2009 年 09 月 18 日

斜円錐の側面の展開図について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

以前、斜円錐の側面積に関して考察した ([2]) が、ふと、その展開図はどうなるのかという話を目にした。

実はこれもかなり厄介な話であり、少し計算してみたので、ここにまとめておく。

2 定義

まず、本稿で扱う錐体の意味を明確にしておく。

錐体とは、ある平面 H 内に連結な領域 S を囲む交差のない閉曲線 C があり、この S を底面として、H 上にはない点 P を頂点とする立体を指す。すなわち、S 上の点と P を結ぶ線分全体からなる集合で、C 上の点と P を結ぶ線分全体からなる面を側面とし、この側面と底面 S で囲まれる立体である (図 1)。

よって、C と P を指定することで一つの錐体を決めることができる。底面 S は、C によって平面内に容易に図を書くことができるから、本稿で考察する展開図とは、もちろん側面の展開図のことである。

側面は、C 上の点と P を結ぶ線分の集合であるので、その一本の線分 (母線) に沿って切り開けば、側面は平面上に描くことができる。この切り開いた扇形状の図形を式で表すことを考える。

3 円錐を斜めに切った錐体

まず、簡単な例として、円錐を斜めに切ってできる錐体を考えることにする (図 2)。これは、底面が楕円になることが知られている ([2] 参照)。

頂点が $\mathrm{P}(0,0,h)$ $(h>0)$ で中心軸が z 軸、xy 平面との交円が

$$x^2+y^2\le a^2 \quad (a>0), \quad z=0$$

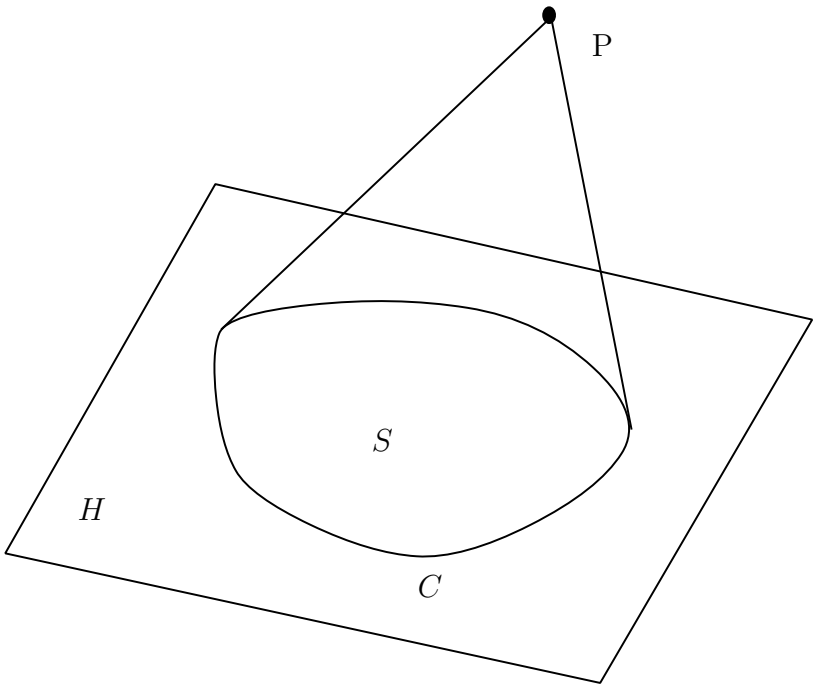

図 1: 一般の錐体

となる、下に無限に伸びる円錐に対し、この円錐を、原点を通って法線ベクトルが

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, 0, \sin\alpha) \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

である平面 H で切り出した錐体の側面の展開図を求める。

ここで、$\boldsymbol{n}$ は xz 平面上にある、x 軸となす角が α のベクトルであり、この円錐の中心軸 (z 軸) と母線のなす角を β とすると (図 3)、

$$\tan\beta = \frac{a}{h} \tag{1}$$

であるから、α は

$$0 < \beta < \alpha \tag{2}$$

を満たす必要がある。

なお、$0 < \alpha \leq \beta$ の場合は円錐の側面と H との交曲線は無限に伸びてしまうが、$\alpha = \beta$ の場合はそれは放物線に、$0 < \alpha < \beta$ の場合はそれは双曲線になることが知られている。

今、xy 平面上の円周 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点を

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}(t) : \ (a\cos t, a\sin t, 0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

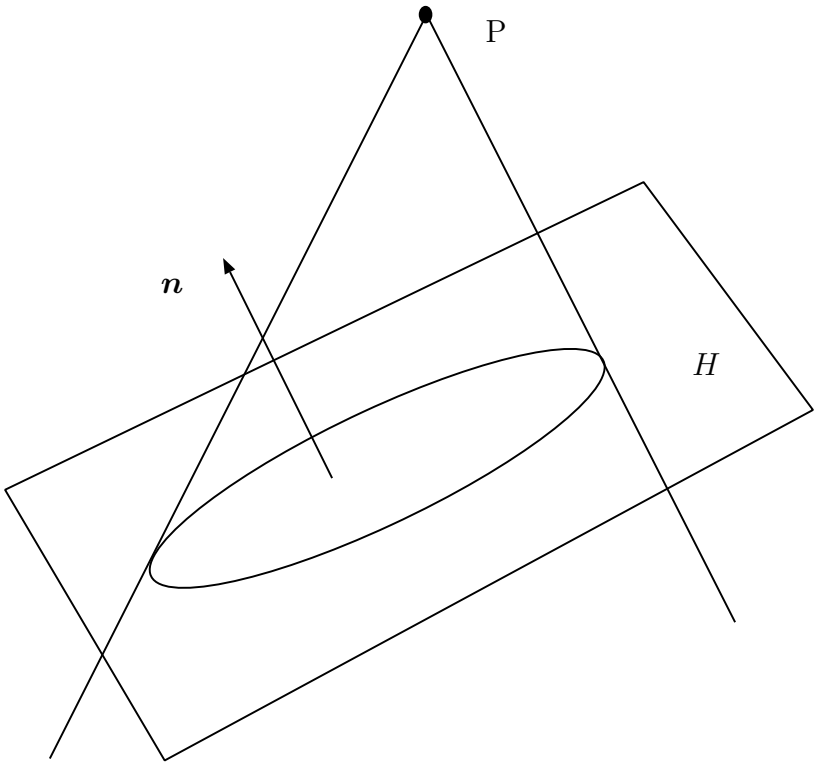

図 2: 円錐を斜めに切った錐体

とパラメータ表示し、直線 OR と H との交点を Q とすると (図 (4)、Q が t で表されることになる。この場合は、t と展開図の中心角との間に比例関係があるので、展開図を式で表すのは難しくない。

この円錐の側面を線分 $\mathrm{PQ}(0)$ (最長の母線) で切り開いて、その展開図の中心角 $\angle\mathrm{Q}(0)\mathrm{PQ}(t)$ を θ とすると (図 5)、$\angle\mathrm{R}(0)\mathrm{PR}(t) = \theta$ であり、$\mathrm{PR}(t) = \sqrt{a^2+h^2}$ なので、弧 $\mathrm{R}(0)\mathrm{R}(t)$ の長さは展開図では $\sqrt{a^2+h^2}\,\theta$ となる。一方、xy 平面では $\mathrm{R}(0)\mathrm{R}(t)$ は半径 a の円弧であるから、弧 $\mathrm{R}(0)\mathrm{R}(t)$ の長さは at となる。よって、

$$t = \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,\theta \tag{3}$$

と、t, θ が比例関係になることがわかる。

後は $\mathrm{PQ}(t)$ の長さ $\rho(t)$ を求めれば、(3) より、曲線 C の展開図での形は

$$r = \rho(t) = \rho\left(\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}\,\theta\right) \quad \left(0 \le \theta \le \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right) \tag{4}$$

と極座標で表現されることになる。

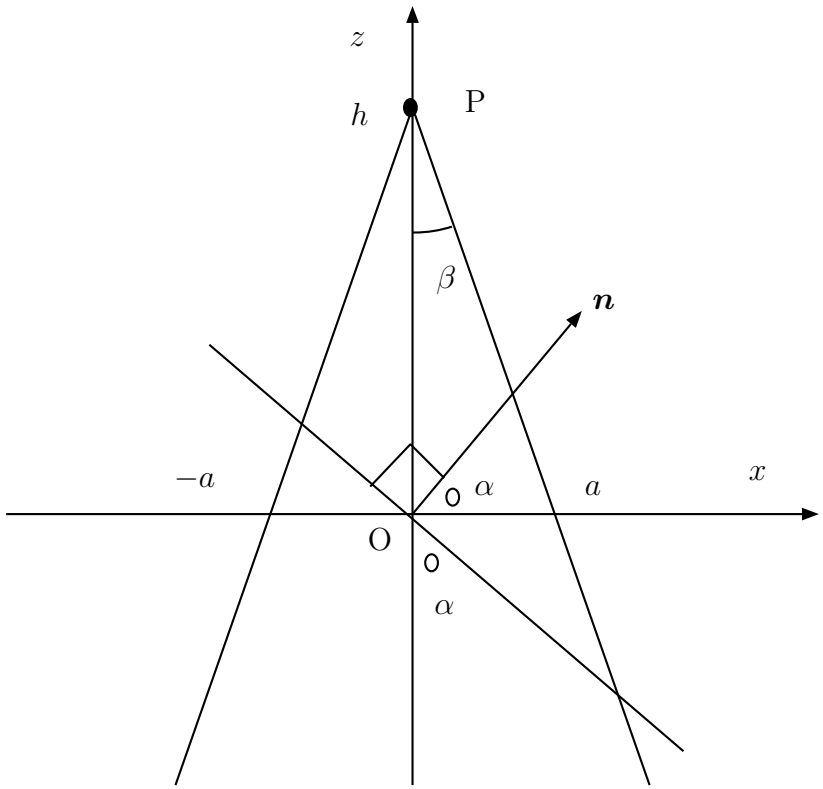

図 3: α と β

今、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (0, 0, h) + s(a\cos t, a\sin t, -h)$$

とすると、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \boldsymbol{n}$ より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{n} &= \{(0, 0, h) + s(a\cos t, a\sin t, -h)\} \cdot (\cos\alpha, 0, \sin\alpha) \\ &= h\sin\alpha + s(a\cos t\cos\alpha - h\sin\alpha) = 0 \end{aligned}$$

となるので、

$$s = \frac{h\sin\alpha}{h\sin\alpha - a\cos t\cos\alpha} = \frac{h\tan\alpha}{h\tan\alpha - a\cos t} \tag{5}$$

となる。なお、(1), (2) より、

$$h\tan\alpha > h\tan\beta = a$$

なので、(5) の分母は

$$h\tan\alpha - a\cos t \geq h\tan\alpha - a > 0$$

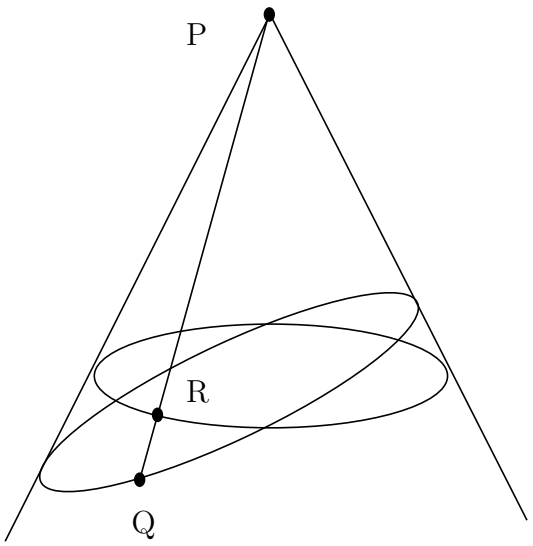

図 4: P と Q

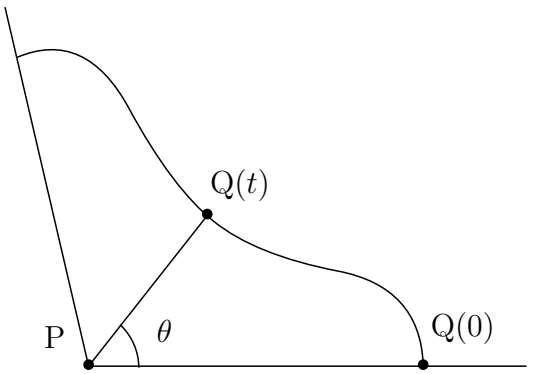

図 5: 側面の展開図

である。

(5) より、

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{h\tan\alpha}{h\tan\alpha - a\cos t}\,(a\cos t, a\sin t, -h) \tag{6}$$

となるから、

$$\rho(t) = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = \frac{h\tan\alpha}{h\tan\alpha - a\cos t}\sqrt{a^2+h^2}$$

となる。よって、(4) より、

$$r = r(\theta) = \frac{h\sqrt{a^2+h^2}\,\tan\alpha}{h\tan\alpha - a\cos(\theta\sqrt{a^2+h^2}/a)} \quad \left(0 \le \theta \le \frac{2\pi a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)$$

と側面の展開図が極座標表示できることになる。

例えば $\alpha = \pi/4$, $h = \sqrt{3}$, $a = 1$ $(\beta = \pi/6)$ とすると、

$$r = r(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \cos 2\theta} \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

となる。

4 一般の錐体の場合の極座標公式

3 節の錐体は、円錐を斜めに切ったものであり、この場合は展開図は簡単に極座標表示できたが、斜円錐、すなわち底面が円で、頂点がその中心の真上にない点である錐体の場合は、展開図を与える式はそのように簡単にはならない。それは、C のパラメータ t と展開図の極座標の中心角 θ との間に (3) のような簡単な関係式が成り立たないからである。

本節では、まず一般的な錐体に対してその t と θ の関係式を求め、展開図の極座標による表現式を与えることを考える。

まず、C 上の点をパラメータ t を用いて $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$ で表し $(\mathrm{Q}(t_0) = \mathrm{Q}(t_1))$、

$$\boldsymbol{q}(t) = \overrightarrow{\mathrm{PQ}(t)} = (q_x(t), q_y(t), q_z(t))$$

とし、その母線の長さを

$$\rho(t) = |\boldsymbol{q}(t)| = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}(t)}|$$

とする (図 6)。

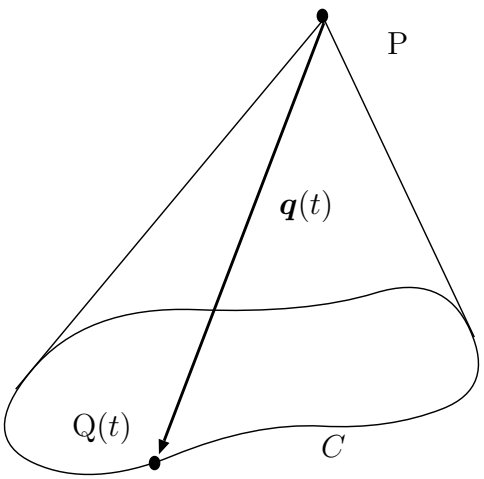

図 6: $\boldsymbol{q}(t)$

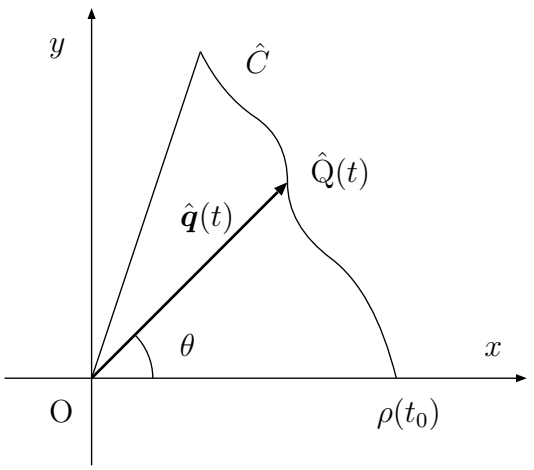

図 7: その展開図

そして、側面を母線 $\mathrm{PQ}(t_0)$ で切り開いた展開図は、頂点 P を原点に合わせ、$\mathrm{PQ}(t_0)$ を x 軸に合わせ、曲線 C に対応する展開図の曲線を $\hat{C}$ とし、C 上の点 $\mathrm{Q}(t)$ に対応する展開図上の点を $\hat{\mathrm{Q}}(t)$ とする (図 7)。この $\hat{C}$ を極座標表示することを考える。

今、$\hat{\boldsymbol{q}}(t) = \overrightarrow{\mathrm{O}\hat{\mathrm{Q}}(t)}$ とすると、まず

$$|\hat{\boldsymbol{q}}(t)| = \rho(t) = |\boldsymbol{q}(t)| \tag{7}$$

であり、そして $\hat{\mathrm{Q}}(t)$ を決めるもう一つの条件は、C 上の弧 $\mathrm{Q}(t_0)\mathrm{Q}(t)$ の長さが、$\hat{C}$ 上の弧 $\hat{\mathrm{Q}}(t_0)\hat{\mathrm{Q}}(t)$ の長さに等しいことであり、それは、

$$\int_{t_0}^{t} |\hat{\boldsymbol{q}}'(s)|ds = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{q}'(s)|ds$$

と書けるので、この両辺を t で微分すれば、

$$|\hat{\boldsymbol{q}}'(t)| = |\boldsymbol{q}'(t)| \tag{8}$$

となる。この (7), (8) と、初期条件

$$\hat{\boldsymbol{q}}(t_0) = (0, \rho(t_0)) \tag{9}$$

によって $\hat{\boldsymbol{q}}(t)$、すなわち $\hat{\mathrm{Q}}(t)$ が決まることになる。

$\hat{\mathrm{Q}}(t)$ を極座標 r, θ で表すことを考え、

$$\hat{\boldsymbol{q}}(t) = r(\cos\theta, \sin\theta) \tag{10}$$

とすると、r と θ を t で表すことができる。その t を消去すれば、展開図 $\hat{C}$ を $r = r(\theta)$ の形の極座標で表すことができることになる。

まず、(7) より

$$r = |\hat{\boldsymbol{q}}(t)| = \rho(t) \tag{11}$$

であり、$\theta = \theta(t)$ とすると、(10) より、

$$\hat{\boldsymbol{q}}'(t) = \{\rho(t)(\cos\theta(t), \sin\theta(t))\}' = \rho'(\cos\theta, \sin\theta) + \rho(-\sin\theta, \cos\theta)\theta'$$

となるので、

$$|\hat{\boldsymbol{q}}'(t)|^2 = (\rho')^2|(\cos\theta, \sin\theta)|^2 + (\rho\theta')^2|(-\sin\theta, \cos\theta)|^2 = (\rho')^2 + (\rho\theta')^2$$

より、(8) から

$$(\rho')^2 + (\rho\theta')^2 = |\boldsymbol{q}'|^2 \tag{12}$$

となる。ここで、(7) より、

$$\rho(t)^2 = |\boldsymbol{q}(t)|^2 = \boldsymbol{q}(t)\cdot\boldsymbol{q}(t)$$

であるから、これを微分すれば

$$2\rho\rho' = 2\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}'$$

となるので、

$$\rho' = \frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}'}{\rho} = \frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}'}{|\boldsymbol{q}|}$$

と書ける。よって (12) より

$$\begin{aligned}(\rho\theta')^2 &= |\boldsymbol{q}'|^2 - (\rho')^2 = |\boldsymbol{q}'|^2 - \frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}')^2}{|\boldsymbol{q}|^2} = \frac{|\boldsymbol{q}|^2|\boldsymbol{q}'|^2 - (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}')^2}{|\boldsymbol{q}|^2}\\ &= \frac{|\boldsymbol{q}|^2|\boldsymbol{q}'|^2 - |\boldsymbol{q}|^2|\boldsymbol{q}'|^2\cos^2\phi}{|\boldsymbol{q}|^2} = \frac{|\boldsymbol{q}|^2|\boldsymbol{q}'|^2\sin^2\phi}{|\boldsymbol{q}|^2}\\ &= \frac{|\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q}'|^2}{|\boldsymbol{q}|^2} \quad (\phi \text{ は } \boldsymbol{q} \text{ と } \boldsymbol{q}' \text{ のなす角})\end{aligned}$$

となるから、題意より $\theta' > 0$ なので、

$$\theta' = \frac{|\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q}'|}{\rho|\boldsymbol{q}|} = \frac{|\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q}'|}{|\boldsymbol{q}|^2}$$

となり、$\theta(t_0) = 0$ より結局 $\theta(t)$ は

$$\theta(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{|\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q}'|}{|\boldsymbol{q}|^2}\,dt \tag{13}$$

と表されることになる。

この (11), (13) から t を消去する、あるいは r, θ のパラメータ t による表現により $\hat{C}$ が得られるわけであるが、この積分 (13) の計算は必ずしも易しくはないことに注意する。

今、3 節の例にこれを適用してみよう。この場合は、(6) の右辺が $\boldsymbol{q}(t)$ なので、簡単のため、

$$\beta(t) = \frac{h\tan\alpha}{h\tan\alpha - a\cos t}$$

とすると $\boldsymbol{q}(t) = \beta(t)(a\cos t, a\sin t, -h)$ であるから、

$$\boldsymbol{q}'(t) = \beta'(a\cos t, a\sin t, -h) + \beta(-a\sin t, a\cos t, 0)$$

であるから、

$$\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q}' = \beta^2(a\cos t, a\sin t, -h) \times (-a\sin t, a\cos t, 0) = \beta^2(ah\cos t, ah\sin t, a^2)$$

となる。よって、$\beta > 0$ より

$$\frac{|\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{q}'|}{|\boldsymbol{q}|^2} = \frac{\beta^2\sqrt{a^2h^2 + a^4}}{\beta^2(a^2 + h^2)} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

となるので、(13) より

$$\theta = \int_0^t \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}\, dt = \frac{at}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

となり、確かに 3 節の (3) が得られることになる。

5 斜円錐の場合

次に斜円錐の場合を考える。ただし、$[2]$ に合わせ、まずは底面は楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

であるとし、頂点は $\mathrm{P}(p, q, h)$ $(h > 0)$ であるとする。

この場合は、$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(t)$ は、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}(t)} = (a\cos t, b\sin t, 0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

とパラメータ表示できるので、

$$\boldsymbol{q}(t) = \overrightarrow{\mathrm{PQ}(t)} = (a\cos t - p, b\sin t - q, -h)$$

となる。よって、

$$\boldsymbol{q}'(t) = (-a\sin t, b\cos t, 0)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q}' &= (a\cos t-p, b\sin t-q, -h)\times(-a\sin t, b\cos t, 0)\\ &= (bh\cos t, ah\sin t, ab-bp\cos t-aq\sin t)\end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{|\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{q}'|}{|\boldsymbol{q}|^2} = \frac{\sqrt{h^2(b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)+(ab-bp\cos t-aq\sin t)^2}}{(a\cos t-p)^2+(b\sin t-q)^2+h^2}$$

となるから、$r=r(t)$, $\theta=\theta(t)$ は、

$$r(t) = \sqrt{(a\cos t-p)^2+(b\sin t-q)^2+h^2}, \tag{14}$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{h^2(b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)+(ab-bp\cos t-aq\sin t)^2}}{(a\cos t-p)^2+(b\sin t-q)^2+h^2}\,dt \tag{15}$$

となる。

問題は、(15) の積分であるが、これは、[2] p12 (17) の積分に分母をつけた形であるから、その積分より易しくはないことが容易に想像される。実際この積分も、一般には [2] (17) の積分と同じく楕円積分になっていて、初等的な関数でその積分を表すことはできない。次節で、[2] の 7 節と同様の計算を行いながらそれをざっと紹介する。

6 楕円積分への帰着

[2] と同様に、(15) の式の楕円積分の標準形への帰着を行うことで、(15) が一般には初等的には積分できないことを示す。ここでは、[2] 7 節と同様に、$a=b=p=R$, $q=0$、すなわち底面が半径 R の円で、頂点 P がその円周上の一点の真上にある場合のみを考える。

また、[2] では、0 から 2π までの定積分であったが、今回の (15) は 0 から t までの定積分、つまり実質的に不定積分の計算なので、積分範囲は外して、不定積分の変数変換の計算のみを行う。ただし、厳密には、t の範囲によっては 0 から t までの積分を 2 つ、4 つなどと分けないといけないのであるが、そういう話もほぼ省略する (一つだけ紹介する)。

(15) で、$a=b=p=R$, $q=0$ とし、それを不定積分の形に書いたものを J_0 とすると

$$J_0 = \int \frac{\sqrt{h^2R^2+(R^2-R^2\cos t)^2}}{R^2(1-\cos t)^2+R^2\sin^2 t+h^2}\,dt = \int \frac{R\sqrt{h^2+R^2(1-\cos t)^2}}{h^2+2R^2(1-\cos t)}\,dt \tag{16}$$

となる。$h = \hat{h}R$ $(\hat{h} > 0)$ とすると、

$$J_0 = \int \frac{\sqrt{\hat{h}^2 + (1-\cos t)^2}}{\hat{h}^2 + 2(1-\cos t)}\, dt$$

となるので、[2] と同様に、まず $\tan t/2 = y$ と置換すると、

$$\cos t = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad dt = \frac{2dy}{1+y^2}$$

となるので、J_0 は

$$\begin{aligned} J_0 &= \int \sqrt{\hat{h}^2 + \left(1 - \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2}\, \frac{1}{\hat{h}^2 + 2\left(1 - \frac{1-y^2}{1+y^2}\right)} \cdot \frac{2}{1+y^2}\, dy \\ &= \int \frac{\sqrt{\hat{h}^2(1+y^2)^2 + 4y^4}}{1+y^2} \cdot \frac{2dy}{\hat{h}^2(1+y^2) + 4y^2} \\ &= 2\int \frac{\sqrt{(\hat{h}^2+4)y^4 + 2\hat{h}^2y^2 + \hat{h}^2}}{\{(\hat{h}^2+4)y^2 + \hat{h}^2\}(1+y^2)}\, dy \end{aligned}$$

となる。

しかし、本来は $0 \le t \le 2\pi$ なので、$\tan t/2 = y$ とす場合は、$0 \le t \le \pi$ の場合と $\pi \le t \le 2\pi$ の場合に分けて考え、後者の場合は積分を 0 から π までの積分と π から t までの積分の 2 つに分けた上で置換する必要がある。これが、この節の冒頭に書いた「厳密には積分を分けて考えないといけない」という話である。ただ、分けた積分でもほぼ同じ置換を行うので、不定積分の計算では本質的には分けて考える必要はない。

さらに、$A = \sqrt{(\hat{h}^2+4)/\hat{h}^2}$ とした上で $y^2 = s$ と置換すると、$dy = ds/(2\sqrt{s})$ より、

$$\begin{aligned} J_0 &= 2\int \frac{\hat{h}\sqrt{A^2y^4 + 2y^2 + 1}}{\hat{h}^2(A^2y^2+1)(y^2+1)}\, dy = \frac{1}{\hat{h}} \int \frac{\sqrt{A^2s^2 + 2s + 1}}{(A^2s+1)(s+1)}\, \frac{ds}{\sqrt{s}} \\ &= \frac{1}{A\hat{h}} \int \sqrt{\frac{1}{s}\left(s^2 + \frac{2s}{A^2} + \frac{1}{A^2}\right)}\, \frac{ds}{(s+1)\left(s + \frac{1}{A^2}\right)} \end{aligned}$$

となるので、$z = (s - 1/A)/(s + 1/A)$ とすると

$$s = \frac{1}{A}\frac{1+z}{1-z}, \quad ds = \frac{2}{A}\frac{dz}{(1-z)^2},$$

$$
\begin{aligned}
s^2+\frac{2s}{A^2}+\frac{1}{A^2} &= \frac{1}{2A}\left\{(A+1)\left(s+\frac{1}{A}\right)^2+(A-1)\left(s-\frac{1}{A}\right)^2\right\}\\
&= \frac{1}{2A}\left(s+\frac{1}{A}\right)^2\{(A+1)+(A-1)z^2\},\\
s &= \frac{A}{4}\left\{\left(s+\frac{1}{A}\right)^2-\left(s-\frac{1}{A}\right)^2\right\}=\frac{A}{4}\left(s+\frac{1}{A}\right)^2(1-z^2),\\
\frac{1}{s+1} &= \frac{1}{1+\dfrac{1+z}{A(1-z)}}=\frac{A(1-z)}{(A+1)-(A-1)z},\\
\frac{1}{s+\dfrac{1}{A^2}} &= \frac{1}{\dfrac{1}{A^2}+\dfrac{1+z}{A(1-z)}}=\frac{A^2(1-z)}{(A+1)+(A-1)z}
\end{aligned}
$$

なので、J_0 は

$$
\begin{aligned}
J_0 &= \frac{1}{A\hat{h}}\int\frac{\sqrt{2}}{A}\sqrt{\frac{(A+1)+(A-1)z^2}{1-z^2}}\,\frac{A^3(1-z)^2}{(A+1)^2-(A-1)^2z^2}\cdot\frac{2}{A}\,\frac{dz}{(1-z)^2}\\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\hat{h}}\int\sqrt{\frac{(A+1)+(A-1)z^2}{1-z^2}}\,\frac{dz}{(A+1)^2-(A-1)^2z^2}
\end{aligned}
$$

と変形できるから、$\alpha=(A+1)/(A-1)$ とすると

$$
J_0=\frac{2\sqrt{2}}{\hat{h}(A-1)^{3/2}}\int\frac{1}{\alpha^2-z^2}\sqrt{\frac{\alpha+z^2}{1-z^2}}\,dz
$$

となる。ここまでは、[2] の置換の計算とほぼ同じである。

この被積分関数は、$f(z)=(1-z^2)(\alpha+z^2)$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha^2-z^2}\sqrt{\frac{\alpha+z^2}{1-z^2}} &= \frac{\alpha+z^2}{\alpha^2-z^2}\,\frac{1}{\sqrt{f(z)}}=\left(-1+\frac{\alpha+\alpha^2}{\alpha^2-z^2}\right)\frac{1}{\sqrt{f(z)}}\\
&= -\frac{1}{\sqrt{f(z)}}+\frac{\alpha+\alpha^2}{(\alpha^2-z^2)\sqrt{f(z)}}
\end{aligned}
$$

と変形でき、これらの積分はそれぞれ、[2] 7 節 p16 の I_1 と I_2 に対応することがわかる (よって [2] より少し易しい)。そして、I_1 は第 1 種楕円積分に、I_2 は [2] p17 により第 1 種と第 3 種の楕円積分に帰着されることがわかる。

以上により、J_0 が楕円積分に帰着されることがわかり、(15) は一般には初等関数で表すことはできないことがわかる。

7 近似計算

最後に、(15) の数値計算について考えてみる。

6 節の議論により、(15) は初等的な関数で表現できないことがわかったが、コンピュータで展開図を書くのだとすれば、もしそれが初等的な関数で表現できたとしても、その初等的関数は、$\sin x$ にせよ $\sqrt{x}$ にせよコンピュータ内部では実際には近似的な計算を行っているわけであるから、(15) がそれなりの精度で数値計算できるのであれば、初等的な式で表せる場合と変わらないことになる。

なお、この節では簡単のため 6 節同様に $a = b = p = R$, $q = 0$, $h = \hat{h}R$ の場合を考え、よって、r, θ は (14), (15) より

$$r(t) = R\sqrt{\hat{h}^2 + 2(1 - \cos t)}, \tag{17}$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{\sqrt{\hat{h}^2 + (1 - \cos\phi)^2}}{\hat{h}^2 + 2(1 - \cos\phi)}\, d\phi \tag{18}$$

$$(0 \leq t \leq 2\pi)$$

であるとする。

さて、(18) の積分の近似計算であるが、6 節で求めた楕円積分の標準形を用いるのは、もしその標準形の楕円積分の値を求める関数がコンピュータにあるなら有効であろうが、少なくとも C の標準ライブラリには用意されてはおらず、また、楕円積分は広義積分なので単純に考えれば数値積分は難しいので、むしろ 6 節のような変換は行わず、(18) のまま広義積分ではない積分を近似計算するのが得策だろうと思われる。

積分計算というと、通常は台形公式やシンプンソンの公式などが用いられるが、(18) の場合は、必ずしもそれを用いるのが適切とは言えない。それは、(18) が積分ではあるが実際には t の関数であり、各 t に対する値がまんべんなく必要となるので、その値が必要なときに毎回その t に対して 0 から t までの積分をシンプソンの公式などで近似計算するとなると計算量がかなり多くなってしまうからである。

(18) の導関数は

$$\theta'(t) = g_0(t) = \frac{\sqrt{\hat{h}^2 + (1 - \cos t)^2}}{\hat{h}^2 + 2(1 - \cos t)} \tag{19}$$

と単純な関数になるから、よって (18) の任意の t に関する近似値が必要な場合は、積分計算よりもむしろテイラー展開を利用する方が便利であると考えられる。ただ、今回の場合はシンプソンの公式のような積分近似が有用ではないかというとそうではない。それを少し説明する。

(17), (18) を r, θ のパラメータ t による表示だと考えて、コンピュータにその曲線をプロットさせるには、通常は以下のように行うだろう。

1. 十分 大きな N を取って $0 \leq t \leq 2\pi$ を N 等分し、その分点を $t_0 = 0$,t_1,t_2,...,$t_N = 2\pi$ とする。
2. 各 t_k に対する $r = r_k = r(t_k)$, $\theta = \theta_k = \theta(t_k)$ の値を求め、r_k, θ_k の点と r_{k-1}, θ_{k-1} の点を線分で結ぶ $(k = 1, 2, \ldots, N)$。

これにより、曲線を折れ線で近似的に書くことになるわけであるが、N が大きければ、これでそれなりに滑らかに見える曲線が書ける。

この後者は、実際には gnuplot のようなデータプロットソフトを用いるとしても、それらのソフトは内部では基本的には折れ線でデータ点を結ぶだけであり、各 k に対する r_k, θ_k のデータを取る必要があることは同じである。

つまり、今回の展開図を書くという目的の場合に必要なのは、

(A)「任意の t に対して (18) を計算すること」

なのではなく、

(B)「数表のように細かい刻みに対する t の値に対して (18) の値を順に計算すること」

であり、(B) の目的であればシンプソンの公式も十分有用である。

シンプソンの公式は、定積分を以下の式で近似する方法である。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\doteqdot \sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta x}{2}\left\{\frac{1}{3}f(x_{n-1}) + \frac{4}{3}f(x_{n-1/2}) + \frac{1}{3}f(x_n)\right\} \\ &= \frac{\Delta x}{6}\{f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + 2f(x_1) + 4f(x_{3/2}) + 2f(x_2) + \cdots \\ &\quad +2f(x_{N-1}) + 4f(x_{N-1/2}) + f(x_N)\} \qquad (20) \\ &\quad \left(\Delta x = \frac{b-a}{N}, \quad x_j = a + j\Delta x\right)\end{aligned}$$

つまり、$f(x)$ の、x_{n-1} から $x_n (= x_{n-1} + \Delta x)$ までの積分を、

$$\frac{\Delta}{2}\left\{\frac{1}{3}f(x_{n-1}) + \frac{4}{3}f(x_{n-1/2}) + \frac{1}{3}f(x_n)\right\}$$

で近似するものであるが、これは、$y = f(x)$ のグラフ上の 3 点

$$(x_{n-1}, f(x_{n-1})), \quad (x_{n-1/2}, f(x_{n-1/2})), \quad (x_n, f(x_n))$$

を通る 2 次関数の積分の値に等しく、台形公式よりも一般には精度は高い。

今、$0 \leq t \leq 2\pi$ を N 等分して各 t_k での $\theta_k = \theta(t_k)$ の値を求める場合、上の Δx を $\Delta t = 2\pi/N$ と考え、θ_k の計算には k 等分のシンプソンの近似を用いて、

$$\theta_k = \int_0^{t_k} g_0(\phi) d\phi \doteqdot \sum_{n=1}^{k} \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{1}{3} g_0(t_{n-1}) + \frac{4}{3} g_0(t_{n-1/2}) + \frac{1}{3} g_0(t_n) \right\}$$

と近似するならば、θ_k の値は、θ_{k-1} の値を用いて、

$$\theta_k \doteqdot \theta_{k-1} + \frac{\Delta t}{6} \{ g_0(t_{k-1}) + 4 g_0(t_{k-1/2}) + g_0(t_k) \} \tag{21}$$

のように計算されることになるから、よって (B) の目的のためには、(21) の後ろの項を加えていくだけで容易に順に計算できるシンプソン近似もそれなりに有用なわけである。

次にテイラー展開を考えてみる。

$\theta(t)$ の微分は (19) であるから、$g_0(t)$ の展開を求め、それを t で積分すればよい。もちろん、この $g_0(t)$ の t での微分を直接順に計算できなくはないが、かなり大変なので、これを合成関数とみて考えることにする。今、

$$X = \frac{1 - \cos t}{2} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \tag{22}$$

とおくと $0 \leq X \leq 1$ であり、$g_0(t)$ は、

$$g_1(X) = \frac{\sqrt{\hat{h}^2 + 4X^2}}{\hat{h}^2 + 4X} \tag{23}$$

と (22) の合成関数と見れる。よって、まずこの $g_1(X)$ の展開を考える。

実は、$g_0(t)$ のマクローリン展開、すなわち $t = 0$ 中心の展開を考えるのはあまり得策ではない。それは、$t = 0$ は $X = 0$ に対応し、(23) の $X = 0$ での展開があまりよくないからである。(23) の X を複素変数と考えると、$g_1(X)$ の特異点は、

$$X = -\frac{\hat{h}^2}{4}, \ \pm\frac{\hat{h}}{2} i$$

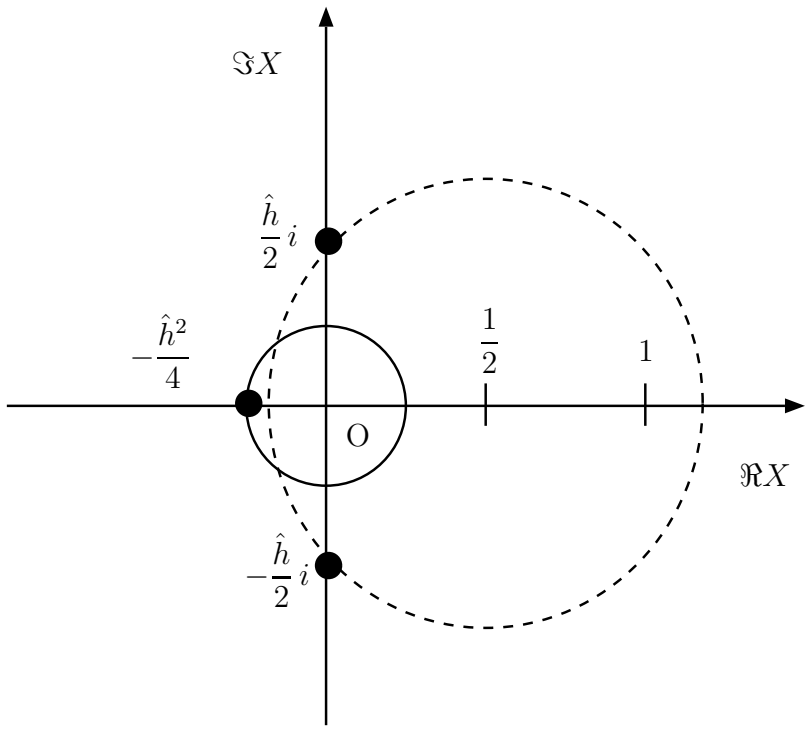

図 8: $g_1(X)$ の収束円

なので、$\hat{h}$ が小さい場合は $g_1(X)$ のマクローリン展開の収束半径が小さくなってしまって、$0 \leq X \leq 1$ での計算には使えない (図 8)。しかし、$\hat{h} > 0$ であるから、$X = 1/2$ を中心とするテイラー展開を考えれば、その収束半径は少なくとも $1/2$ よりも大きく、よって $0 \leq X \leq 1$ の範囲は全域がカバーされることになる。しかも、$X = 1/2$ は

$$X = \frac{1 - \cos t}{2} = \frac{1}{2}$$

より、$t = \pi/2, 3\pi/2$ という簡単な角度にも対応しているので、計算にも都合がいいだろうと考えられる。

g_1 の $X = 1/2$ でのテイラー展開を計算するには、$Y = X - 1/2$ として g_1 を Y の式に書き直して、それを Y に関してマクローリン展開すればよい。

$$\begin{aligned} g_1(X) &= g_1(Y + 1/2) = \frac{\sqrt{\hat{h}^2 + 4(Y + 1/2)^2}}{\hat{h}^2 + 4(Y + 1/2)} = \frac{\sqrt{\hat{h}^2 + 1 + 4Y(Y + 1)}}{\hat{h}^2 + 2 + 4Y} \\ &= \frac{\sqrt{\hat{h}^2 + 1}}{\hat{h}^2 + 2} \sqrt{1 + \frac{4}{\hat{h}^2 + 1} Y(Y + 1)} \left(1 + \frac{4}{\hat{h}^2 + 2} Y\right)^{-1} \end{aligned}$$

となるので、$|z|<1$ に対する一般二項定理

$$\begin{cases} \sqrt{1+z} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} z^n, \\ (1+z)^{-1} & = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} -1 \\ n \end{pmatrix} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \end{cases} \tag{24}$$

を用いれば展開の計算ができることになる。

なお、この (24) は本来は $|z|<1$ でしか成り立たないが、$g_1(Y)$ の展開ではそれを無視して形式的に (24) を計算してよい。それは、十分小さい Y に対してはその条件を満たしているから代入したものはそのような Y に対しては正しい展開式になっていて、上の特異点の考察によりその収束範囲がちゃんと保証されていて、かつその係数は一意に決定するので、その形式的な計算による級数が小さい Y だけでなくその収束範囲まで収束してくれるからである。

ここでは簡単のため、$\hat{h}=2$、すなわち斜円錐の高さが底面積の直径に等しい場合のみを考え、g_1 の Y に関する 6 次の展開式を求めることにする。なお、$\hat{h}=2$ の場合は、$X=0$ での展開の収束半径も 1 になり、$0 \le X < 1$ までカバーされるのであるが、$X=1$ での収束は不明で、もし収束したとしてもその近くでの収束は遅いので、$X=1/2$ での展開を計算する方がよい。

$n \ge 1$ に対し、

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ n \end{pmatrix} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\cdots\left(-\dfrac{2n-3}{2}\right)}{\dfrac{1}{n!}} = (-1)^{n-1}\,\frac{(2n-3)!!}{2^n n!}$$

であるから、6 次の近似式は

$$\begin{aligned} \sqrt{1+z} &\doteqdot 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^3} + \frac{z^3}{2^4} - \frac{5}{2^7}\,z^4 + \frac{7}{2^8}\,z^5 - \frac{21}{2^{10}}\,z^6 \\ &= 1 + \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^3 - \frac{5}{8}\left(\frac{z}{2}\right)^4 + \frac{7}{8}\left(\frac{z}{2}\right)^5 - \frac{21}{16}\left(\frac{z}{2}\right)^6 \end{aligned}$$

となるので、$\hat{h}=2$ のとき、6 次の近似式を求めると、

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+\frac{4}{\hat{h}^2+1}\,Y(Y+1)} = \sqrt{1+\frac{4}{5}\,Y(Y+1)} \\ &\doteqdot 1 + \frac{2}{5}\,Y(Y+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2 Y^2(Y+1)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^3 Y^3(Y+1)^3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{5}{8}\left(\frac{2}{5}\right)^4 Y^4(Y+1)^4+\frac{7}{8}\left(\frac{2}{5}\right)^5 Y^5(Y+1)^5-\frac{21}{16}\left(\frac{2}{5}\right)^6 Y^6(Y+1)^6\\
\doteqdot\ & 1+\frac{2}{5}(Y+Y^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2(Y^2+2Y^3+Y^4)\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^3(Y^3+3Y^4+3Y^5+Y^6)-\frac{5}{8}\left(\frac{2}{5}\right)^4(Y^4+4Y^5+6Y^6)\\
&+\frac{7}{8}\left(\frac{2}{5}\right)^5(Y^5+5Y^6)-\frac{21}{16}\left(\frac{2}{5}\right)^6 Y^6\\
=\ & 1+\bar{Y}+\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\bar{Y}^2+\left(-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)\bar{Y}^3+\left(-\frac{25}{8}+\frac{15}{4}-\frac{5}{8}\right)\bar{Y}^4\\
&+\left(\frac{75}{8}-\frac{25}{4}+\frac{7}{8}\right)\bar{Y}^5+\left(\frac{125}{16}-\frac{375}{16}+\frac{175}{16}-\frac{21}{16}\right)\bar{Y}^6\\
=\ & 1+\bar{Y}+2\bar{Y}^2-2\bar{Y}^3+4\bar{Y}^5-6\bar{Y}^6
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$\bar{Y}=2Y/5$ とした。一方、

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{4}{\hat{h}^2+2}Y\right)^{-1}=\left(1+\frac{2}{3}Y\right)^{-1}\\
\doteqdot\ & 1-\frac{2}{3}Y+\left(\frac{2}{3}Y\right)^2-\left(\frac{2}{3}Y\right)^3+\left(\frac{2}{3}Y\right)^4-\left(\frac{2}{3}Y\right)^5+\left(\frac{2}{3}Y\right)^6
\end{aligned}
$$

であるから、$\hat{Y}=\bar{Y}/3=2Y/15$ とすると、$\bar{Y}=3\hat{Y}$、$2Y/3=5\hat{Y}$ より、

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+\frac{4}{5}Y(Y+1)}\ &\doteqdot\ 1+3\hat{Y}+18\hat{Y}^2-54\hat{Y}^3+972\hat{Y}^5-4374\hat{Y}^6,\\
\left(1+\frac{2}{3}Y\right)^{-1}\ &\doteqdot\ 1-5\hat{Y}+25\hat{Y}^2-125\hat{Y}^3+625\hat{Y}^4-3125\hat{Y}^5+15625\hat{Y}^6
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1+\frac{4}{5}Y(Y+1)}\left(1+\frac{2}{3}Y\right)^{-1}\\
\doteqdot\ & 1+(3-5)\hat{Y}+(18-15+25)\hat{Y}^2+(-54-90+75-125)\hat{Y}^3\\
&+(270+450-375+625)\hat{Y}^4+(972-1350-2250+1875-3125)\hat{Y}^5\\
&+(-4374-4860+6750+11250-9375+15625)\hat{Y}^6\\
=\ & 1-2\hat{Y}+28\hat{Y}^2-194\hat{Y}^3+970\hat{Y}^4-3878\hat{Y}^5+15016\hat{Y}^6
\end{aligned}
$$

となる。ここに、

$$
\hat{Y}=\frac{2}{15}Y=\frac{2}{15}\left(X-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{15}\left(\frac{1-\cos t}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{15}\cos t
$$

を代入すると、

$$g_0(t) \;\doteqdot\; \frac{\sqrt{5}}{6}\left(1+\sum_{j=1}^{6} A_j \cos^j t\right) \tag{25}$$
$$\left(A_1=\frac{2}{15},\ A_2=\frac{28}{15^2},\ A_3=\frac{194}{15^3},\ A_4=\frac{970}{15^4},\ A_5=\frac{3878}{15^5},\ A_6=\frac{15016}{15^6}\right)$$

となる。

さらに、$\cos t$ を $t=\pi/2$ で展開し、

$$\cos t = -\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = -\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3!}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{1}{5!}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^5+\cdots$$

のように t の多項式を代入すれば、g_0 を完全に t の多項式の形で展開でき、それが $t=\pi/2$ でのテイラー展開となる。しかし、それは途中で打ち切るわけであるからそこで多少の誤差が発生する。それよりも、(25) を直接使うことを考えてみよう。

今、

$$I_n = I_n(t) = \int_0^t \cos^n\phi\, d\phi$$

とすると、(18), (25) より、

$$\theta(t) = \int_0^t g_0(\phi)d\phi \doteqdot \frac{\sqrt{5}}{6}\left(t+\sum_{j=1}^{6} A_j I_j\right) \tag{26}$$

となる。よって後は各 I_n を求めればよいが、これは部分積分により、

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^t \cos^{n-1}\phi(\sin\phi)'\,d\phi = [\cos^{n-1}t\sin t]_0^t - \int_0^t (\cos^{n-1}\phi)'\sin\phi\,d\phi \\ &= \cos^{n-1}t\sin t + (n-1)\int_0^t \cos^{n-2}\phi\sin^2\phi\,d\phi \\ &= \sin t\cos^{n-1}t + (n-1)(I_{n-2}-I_n) \quad (n\geq 2) \end{aligned}$$

となるので、

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} + \frac{1}{n}\sin t\cos^{n-1}t$$

となる。よって、$I_0 = t,\ I_1 = \sin t$ より、

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t, \\
I_3 &= \frac{2}{3}\sin t + \frac{1}{3}\sin t\cos^2 t, \\
I_4 &= \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{4}\sin t\cos^3 t = \frac{3}{8}t + \frac{3}{8}\sin t\cos t + \frac{1}{4}\sin t\cos^3 t, \\
I_5 &= \frac{4}{5}I_3 + \frac{1}{5}\sin t\cos^4 t = \frac{8}{15}\sin t + \frac{4}{15}\sin t\cos^2 t + \frac{1}{5}\sin t\cos^4 t, \\
I_6 &= \frac{5}{6}I_4 + \frac{1}{6}\sin t\cos^5 t = \frac{5}{16}t + \frac{5}{16}\sin t\cos t + \frac{5}{24}\sin t\cos^3 t + \frac{1}{6}\sin t\cos^5 t
\end{aligned}
$$

となるので、(26) より、

$$
\begin{aligned}
\theta(t) \;\doteqdot\; & \left(1 + \frac{A_2}{2} + \frac{3}{8}A_4 + \frac{5}{16}A_6\right)t + \left(A_1 + \frac{2}{3}A_3 + \frac{8}{15}A_5\right)\sin t \\
& + \left(\frac{A_2}{2} + \frac{3}{8}A_4 + \frac{5}{16}A_6\right)\sin t\cos t + \left(\frac{A_3}{3} + \frac{4}{15}A_5\right)\sin t\cos^2 t \\
& + \left(\frac{A_4}{4} + \frac{5}{24}A_6\right)\sin t\cos^3 t + \frac{A_5}{5}\sin t\cos^4 t + \frac{A_6}{6}\sin t\cos^5 t \qquad (27)
\end{aligned}
$$

となる。

この、シンプソンの公式 (21) による計算とテイラー展開 (27) による計算を比較したのが図 9 と図 10 である。図 9 は、$N = 100$ に対するシンプソンの計算と、テイラー展開の (t_k, θ_k) の値を折れ線でつないだものであるが、1 本のグラフに見えるようにほとんど違いがない。図 10 はその違いを拡大して表示するためにその両者の差をグラフにしたものであり、その違いは最大で 0.00015 位であることがわかる。この角度の差 0.00015 は、動径が 10000 のときに弧長が 1.5 ずれる程度の誤差であるから、よほど大判のプロッタ出力でなければ出ない程度の差であろう。

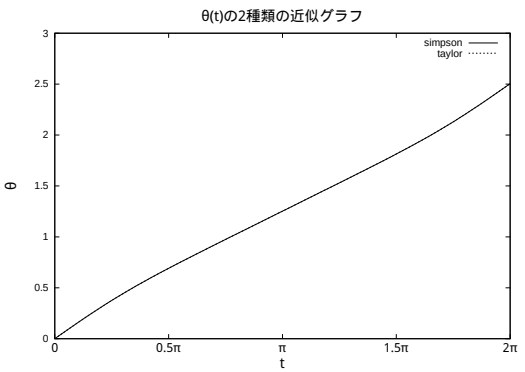

図 9: シンプソンとテイラー展開

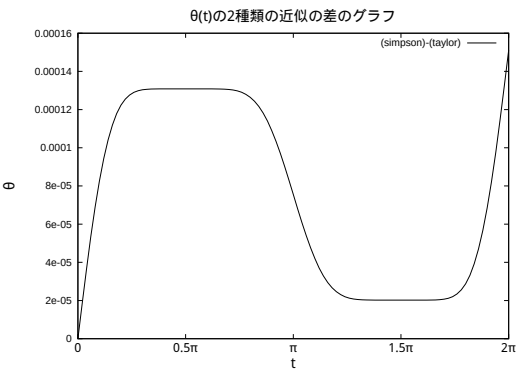

図 10: シンプソンとテイラー展開の差

また、$N = 100$ はそれほど大きい分割数ではないが、$N = 1000$ にしても両者のグラフは $N = 100$ の場合とほとんど違わない。つまり、この差は量子誤差ではなく、それぞれの計算法による本質的な違いであると考えられる。

なお、この差のグラフが $t = \pi/2$ と $t = 3\pi/2$ の付近で平らになっているのは、それがテイラー展開の中心であるからであり、その値が 0 でないのは定積分のためにそこまでの誤差が累積しているからである。そこからもわかるが、シンプソンの公式もそれなりに一定して安定した精度を出しているようである。

結局いずれを採用してもそれなりに十分な精度で計算できると思われる。テイラー展開の方を用いて、$N = 100$, $R = 3$, $h = 6$ の場合の展開図が図 11 である。

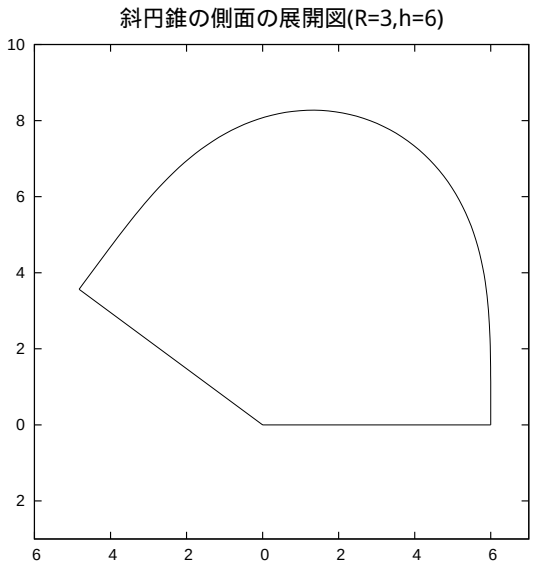

図 11: $R = 3$, $h = 6$ の展開図

両端 (最短の母線) は、$r = 6$ であるが、最長の部分は三平方の定理により $r = 6\sqrt{2} \fallingdotseq 8.49$ となっている。底辺の円は半径 $R = 3$、つまりこの両端の線分の半分なので、この図を拡大コピーして切りとって立体を作成することも可能である。実際にそれを作ってみたのが図 12 である。若干作成時などの誤差はあるが、ほぼ期待通りのものができていることがわかるだろう。

8 最後に

7 節では、だいぶ難しい近似計算を行ったが、今回考察した特別な斜円錐の場合には、多分もっと易しくて十分実用的な近似式があるだろうと思う。

しかし、理屈の上では斜円錐の展開図はかなり難しいものである、ということがわ

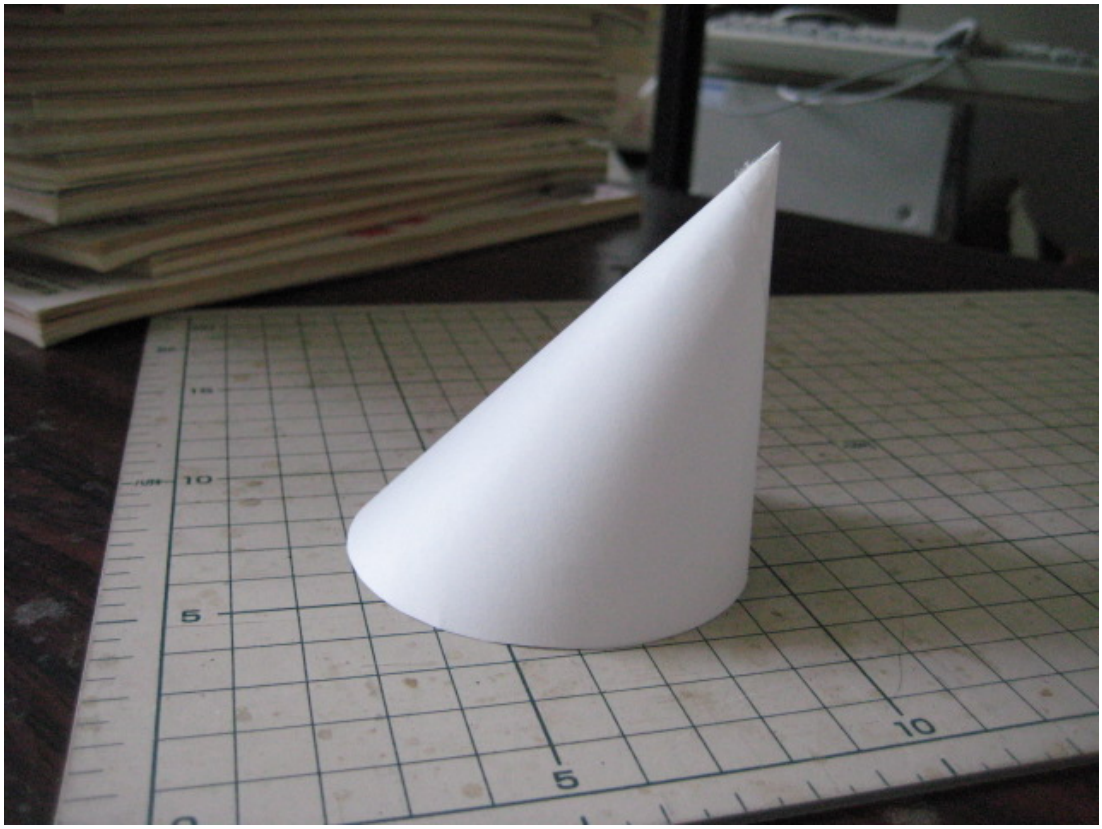

図 12: 完成図

かってもらえれば幸いである。

参考文献

[1] 寺沢寛一「自然科学者のための数学概論 [増訂版]」岩波書店、1983

[2] 竹野茂治「斜円錐の側面積について」2005 年 2 月
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#syaensui