1}{a_n}\right)\right),\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)$$

とする。この場合、$\operatorname{supp}\phi_n = [p_n,\ p_n + 1/a_n]$ は互いに交わらず、よって、$f(x)$ は 0 の近くで ϕ_0 の幅で振動する関数となり、もちろん $f(+0)$ は存在しないが、

$$\int_{p_n}^{p_n+1/a_n} \frac{\phi_n}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{\phi_0(y)}{y-1+a_np_n}\,dy \le \frac{1}{a_np_n}\int \phi_0\,dy = \frac{1}{a_np_n}$$

となるので、例えば $a_n = n^4,\ p_n = 1/n^2$ とすれば

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx = \sum \int \frac{\phi_n(x)}{x}\,dx \le \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

は満たされる。つまり、$f(+0) = 0$ となるためには $f \ge 0$ と (30) だけでは不十分であり、「$xf(x)$ が非減少」のような条件が必要であることがわかる。

さて命題 5 を背理法で証明する。もし、$f(+0) = 0$ でないとすると、

$$f(x_n) \ge \varepsilon_0 > 0, \quad x_n \downarrow 0 \quad (x_1 < 1) \tag{31}$$

となるような正数 ε_0 と数列 $\{x_n\}$ が存在する。

$g(x) = xf(x)$ は増加関数なので、$x_n \le x \le x_{n-1}$ では、

$$g(x) \ge g(x_n) = x_nf(x_n) \ge \varepsilon_0 x_n$$

となる。よって、$f(x) = g(x)/x \ge \varepsilon_0 x_n/x$ となり、

$$\begin{aligned}\int_0^{x_1} \frac{f(x)}{x}\,dx &= \sum_{n=2}^{\infty}\int_{x_n}^{x_{n-1}} \frac{f(x)}{x}\,dx \ge \sum_{n=2}^{\infty}\varepsilon_0 x_n \int_{x_n}^{x_{n-1}} \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \varepsilon_0 \sum_{n=2}^{\infty} x_n\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}\right)\end{aligned}$$

より、(30) より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < \infty \tag{32}$$

が成り立つことになる。しかしこれが不合理であることを示す。

今、$b_n = 1 - x_{n+1}/x_n$ とすると、$x_n \downarrow 0$ より $0 < b_n < 1$ で、(32) より $\sum b_n < \infty$ であるから $\lim b_n = 0$ となり、よって $n \ge N$ ならば $0 < b_n < 1/2$ となるような N が存在する。

$x_{n+1} = x_n(1-b_n)$ より、$n \geq N$ に対して $x_n = x_N \prod_{k=N}^{n}(1-b_k)$、よって、

$$\log x_n = \log x_N + \sum_{k=N}^{n} \log(1-b_k)$$

となる。ここで、$x_n \downarrow 0$ であったから、

$$\sum_{k=N}^{\infty}\{-\log(1-b_k)\} = \infty \tag{33}$$

が言えることになるが、$0 < x < 1/2$ では $(-\log(1-x))/x$ は正でかつ有界な関数なので、$(-\log(1-x)) \leq c_0 x$ となる定数 $c_0 > 0$ が取れる。よって、

$$\sum_{k=N}^{\infty}\{-\log(1-b_k)\} \leq c_0 \sum_{k=N}^{\infty} b_k < \infty$$

となるが、これは (33) に矛盾する。

よって (31) となるような ε_0 と $\{x_n\}$ は取れないことになり、命題 5 が成り立つことが示された。

参考文献

[1] J.A.Smoller, "*Shock waves and reaction-diffusion equations*", 2nd ed. Springer, 1994.

[2] Ding Xiaxi, Chen Guiqiang, and Luo Peizhu, Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I), Acta Mathematica Scientia **5**, 415-432 (1985).

[3] F.Bouchut, "*Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*", Birkhäuser, 2004.

[4] R.J.LeVeque, "*Numerical Methods for conservation laws*", 2nd ed. Birkhäuser, 1992.