平成 17 年 2 月 21 日

斜円錐の側面積について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

先日知人から、斜円錐の側面積について質問された。それは一見していかにも計算が難しそうな問題であり、後で述べるように厳密な計算は結局まともにはできないことがわかったのであるが、質問した方はそれが意外でかなり興味深いようであった。

その辺りに我々数学屋と非専門家の感覚のずれのようなものを感じて面白かったこともあり、計算の途中で色々興味深い事実も目についたので、その計算等をここにまとめておくことにする。

2 問題

元の問題は以下のようなものであった。

> 問題 **1**
>
> 半径 r の円の円周上のある点の真上の高さ h のところに頂点があるような斜円錐 (図 1) の側面積 S は、通常の底面の円の中心の真上に頂点がある場合 (直円錐) の側面積に対する公式
>
> $$S = \pi r\sqrt{h^2 + r^2} \tag{1}$$
>
> で求めて構わないか

もちろん直円錐の場合はこの式 (1) で良いことはすぐに分かる。

> 側面は展開すれば半径 $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ の円の一部 (扇形) で、弧の長さは底面の円周 $2\pi r$ に等しい。よって、
>
> $$S = \pi l^2 \times \frac{2\pi r}{2\pi l} = \pi r l = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$
>
> となる。

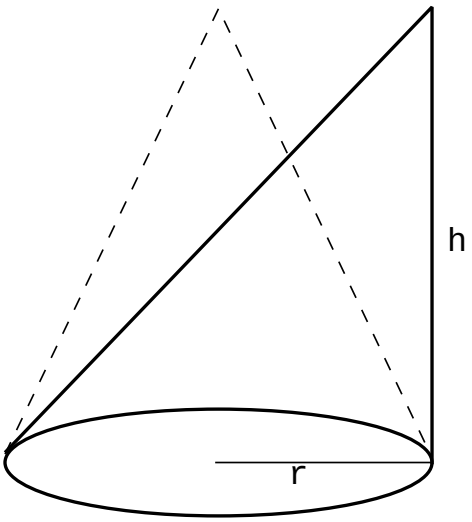

図 1: 斜円錐と直円錐

一方で、頂点が中心の上にない斜円錐の場合の展開図は単純ではない。この場合、それを表す式の導き方として、次の 3 通りが考えられる。

1. 側面を展開して、その扇形に似た図の中心 (元の斜円錐の頂点) から周囲 (元の斜円錐の底面の縁) までの距離 f を、中心角 θ の式 $f = f(\theta)$ で表し (直円錐の場合は $f = \sqrt{r^2 + h^2}$)、θ の変化の範囲 $0 \leq \theta \leq \alpha$ を求めて、極座標での面積表示公式

   $$S = \int_0^\alpha \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta$$

   によって求める (図 2)。

2. 底面の円周上の点を $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(\theta) : (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ とパラメータ表示し、頂点 P と Q を結ぶ線分 PQ を $t : (1-t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ に内分する点を R とすることにより側面上の任意の点 R を t, θ の 2 つのパラメータで表し、パラメータで表された曲面の面積を求める面積分公式

   $$S = \int_S dS = \iint_D \left| \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{OR}}}{\partial t} \times \frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{OR}}}{\partial \theta} \right| dt d\theta$$

   によって求める (図 3)。

3. 区分求積の考え方に従い、底面の円周上に分点 Q_j $(j = 0, 1, \ldots n)$ を取り

   $$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (\triangle \mathrm{PQ}_{j-1}\mathrm{Q}_j \text{ の面積})$$

により求める (図 4)。この場合は、$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(\theta)$, $\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}(\theta + \Delta\theta)$ に対して $\triangle \mathrm{PQQ}'$ の面積 ΔS を $\theta, \Delta\theta$ で表し、

$$\lim_{\Delta\theta \to +0} \frac{\Delta S}{\Delta\theta} = s(\theta)$$

とすると $S = \int_0^{2\pi} s(\theta) d\theta$ となるので、ΔS の $\Delta\theta$ に対する 1 次近似式を求めれば良い。

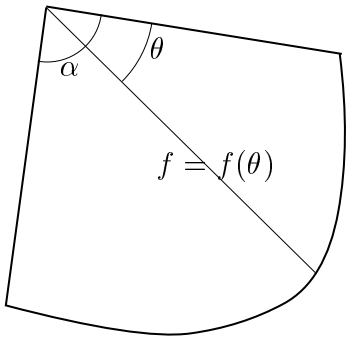

図 2: 側面の展開図

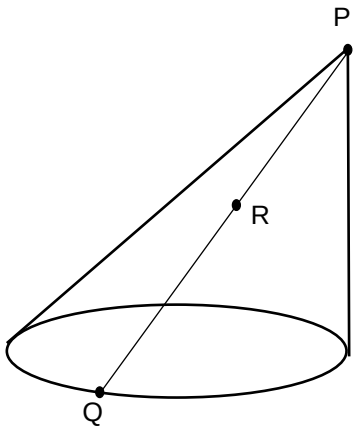

図 3: パラメータ表示

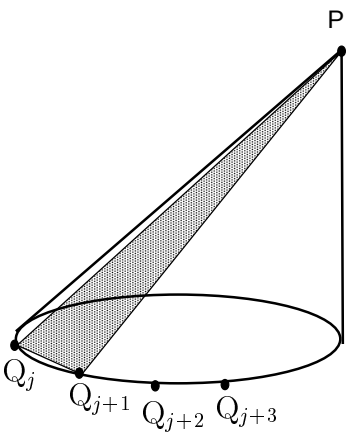

図 4: 区分求積

直円錐の例からすると、1. の考え方が一番素直そうに感じるかも知れないが、我々 (少なくとも私) の感覚では 1. が一番難しい。それは、展開図の中心角を計ることが厄介そうだからである。それに比べて、方針の 2., 3. は先は長くてもとりあえずやればできそうなのでむしろ易しそうに見える。よって実際の式の導出にはこの 2., 3. の手法を用いることにする。

なお、誤解しやすいが、この問題の斜円錐は直円錐を斜めに切り取ってそれを横に置いたもの (図 5) とはならない。それは、直円錐を斜めに切り取った面は円ではなく楕円になるからである。実は直円錐自体は割りと易しい式で表され、非常に古くから研究されていて色々綺麗な性質を持つので、そういった事実が使えるかというと残念ながらそうはならない。

しかし、実際の計算では元の問題を少し一般化し、直円錐を斜めに切り取ったものも含むようにして、そのような場合はどうなるのかも合わせて考えることにする。

3 問題の定式化

この節で問題の設定を明確にしておく。2 節の最後に述べたように、元の問題を少し一般化して考えることにする。

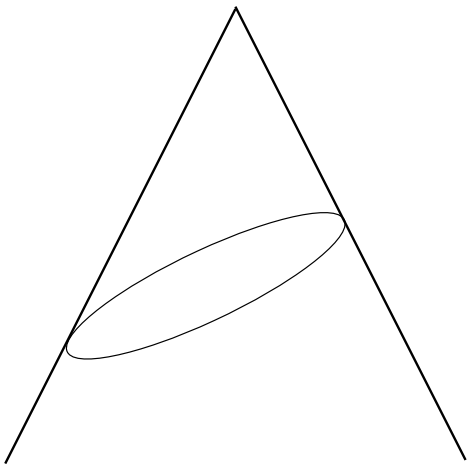

図 5: 直円錐を斜めに切り取ったもの

まず、3 次元空間を考え、中心が原点である xy 平面上の以下の楕円を底面とする。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0 \quad (a>0,\ b>0)$$

そして頂点 P の座標を $\mathrm{P}(p,q,h)$ $(h>0)$ とする (図 6)。元々の問題は、$a=b=p=r$, $q=0$ の場合に相当することになる。

底面の楕円周上の点は $\mathrm{Q}=\mathrm{Q}(\theta):(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ $(0\le\theta<2\pi)$ とパラメータ表示される (注: $a\neq b$ の場合には θ は一般には中心角とは異なる)。よって、PQ を $t:(1-t)$ $(0\le t\le 1)$ に内分する点を R とすれば R の座標は

$$(at\cos\theta+(1-t)p, bt\sin\theta+(1-t)q, (1-t)h)$$

となり、すなわちこの側面が t,θ で以下のようにパラメータ表示されたことになる。

$$\left\{\begin{array}{rcll} x &=& at\cos\theta+p(1-t) & \\ y &=& bt\sin\theta+q(1-t) & (0\le\theta<2\pi,\ 0\le t\le 1) \\ z &=& h(1-t) & \end{array}\right. \tag{2}$$

この t と θ を消去すれば、x,y,z のみによる曲面の表示式も得られる。

$$\left\{\frac{x-p(1-t)}{a}\right\}^2+\left\{\frac{y-q(1-t)}{b}\right\}^2=t^2$$

より、

$$\left(\frac{x-pz/h}{a}\right)^2+\left(\frac{y-qz/h}{b}\right)^2=(1-z/h)^2 \tag{3}$$

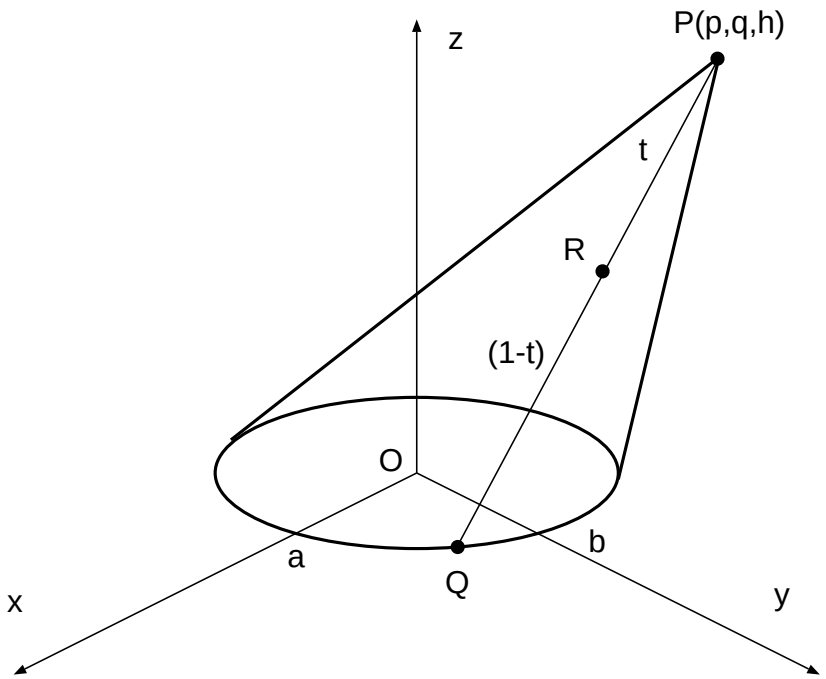

図 6: 問題の設定

となる。この式を z について解いて x, y の式で表せば、領域 D 上の曲面 $z = z(x, y)$ に対する曲面積の公式

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

によって側面積を表すことができる。しかし式 (3) を z について解くのは、2 次方程式なので一応可能ではあるが少し面倒だし、そもそもその後の積分の計算が大変になりそうなので、むしろパラメータ表示 (2) に対する面積分公式を用いた方が良い。

なお、この (3) から、$z =$(定数) とした式、すなわちこの曲面の水平断面の形は、どの高さでも底面の楕円と相似な楕円 (ただし中心はずれている) になっていることがわかる。元の問題の場合には常に円になっていることになるので、それを利用したような計算法はないかとも考えたのだがそれは見出せなかった。

4 問題の図形が直円錐の一部になる条件

3 節で問題を定式化したが、底面を一般の楕円に拡張し頂点の位置も一般の位置にしたので、p, h, a, b がなんらかの条件を満たせばこの図形 (斜楕円錐とでもいうべきものか) は直円錐を斜めに切ったものになる。この節では、元の問題とは直接は関係ないが、その条件を導くことにする。

その条件を求めるには、なんとなく以下のような考え方でできそうに見えるかも知れない:

> 原点 O を通り中心線 OP に垂直な平面 $px+qy+hz=0$ によるこの曲面の断面を考えて、それが円になる条件を考える (例えば原点からの距離が一定など)

実は私も最初はこの方針で考えたのであるが、しかしこれは正しくない。それは、もしこの図形が直円錐の一部である場合でもその 中心線 は、その断面である楕円の中心 (今の場合原点 O) を通るとは限らないからである。

よって、中心線が決まらない状態ではこちらからのアプローチは難しいので、逆に実際の直円錐の断面になる楕円を求め、それを当てはめてみることにする。

容易に分かるように、この図形が直円錐の一部である場合、

- $a>b$ ならば頂点 P は x 軸の真上、よって $p\neq 0,\ q=0$
- $a<b$ ならば頂点 P は y 軸の真上、よって $p=0,\ q\neq 0$
- $a=b$ ならば頂点 P は原点の真上、よって $p=q=0$

であるので、ここでは $a>b$ でかつ $p>0$ の場合を考える。これが分かれば、$p<0$ の場合は xz 平面に関して対称になるだけ (p の変わりに $-p$ を取ればいい) だし、$a<b$ の場合は、x 軸と y 軸を入れ換える、すなわち a と b を入れ換えて、p と q を入れ換えればよい。

まず、図全体を x 軸方向に平行移動して直円錐の中心線が原点を通るようにし、このときの P の移動先を $\bar{\mathrm{P}}(\bar{p},0,h)$ とする。この場合、直円錐の中心線 $\mathrm{O}\bar{\mathrm{P}}$ に垂直な平面

$$\bar{p}x+hz=0 \tag{4}$$

による断面は原点中心の円であり、これを円 C と呼びその半径を r とする。求めるものは、この直円錐の xy 平面によって切り取られる楕円の方程式であり、これは、$\bar{\mathrm{P}}$ から円 C に光を当てたときに xy 平面にできる影、と見ることもできる (図 7)。

円 C 上の点は原点からの距離が r であるので

$$x^2+y^2+z^2=r^2 \tag{5}$$

を満たす。よって、$(4),\ (5)$ より、

$$x=-\frac{h}{\bar{p}}z \tag{6}$$

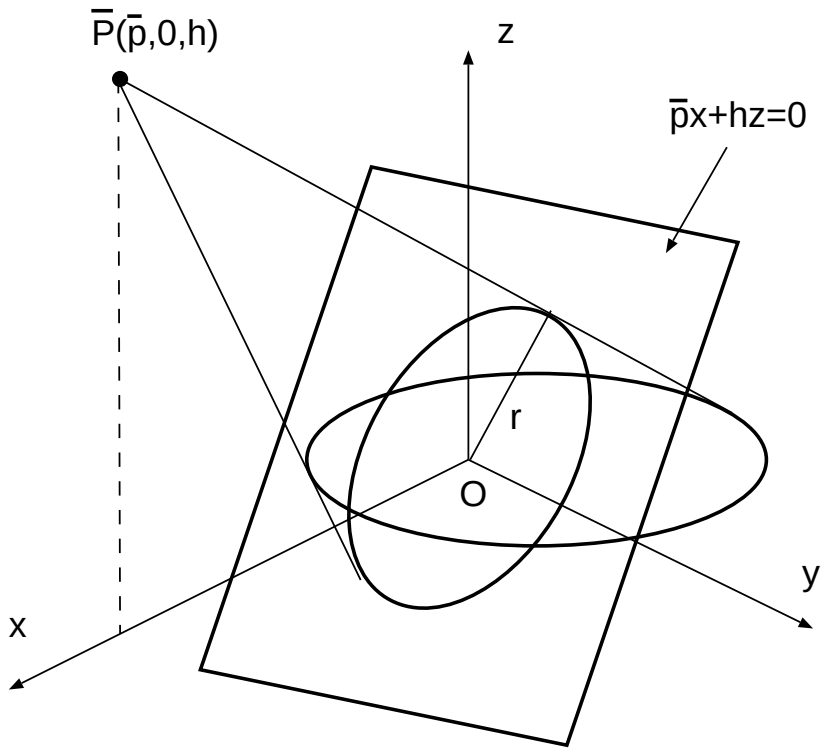

図 7: $\bar{\mathrm{P}}$ の円の影としての楕円

$$\left(\frac{h^2}{\bar{p}^2}+1\right)z^2+y^2=r^2 \tag{7}$$

が得られる。この円 C 上の点 $(-hz/\bar{p},y,z)$ と頂点 $(\bar{p},0,h)$ とを結ぶ直線と xy 平面との交点 $(X,Y,0)$ は外分の公式より

$$(X,Y,0)=\frac{-h}{z-h}\left(\frac{-hz}{\bar{p}},y,z\right)+\frac{z}{z-h}(\bar{p},0,h)$$

であるから、よって

$$X=\frac{\bar{p}+h^2/\bar{p}}{z-h}z,\quad Y=\frac{-hy}{z-h}$$

となる。ここで、$\alpha=\bar{p}+h^2/\bar{p}$ とおくと

$$X-\alpha=\frac{h\alpha}{z-h}$$

なので、

$$z=h+\frac{h\alpha}{X-\alpha},\quad y=\frac{-\alpha Y}{X-\alpha}$$

となるので、これを (7) に代入し整理すると、

$$\left(\frac{h^2}{\bar{p}^2}+1\right)\left(h+\frac{h\alpha}{X-\alpha}\right)^2+\left(\frac{-\alpha Y}{X-\alpha}\right)^2=r^2,$$

$$h^2\left(\frac{h^2}{\bar{p}^2}+1\right)((X-\alpha)+\alpha)^2+\alpha^2Y^2=r^2(X-\alpha)^2,$$

$$\left\{h^2\left(\frac{h^2}{\bar{p}^2}+1\right)-r^2\right\}X^2+2\alpha r^2X+\alpha^2Y^2=r^2\alpha^2 \tag{8}$$

となる。

円 C は傾き $\bar{p}/h$ で傾いているのでその高さは $r\bar{p}/\sqrt{h^2+\bar{p}^2}$ であり、この高さよりも頂点 $\bar{P}$ が高くないと直円錐と xy 平面の交曲線は楕円にはならない。よって、

$$\frac{r\bar{p}}{\sqrt{h^2+\bar{p}^2}}<h$$

という条件が必要になる。この条件より

$$h^2\left(\frac{h^2}{\bar{p}^2}+1\right)>r^2$$

となるので、この場合は確かに (8) は楕円を表す。なお、$h=r\bar{p}/\sqrt{h^2+\bar{p}^2}$ の場合、すなわち円錐の母線と xy 平面が平行になる場合は X に関して 1 次、Y に関して 2 次式になるので放物線に、$h<r\bar{p}/\sqrt{h^2+\bar{p}^2}$ の場合は X^2 の係数と Y^2 の係数が異なり双曲線となる。

(8) を

$$\frac{(X-O_x)^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1$$

の形に変形する。計算を見やすくするために、

$$\bar{p}=\frac{h}{t},\quad r=sh\quad(t>0,s>0)$$

として、後で消去すべき係数 $\bar{p}$, r を s, t で置き換える。

$$h^2\left(\frac{h^2}{\bar{p}^2}+1\right)-r^2=h^2(1+t^2-s^2)\quad(\text{よって } 1+t^2-s^2>0)$$

$$\alpha=\bar{p}+\frac{h^2}{\bar{p}}=\frac{h}{t}+th=h\frac{1+t^2}{t}$$

となるので、これらを (8) に代入して整理すると

$$h^2(1+t^2-s^2)X^2+2h^3s^2\frac{1+t^2}{t}X+h^2\frac{(1+t^2)^2}{t^2}Y^2=h^4s^2\frac{(1+t^2)^2}{t^2},$$

$$\begin{aligned}&(1+t^2-s^2)\left\{X+h\frac{s^2(1+t^2)}{t(1+t^2-s^2)}\right\}^2+\frac{(1+t^2)^2}{t^2}Y^2\\ &= h^2\frac{s^2(1+t^2)^2}{t^2}+h^2\frac{s^4(1+t^2)^2}{t^2(1+t^2-s^2)}=h^2\frac{s^2(1+t^2)^2}{t^2(1+t^2-s^2)}\{(1+t^2-s^2)+s^2\}\\ &= h^2\frac{s^2(1+t^2)^3}{t^2(1+t^2-s^2)},\end{aligned}$$

$$\left\{X+h\frac{s^2(1+t^2)}{t(1+t^2-s^2)}\right\}^2+\frac{(1+t^2)^2}{t^2(1+t^2-s^2)}Y^2=h^2\frac{s^2(1+t^2)^3}{t^2(1+t^2-s^2)^2}$$

となる。よって、

$$O_x = -h\frac{s^2(1+t^2)}{t(1+t^2-s^2)} \tag{9}$$

$$A = h\frac{s(1+t^2)^{3/2}}{t(1+t^2-s^2)} \tag{10}$$

$$B = h\frac{s(1+t^2)^{3/2}}{t(1+t^2-s^2)}\frac{t\sqrt{1+t^2-s^2}}{1+t^2}=h\frac{s(1+t^2)^{1/2}}{(1+t^2-s^2)^{1/2}} \tag{11}$$

が得られる。

この図全体を x 軸方向に $-O_x$ 平行移動した場合に、この楕円と光源である $\bar{\mathrm{P}}$ が

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1,\quad \mathrm{P}(p,0,h)$$

に移ると考えると、$a=A$, $b=B$ で

$$p=\bar{p}-O_x=\frac{h}{t}+h\frac{s^2(1+t^2)}{t(1+t^2-s^2)}=h\frac{(1+t^2+s^2t^2)}{t(1+t^2-s^2)} \tag{12}$$

となる。

これで、直円錐の一部である場合に a,b,p が h,s,t でどのように表されるかが得られたことになるが、逆に考えれば、この a,b,p の式 (10), (11), (12) から s,t を消去して得られるのが、元の図形が直円錐の一部となるための条件式、ということになる。その条件式を以下で求める。

まず (10), (11) より、

$$\frac{a/h}{(b/h)^2} = \frac{(1+t^2)^{1/2}}{st} = \frac{1}{k}$$

と置くと、

$$s = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}k, \quad k = \frac{b^2}{ah} \tag{13}$$

となる。これを (10) に代入すると

$$\frac{a}{h} = \frac{(1+t^2)^2 k}{t^2\left(1+t^2-\dfrac{1+t^2}{t^2}k^2\right)} = \frac{(1+t^2)k}{t^2\left(1-\dfrac{k^2}{t^2}\right)} = \frac{t^2+1}{t^2-k^2}k$$

より、

$$\frac{a}{hk} - 1 = \frac{a}{b^2/a} - 1 = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{1+k^2}{t^2-k^2} \tag{14}$$

となる。よって

$$t^2 = k^2 + \frac{1+k^2}{a^2/b^2-1} = \frac{1+a^2k^2/b^2}{a^2/b^2-1} = \frac{b^2/h^2+1}{a^2/b^2-1}$$

より

$$t = \sqrt{\frac{b^2/h^2+1}{a^2/b^2-1}} \tag{15}$$

となる。

(13) を (12) に代入すると、(14), (15) より

$$\begin{aligned}\frac{p}{h} &= \frac{1+t^2+(1+t^2)k^2}{t\left(1+t^2-\dfrac{1+t^2}{t^2}k^2\right)} = \frac{1+k^2}{t\left(1-\dfrac{k^2}{t^2}\right)} = t\frac{1+k^2}{t^2-k^2} = t\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right) \\ &= \sqrt{\left(\frac{b^2}{h^2}+1\right)\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)}\end{aligned}$$

が得られ、よって

$$\frac{p^2}{h^2} = \left(\frac{b^2}{h^2} + 1\right)\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)$$

ゆえに

$$b^2p^2 = (h^2 + b^2)(a^2 - b^2) \tag{16}$$

が求める条件式になる。つまり、直円錐の一部になる条件は

- $a > b$ ならば $b^2p^2 = (h^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ かつ $q = 0$
- $a < b$ ならば $a^2q^2 = (h^2 + a^2)(b^2 - a^2)$ かつ $p = 0$

となる。

なお、この条件 (16) の導出の途中の計算の複雑さに対して最後の結果 (16) は割とやさしい式になるので、何らかの幾何学的な性質を利用するようなもっと簡単に求める方法もあるのかもしれない。

5 曲面積を求める公式: その 1

この節では、2 節で述べた方針 2. に従って、曲面積 S を表す式を求める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (at\cos\theta + (1-t)p, bt\sin\theta + (1-t)q, (1-t)h) \quad (0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq t \leq 1)$$

であるので、これを曲面積の公式

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{\partial t} \times \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{\partial\theta} \right| dtd\theta$$

に代入する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{\partial t} \times \frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{\partial\theta} &= (a\cos\theta - p, b\sin\theta - q, -h) \times (-at\sin\theta, bt\cos\theta, 0) \\ &= t(hb\cos\theta, ha\sin\theta, ab - pb\cos\theta - qa\sin\theta) \end{aligned}$$

なので、

$$\left|\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{\partial t}\times\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{\partial\theta}\right| = t\sqrt{h^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)+(ab-pb\cos\theta-qa\sin\theta)^2}$$

となり、$D=\{(t,\theta);\ 0\le t\le 1,\ 0\le\theta<2\pi\}$ より

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 t dt\int_0^{2\pi}\sqrt{h^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)+(ab-pb\cos\theta-qa\sin\theta)^2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{h^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)+(ab-pb\cos\theta-qa\sin\theta)^2}\,d\theta \end{aligned} \tag{17}$$

となる。

6 曲面積を求める公式: その 2

次は、2 節で述べた方針 3. の方針で考える。

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(p,q,h),\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}(\theta)}=(a\cos\theta,b\sin\theta,0),\\ &\overrightarrow{\mathrm{OQ}'}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}(\theta+\Delta\theta)}=(a\cos(\theta+\Delta\theta),b\sin(\theta+\Delta\theta),0) \end{aligned}$$

に対し、$\triangle\mathrm{PQQ}'$ の面積を ΔS とし、ΔS の $\Delta\theta$ による一次近似式を求める。

$$\Delta S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\times\overrightarrow{\mathrm{QQ}'}\right|$$

であるが、$\Delta\theta\approx 0$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{QQ}'}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}(\theta+\Delta\theta)}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}(\theta)}\approx\frac{d\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}(\theta)}}{d\theta}\Delta\theta=(-a\sin\theta,b\cos\theta,0)\Delta\theta$$

なので、

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx \frac{1}{2}|(p-a\cos\theta,q-b\sin\theta,h)\times(-a\sin\theta,b\cos\theta,0)|\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}|(-hb\cos\theta,-ha\sin\theta,pb\cos\theta+qa\sin\theta-ab)|\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{h^2(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)+(ab-pb\cos\theta-qa\sin\theta)^2}\,\Delta\theta \end{aligned}$$

なので、この $\Delta\theta$ の係数を 0 から 2π まで積分すれば結局 (17) と同じ式が得られることになる。

7 この積分の計算可能性

この節では、この積分 (17) の計算可能性について考察する。ここでいう計算可能性とは、通常使われる初等的な関数等でこの積分を表すことができるか、ということを意味する。微分とは異なり、積分はそれができないものも数多く存在する。(17) は根号の中に $\sin\theta$, $\cos\theta$ の 2 次式が含まれているが、例えば、より易しい積分

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{a+\cos\theta}\, d\theta \quad (a>1)$$

でも、$a=1$ のときは半角の公式を使えば容易に積分できるが、$a>1$ のときは

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{a+\cos\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a+1-2\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a+1-2\sin^2\phi}\, d\phi = 4\sqrt{a+1}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\, d\phi \\ &= 4\sqrt{a+1}\int_0^{1} \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\, dz \\ &\qquad \left(k=\sqrt{\frac{2}{a+1}}<1, \quad z=\sin\phi\right) \end{aligned}$$

となり、この最後の式は **第 2 種楕円積分** と呼ばれる、簡単な式では表せないことが良く知られているものになっている $(0$ から 1 までの定積分なので、いわゆる **完全楕円積分** にもなっている$)$。この例と同様に、S の式 (17) をこのような楕円積分の標準形に帰着させることで、実際に簡単には計算できない式であることを示すことを目標とする。ただし、一般の S の式を考察するのはかなり大変なので、この節では元々の問題の $a=b=p=r$, $q=0$ の場合のみを考えることにする。

なお、楕円積分という名前は、元々楕円の周囲の長さを計算するときに現われる積分を簡単な式では表すことができない、という事実に由来するが、楕円の周の長さはまさにこの第 2 種完全楕円積分で表される。

$a=b=p=r$, $q=0$ の場合、(17) は次のような式になる。

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{h^2r^2+(r^2\cos\theta-r^2)^2}\, d\theta = r^2\int_0^{\pi} \sqrt{\hat{h}^2+(1-\cos\theta)^2}\, d\theta \quad (\hat{h}=h/r)$$

この式を $\tan\theta/2=t$ と置換することで根号の中身を有理式に変換する。この場合、

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad t|_{\theta=0}=0,\ t|_{\theta=\pi}=\infty$$

となるので、

$$\begin{aligned} S &= r^2 \int_0^\infty \sqrt{\hat{h}^2 + \left(1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \, \frac{2\,dt}{1+t^2} \\ &= 2r^2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{(\hat{h}^2+4)t^4 + 2\hat{h}^2 t^2 + \hat{h}^2}}{(1+t^2)^2} \, dt \end{aligned} \tag{18}$$

となる。積分の中に $\sqrt{(4\text{ 次式})}$ が現われるが、一般に、多くの $\sqrt{(3\text{ 次以上の式})}$ の形が含まれている積分が楕円積分になることが知られている。しかし、この形が現われたら常に積分できないかというとそうではない。例えば良く知られているように

$$\int x^{2n+1} \sqrt{x^4 + ax^2 + b}\, dx$$

の形の積分は $x^2 = t$ と置換することで $\sqrt{(2\text{ 次式})}$ の形になりちゃんと簡単な式で表すことができるし、また根号の中が完全平方式で $\sqrt{(4\text{ 次式})} = (2\text{ 次式})$ となる場合ももちろん積分できる (これらの場合は 疑似楕円積分 と呼ばれる)。よって、本当に簡単に積分できない楕円積分であることを示すには、$\sqrt{(4\text{ 次式})}$ が出てくるから、というだけでは十分ではなく、簡単な式では表すことができないことが知られている楕円積分の標準形への変換が必要となる。最近の書物にはあまりその変換の方法に触れたものを見かけないが、例えば [1] 12.25「楕円積分 (I)」 にそれが書かれているのでそれに従って標準形への変換を行なう。ただし、その途中の計算を全て書きあげるとかなりの分量になるので、適宜省略しながら計算を紹介する。

今、$A = \sqrt{(\hat{h}^2+4)/\hat{h}^2}$ とすると, $A > 1$ であり、(18) の根号の部分は

$$\sqrt{(\hat{h}^2+4)t^4 + 2\hat{h}^2 t^2 + \hat{h}^2} = \sqrt{\hat{h}^2+4} \sqrt{t^4 + \frac{2}{A^2}t^2 + \frac{1}{A^2}}$$

となる。ここでこの (18) の積分を $t^2 = s$ と置換すると、$dt = ds/2\sqrt{s}$ なので、

$$S = r^2 \sqrt{\hat{h}^2+4} \int_0^\infty \sqrt{\frac{1}{s}\left(s^2 + \frac{2}{A^2}s + \frac{1}{A^2}\right)} \frac{ds}{(1+s)^2} \tag{19}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{2}{A^2}s + \frac{1}{A^2} &= \frac{1}{2A}\left\{(A+1)\left(s + \frac{1}{A}\right)^2 + (A-1)\left(s - \frac{1}{A}\right)^2\right\}, \\ s &= \frac{A}{4}\left\{\left(s + \frac{1}{A}\right)^2 - \left(s - \frac{1}{A}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

に注意すると、(19) の根号部分は

$$\sqrt{\frac{1}{s}\left(s^2+\frac{2}{A^2}s+\frac{1}{A^2}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{A}\sqrt{\frac{(A+1)\left(s+\frac{1}{A}\right)^2+(A-1)\left(s-\frac{1}{A}\right)^2}{\left(s+\frac{1}{A}\right)^2-\left(s-\frac{1}{A}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{A}\sqrt{\frac{A+1+(A-1)z^2}{1-z^2}}$$

と書ける。なお、$z=(s-1/A)/(s+1/A)$ とした。(19) の積分においてこの s から z への置換を行なうと、

$$s=\frac{1}{A}\frac{1+z}{1-z},\quad ds=\frac{2}{A}\frac{dz}{(1-z)^2},\quad \frac{1}{(1+s)^2}=\frac{A^2(1-z)^2}{\{(A+1)-(A-1)z\}^2},$$
$$z|_{s=0}=-1,\ z|_{s=\infty}=1$$

となるので、

$$\begin{aligned} S &= r^2\sqrt{\hat{h}^2+4}\int_{-1}^{1}\frac{2\sqrt{2}(1-z)^2}{\{(A+1)-(A-1)z\}^2}\sqrt{\frac{A+1+(A-1)z^2}{1-z^2}}\frac{dz}{(1-z)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}r^2\sqrt{\hat{h}^2+4}}{(A-1)^{3/2}}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(\alpha-z)^2}\sqrt{\frac{\alpha+z^2}{1-z^2}}\,dz \qquad (20) \\ &\quad \left(\alpha=\frac{A+1}{A-1}>1\right) \end{aligned}$$

となる。詳しい計算は省くが、この被積分関数に対しては次のような関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha-z)^2}\sqrt{\frac{\alpha+z^2}{1-z^2}} &= -\frac{1}{(\alpha-1)\sqrt{f(z)}}+\frac{\alpha}{(\alpha-1)}\frac{1}{(\alpha-z)\sqrt{f(z)}} \\ &\quad +\frac{1}{\alpha^2-1}\sqrt{\frac{\alpha+z^2}{1-z^2}}-\frac{1}{\alpha^2-1}\left(\frac{\sqrt{f(z)}}{\alpha-z}\right)' \end{aligned}$$

ここで、$f(z)=(1-z^2)(\alpha+z^2)$ とした。もちろん、

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sqrt{f(z)}}{\alpha-z}\right)'dz=\left[\frac{\sqrt{f(z)}}{\alpha-z}\right]_{z=-1}^{z=1}=0$$

であり、また右辺第 2 項は、

$$\frac{\alpha}{(\alpha-1)}\frac{1}{(\alpha-z)\sqrt{f(z)}}=\frac{\alpha}{(\alpha-1)}\frac{\alpha+z}{(\alpha^2-z^2)\sqrt{f(z)}}$$

$$= \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)}\frac{1}{(\alpha^2-z^2)\sqrt{f(z)}} + \frac{\alpha}{(\alpha-1)}\frac{z}{(\alpha^2-z^2)\sqrt{f(z)}}$$

と変形すると、最後の項は z に関して奇関数なので -1 から 1 での積分の値は 0 となる。よって、結局 S は、

$$I_1 = \int_{-1}^{1}\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}, \quad I_2 = \int_{-1}^{1}\frac{dz}{(\alpha^2-z^2)\sqrt{f(z)}}, \quad I_3 = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{\alpha+z^2}{1-z^2}}\,dz$$

によって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\sqrt{2}r^2\sqrt{\hat{h}^2+4}}{(A-1)^{3/2}}\left(-\frac{1}{\alpha-1}I_1 + \frac{\alpha^2}{\alpha-1}I_2 + \frac{1}{\alpha^2-1}I_3\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}r^2\sqrt{\hat{h}^2+4}}{\sqrt{A-1}}\left(-I_1 + \alpha^2 I_2 + \frac{1}{\alpha+1}I_3\right) \quad \left(\frac{1}{\alpha-1} = \frac{A-1}{2}\right) \end{aligned}$$

と表されることになる。また、I_1, I_2, I_3 はいずれも偶関数の積分なので、0 から 1 までの積分の値を 2 倍したものに等しい。

その I_1, I_3 の積分で、$z = \sqrt{1-\tau^2}$ と置換する。このとき

$$dz = \frac{-\tau d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad \alpha + z^2 = \alpha + 1 - \tau^2, \quad 1 - z^2 = \tau^2, \quad , \tau|_{z=0} = 1,\ \tau|_{z=1} = 0$$

となるので、I_1 は

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} = 2\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(\alpha+1-\tau^2)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha+1}}\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} \quad \left(k = \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}} < 1\right) \end{aligned}$$

と変形でき、これは 第 **1** 種完全楕円積分 の形になっている。I_3 は

$$I_3 = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{\alpha+1-\tau^2}{1-\tau^2}}\,d\tau = 2\sqrt{\alpha+1}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2\tau^2}{1-\tau^2}}\,d\tau$$

となるので、これは第 2 種完全楕円積分になる。

I_2 は、$z = \sqrt{\alpha}\tau/\sqrt{1+\alpha-\tau^2}$ と置換する。このとき、

$$z^2 = \frac{\alpha\tau^2}{1+\alpha-\tau^2}$$

より、

$$
\begin{aligned}
&1-z^2=(1+\alpha)\frac{1-\tau^2}{1+\alpha-\tau^2},\quad \alpha+z^2=\frac{\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha-\tau^2},\\
&\alpha^2-z^2=\alpha(1+\alpha)\frac{\alpha-\tau^2}{1+\alpha-\tau^2},\quad 2zdz=\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha-\tau^2)^2}2\tau d\tau,\\
&\tau|_{z=0}=0,\ \tau|_{z=1}=1
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
&\frac{dz}{(\alpha^2-z^2)\sqrt{f(z)}}\\
&= \frac{1+\alpha-\tau^2}{\alpha(1+\alpha)(\alpha-\tau^2)}\times\frac{1+\alpha-\tau^2}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha(1-\tau^2)}}\times\frac{\alpha(1+\alpha)}{(1+\alpha-\tau^2)^2}\frac{\tau d\tau}{z}\\
&= \frac{\tau}{\sqrt{\alpha}(1+\alpha)(\alpha-\tau^2)\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\sqrt{1+\alpha-\tau^2}}{\sqrt{\alpha}\tau}d\tau\\
&= \frac{1}{\alpha(1+\alpha)(\alpha-\tau^2)}\sqrt{\frac{1+\alpha-\tau^2}{1-\tau^2}}d\tau
\end{aligned}
$$

となり、よって

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{2}{\alpha(1+\alpha)}\int_0^1\frac{1}{\alpha-\tau^2}\sqrt{\frac{1+\alpha-\tau^2}{1-\tau^2}}\,d\tau\\
&= \frac{2}{\alpha(1+\alpha)}\int_0^1\frac{1}{\alpha-\tau^2}\frac{1+\alpha-\tau^2}{\sqrt{(1-\tau^2)(1+\alpha-\tau^2)}}\,d\tau\\
&= \frac{2}{\alpha(1+\alpha)}\int_0^1\left(1+\frac{1}{\alpha-\tau^2}\right)\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1+\alpha-\tau^2)}}\\
&= \frac{1}{\alpha(1+\alpha)}I_1+\frac{2}{\alpha^2(1+\alpha)\sqrt{1+\alpha}}\int_0^1\frac{d\tau}{(1-\lambda^2\tau^2)\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}\\
&\qquad\left(\lambda=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}<1\right)
\end{aligned}
$$

となり、最後の積分は **第 3 種楕円積分** である。なお、第 3 種楕円積分は、

$$
\int_0^\beta\frac{d\tau}{(1+\mu\tau^2)\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}
$$

を標準形とする (すなわち $\mu>0$ でも構わない) 流儀もあるようなので、それにあわせるだけなら I_2 を I_1, I_3 と同様に $z=\sqrt{1-\tau^2}$ と置換して

$$
I_2=\frac{2}{(\alpha^2-1)\sqrt{\alpha+1}}\int_0^1\frac{d\tau}{(1+\mu\tau^2)\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}\quad\left(\mu=\frac{1}{\alpha^2-1}\right)
$$

としてもよい。

結局、それぞれの楕円積分を

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}, \\ E_2 &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2\tau^2}{1-\tau^2}}\, d\tau, \\ E_3 &= \int_0^1 \frac{d\tau}{(1-\lambda^2\tau^2)\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} \end{aligned}$$

とすると、S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{2}r^2\sqrt{\hat{h}^2+4}}{\sqrt{A-1}}\left(-\frac{2}{\sqrt{\alpha+1}}E_1+\frac{2\alpha}{(1+\alpha)\sqrt{1+\alpha}}E_1+\frac{2}{(1+\alpha)\sqrt{1+\alpha}}E_3\right. \\ &\quad \left.+\frac{2}{\sqrt{1+\alpha}}E_2\right) \\ &= \frac{A-1}{A\sqrt{A}}r^2\sqrt{\hat{h}^2+4}\{-E_1+E_3+(1+\alpha)E_2\} \\ &\quad \left(\frac{2}{(1+\alpha)\sqrt{1+\alpha}}=\frac{(A-1)^{3/2}}{\sqrt{2}A^{3/2}}\right) \\ &= \frac{A-1}{\sqrt{A}}rh\{-E_1+E_3+(1+\alpha)E_2\} \quad \left(\frac{\sqrt{\hat{h}^2+4}}{A}=\hat{h}=\frac{h}{r}\right) \end{aligned}$$

のように表されることになる。よって、S は楕円関数の標準形で書けることになり、簡単な関数で表すことはできない、ということが言えたことになる。

一般の (17) の場合も $\tan\theta/2=t$ と置換すれば、根号の中が 4 次式になるので上の計算と同様にして標準形に変換できるかも知れないが、その 4 次式の処理は上の場合ほど簡単にはいかずかなり難しい。しかし、多くの場合に上の場合と同様に楕円積分になってしまうであろうことは想像がつく。そうはならない場合については 8 節で考察する。

8 根号内が完全平方になる場合

7 節で述べたように、一般には (17) を簡単な式で表すことはできないが、根号の中が完全平方式である場合は簡単に計算できる式になる。この節では、まずその条件を考えてみることにする。

式 (17) の完全平方性を考える場合、以下の 2 つの考え方がある。

- (17) の根号の内部が直接 $(A + B\cos\theta + C\sin\theta)^2$ になる場合
- (17) を $\tan\theta/2 = t$ と置換したときの根号内の t の 4 次式が (t の 2 次式)^2 になる場合

しかし容易に分かるようにこの両者は同等である (一方が成り立てば他方も成り立つ) ので、どちらか一方のみを考えれば良い。いずれにしても恒等式を考えるわけだが、前者は関数

$$1, \cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta$$

の一次独立性を、後者は

$$1, t, t^2, t^3, t^4$$

の一次独立性を用いて両辺の係数比較を行なうことになる。今回は前者の三角関数を使った計算で考えることにする。

まず、

$$\begin{aligned} & h^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) + (ab - pb\cos\theta - qa\sin\theta)^2 \\ &= (A + B\cos\theta + C\sin\theta)^2 \end{aligned} \tag{21}$$

と置いて両辺を展開して整理する。倍角の公式を用いると

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= h^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta) + (a^2b^2 - 2ab^2p\cos\theta - 2a^2bq\sin\theta \\ &\quad + p^2b^2\cos^2\theta + q^2a^2\sin^2\theta + 2abpq\cos\theta\sin\theta) \\ &= a^2b^2 - 2ab^2p\cos\theta - 2a^2bq\sin\theta + b^2(h^2 + p^2)\cos^2\theta + a^2(h^2 + q^2)\sin^2\theta \\ &\quad + 2abpq\cos\theta\sin\theta \\ &= a^2b^2 + \frac{1}{2}\{b^2(h^2 + p^2) + a^2(h^2 + q^2)\} - 2ab^2p\cos\theta - 2a^2bq\sin\theta \\ &\quad + \frac{1}{2}\{b^2(h^2 + p^2) - a^2(h^2 + q^2)\}\cos 2\theta + abpq\sin 2\theta, \\ \text{右辺} &= A^2 + 2AB\cos\theta + 2AC\sin\theta + B^2\cos^2\theta + C^2\sin^2\theta + 2BC\cos\theta\sin\theta \\ &= A^2 + \frac{1}{2}(B^2 + C^2) + 2AB\cos\theta + 2AC\sin\theta + \frac{1}{2}(B^2 - C^2)\cos 2\theta \\ &\quad + BC\sin 2\theta \end{aligned}$$

となるので、係数比較して次の式を得る。

$$2A^2 + B^2 + C^2 = 2a^2b^2 + b^2(h^2 + p^2) + a^2(h^2 + q^2) \tag{22}$$

$$
\begin{aligned}
AB &= -ab^2p && (23)\\
AC &= -a^2bq && (24)\\
B^2-C^2 &= b^2(h^2+p^2)-a^2(h^2+q^2) && (25)\\
BC &= abpq && (26)
\end{aligned}
$$

$p \geq 0,\ q \geq 0,\ h > 0,\ a > 0,\ b > 0$ として、これらの式が成り立つ (つまり完全平方になる) ために a, b, h, p, q が満たす条件を求め、そのときの A, B, C を求めることが目標である。

まず、(21) より、$A \geq 0$ として構わないことに注意する。$A < 0$ の場合は A, B, C をすべて (-1) 倍すれば同じことになる。

$(23)\times(24)\times(26)$ より

$$A^2B^2C^2 = a^4b^4p^2q^2$$

となるので、もし $pq \neq 0$ ならば、(26) より $BC \neq 0$ なので、この式を (26) の 2 乗で割ると $A^2 = a^2b^2$, よって $A \geq 0$ より $A = ab$ を得る。よって $A > 0$ なので、(23), (24) より

$$B = -bp, \quad C = -aq$$

となる。しかし、これらを (22) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&2a^2b^2 + b^2p^2 + a^2q^2 = 2a^2b^2 + b^2(h^2+p^2) + a^2(h^2+q^2),\\
&h^2(b^2+a^2) = 0
\end{aligned}
$$

となるが、これは $h > 0,\ a > 0,\ b > 0$ に矛盾する。よって、$pq \neq 0$ のときは完全平方にはなりえないことが分かる。

今度は $q = 0$ とすると、(24), (26) より $AC = 0,\ BC = 0$ なので、もし $C \neq 0$ ならば $A = B = 0$ となり、(23) より $p = 0$ となる。ところがこの場合も (22)+(25) を考えると、

$$0 = 2a^2b^2 + 2b^2h^2$$

となり、これも $h > 0,\ a > 0,\ b > 0$ に矛盾するので、$C = 0$ でなければならない。$q = 0, C = 0$ を (22), (25) に代入すると

$$
\begin{aligned}
2A^2 + B^2 &= 2a^2b^2 + b^2(h^2+p^2) + a^2h^2,\\
B^2 &= b^2(h^2+p^2) - a^2h^2
\end{aligned}
$$

より、

$$A^2 = a^2(b^2 + h^2) \tag{27}$$

となる。この A^2 と B^2 を (23) の 2 乗に代入したものが完全平方のための条件となる。代入して展開、整理すると

$$\begin{aligned} A^2B^2 &= a^2b^4p^2 \\ &= a^2(b^2+h^2)(b^2h^2+b^2p^2-a^2h^2), \\ b^4p^2 &= b^4h^2+b^4p^2-a^2b^2h^2+b^2h^4+b^2h^2p^2-a^2h^4, \\ 0 &= b^4-a^2b^2+b^2h^2+b^2p^2-a^2h^2, \\ b^2p^2 &= a^2b^2+a^2h^2-b^2h^2-b^4 \\ &= (b^2+h^2)(a^2-b^2) \end{aligned} \tag{28}$$

となる。この最後の式は $q = 0$ と合わせて、4 節で求めた、この図形が直円錐の一部となる条件 (16) $(a \geq b)$ に等しい。$p = 0$ としたときも同様に $a \leq b$ のときの直円錐の一部になる条件が得られる。

さて、このとき A は (27) より $A = a\sqrt{b^2+h^2}$ $(A \geq 0)$ であり、B は (23) と (28) より、$a > b$, $p > 0$ のときは ($a = b$, $p = 0$ のときは単なる直円錐になる)、

$$B = -\frac{ab^2p}{A} = -\frac{b^2p}{\sqrt{b^2+h^2}} = -b\sqrt{a^2-b^2}$$

となるので、(21) の右辺のカッコの中は

$$A + B\cos\theta = a\sqrt{b^2+h^2} - b\sqrt{a^2-b^2}\cos\theta = b\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2+h^2}{a^2-b^2}} - \cos\theta\right) \tag{29}$$

となる。ここで、$a > \sqrt{a^2-b^2}$, $\sqrt{b^2+h^2} > b$ なので、

$$\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2+h^2}{a^2-b^2}} > 1$$

となり、(29) は正の値となる。

結局この場合は、公式 (17) は

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} b\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2+h^2}{a^2-b^2}} - \cos\theta\right)\,d\theta$$

となるので、これを計算すれば

$$S = \frac{1}{2} \times 2\pi \times b\sqrt{a^2 - b^2} \times \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 + h^2}{a^2 - b^2}} = \pi a\sqrt{b^2 + h^2}$$

となる。この最後の式は、通常の直円錐の場合の公式 (1) によく似た式となっているが、つまり直円錐の一部の場合には綺麗な性質が成り立つ、ということを意味する。

以上をまとめると、4 節で考察したように、この図形が直円錐の一部になる場合には、

- $a \geq b$ ならば $S = \pi a\sqrt{b^2 + h^2} \quad (q = 0)$
- $a \leq b$ ならば $S = \pi b\sqrt{a^2 + h^2} \quad (p = 0)$

となることになる。

この、直円錐の一部になる場合以外にも S が楕円積分にならない場合があるかも知れないが、それは今のところは不明である。

9 数値計算結果

最後に、元の問題に対する数値計算結果を紹介する。元々の問題には、$S = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ で求めて構わないか、という要請も含まれているが、それに対する回答にもなっている。なお、この節でも元々の問題の条件、すなわち $a = b = p = r,\ q = 0$ で考えることにする。

この場合、S は 7 節で見たように

$$S = r\int_0^{\pi} \sqrt{h^2 + r^2(1 - \cos\theta)^2}\, d\theta$$

であり、この S と直円錐の場合の側面積 $\pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ との比を考えて、その比 $(=$ 相対誤差$)$ がどれくらいになるのかを見ることにする。つまり、

$$\begin{aligned} F &= \frac{S}{\pi r\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{r\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{h^2 + r^2(1 - \cos\theta)^2}\, d\theta}{\pi r\sqrt{h^2 + r^2}} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{h^2 + r^2(1 - \cos\theta)^2}{h^2 + r^2}}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{H + (1 - \cos\theta)^2}{H + 1}}\, d\theta \\ &\quad \left(H = \hat{h}^2 = \frac{h^2}{r^2}\right) \end{aligned}$$

を H の関数 $F = F(H)$ と見て、この値の増減を調べることにする。容易に分かるように、

$$\begin{aligned}\lim_{H\to+0} F(H) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{(1-\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1-\cos\theta)\,d\theta = 1,\\ \lim_{H\to+\infty} F(H) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 1\,d\theta = 1\end{aligned}$$

なので、$H > 0$ のどこかで最大値、または最小値を取ることはわかる。しかし闇雲に数値計算するのも大変なので、まずおおまかに $F(H)$ の増減を調べてみることにする。微分と積分の順序交換の定理を使って $F(H)$ の導関数を計算する。

$$\begin{aligned}F'(H) &= \frac{d}{dH}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{\frac{H+(1-\cos\theta)^2}{H+1}}\,d\theta\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial H}\sqrt{\frac{H+(1-\cos\theta)^2}{H+1}}\,d\theta\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial H}\sqrt{\frac{H+(1-\cos\theta)^2}{H+1}} = \frac{\partial}{\partial H}\{H+(1-\cos\theta)^2\}^{1/2}(H+1)^{-1/2}\\ &= \frac{1}{2}M^{-1/2}N^{-1/2} - \frac{1}{2}M^{1/2}N^{-3/2} \quad (M = H+(1-\cos\theta)^2,\ N = H+1)\\ &= \frac{1}{2}M^{-1/2}N^{-3/2}\{H+1-H-(1-\cos\theta)^2\} = \frac{1}{2}M^{-1/2}N^{-3/2}\cos\theta(2-\cos\theta)\\ &= \frac{1}{2}(H+1)^{-3/2}G(\cos\theta) \quad (G(X) = X(2-X)\{H+(1-X)^2\}^{-1/2})\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}F'(H) &= \frac{(H+1)^{-3/2}}{2\pi}\int_0^\pi G(\cos\theta)\,d\theta\\ &= \frac{(H+1)^{-3/2}}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} G(\cos\theta)\,d\theta + \int_{\pi/2}^\pi G(\cos\theta)\,d\theta\right)\end{aligned}$$

となるが、この後者の積分で $\theta = \pi - \phi$ とすると、

$$\begin{aligned}F'(H) &= \frac{(H+1)^{-3/2}}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} G(\cos\theta)\,d\theta + \int_0^{\pi/2} G(-\cos\phi)\,d\phi\right)\\ &= \frac{(H+1)^{-3/2}}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\{G(\cos\theta)+G(-\cos\theta)\}\,d\theta\end{aligned}$$

となる。この $G(\cos\theta)+G(-\cos\theta)$ の符号を調べてみる。$X=\cos\theta$ とすると、

$$
\begin{aligned}
& G(X)+G(-X) \\
&= \frac{X(2-X)}{\sqrt{H+(1-X)^2}}+\frac{-X(2+X)}{\sqrt{H+(1+X)^2}} \\
&= \frac{(2-X)\sqrt{H+(1+X)^2}-(2+X)\sqrt{H+(1-X)^2}}{\sqrt{H+(1-X)^2}\sqrt{H+(1+X)^2}}X \\
&= \frac{(2-X)^2\{H+(1+X)^2\}-(2+X)^2\{H+(1-X)^2\}}{\sqrt{H+(1-X)^2}\sqrt{H+(1+X)^2}} \\
&\quad \times\frac{X}{(2-X)\sqrt{H+(1+X)^2}+(2+X)\sqrt{H+(1-X)^2}}
\end{aligned}
$$

となるが、$0\le\theta\le\pi/2$ では $0\le X\le 1$ なので、最後の式の前の方の分母と後ろの方の分数式全体は 0 以上、よって、符号は前の方の分子の式で決まる。これを展開すると、

$$
\begin{aligned}
& (2-X)^2\{H+(1+X)^2\}-(2+X)^2\{H+(1-X)^2\} \\
&= H\{(2-X)^2-(2+X)^2\}+(2-X)^2(1+X)^2-(2+X)^2(1-X)^2 \\
&= -8XH+(2+X-X^2)^2-(2-X-X^2)^2 \\
&= -8XH+2X(4-2X^2) \\
&= 4X(2-X^2-2H)
\end{aligned}
$$

となる。よって、$G(\cos\theta)+G(-\cos\theta)$ の符号は $2-X^2-2H=2-\cos^2\theta-2H$ で決まることになるので、

- $0\le H<1/2$ では $2-\cos^2\theta-2H>1-\cos^2\theta\ge 0$ より $G(\cos\theta)+G(-\cos\theta)$ は常に正となるので $F'(H)>0$、すなわちこの範囲では $F(H)$ は増加、
- $H>1$ では $2-\cos^2\theta-2H<-\cos^2\theta\le 0$ より $G(\cos\theta)+G(-\cos\theta)$ は常に負となるので $F'(H)<0$、すなわちこの範囲では $F(H)$ は減少

となる。よって、$F(H)$ の増減は後は $1/2\le H\le 1$ の値で決まることになり、多分この区間内に $F(H)$ の最大値があると予想される。つまりこの区間でだけ $F(H)$ の値を調べてみれば良い。

なお、元の出題者が必要としていた h/r の値は $2\le h/r\le 4$ 位であるらしいので、$4\le H\le 16$ での最大値も必要となるが、それは上の考察から $H=4$ のときの値となる。よって、$1/2\le H\le 1$、および $H=4$ (ついでに $H=16$) での $F(H)$ の値を数値計算すればいいことになる。

積分の数値計算には、良く用いられるシンプソンの公式を使用する。シンプソンの公式は、$\int_a^b f(x)dx$ の積分を、区間 $a \leq x \leq b$ を $2N$ 等分して、$\Delta x = (b-a)/2N$ とするとき、

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{\Delta x}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_5 + \cdots + 2f_{2N-2} + 4f_{2N-1} + f_{2N}) \\ &\quad (x_j = a + j\Delta x,\ f_j = f(x_j))\end{aligned}$$

によって近似計算する方法である。これを $F(H)$ に用いる。

$H = 1/2 + j/2000$ $(j = 0, 1, \ldots, 1000)$ に対する $F(H)$ の値を、$N = 10000$ に対するシンプソンの公式を用いて数値計算して得た値をグラフにしたのが図 8 である。横軸が H を、縦軸が $F(H)$ を表している。これを見て分かるように $H = 0.6245$ $(h/r = 0.7903)$

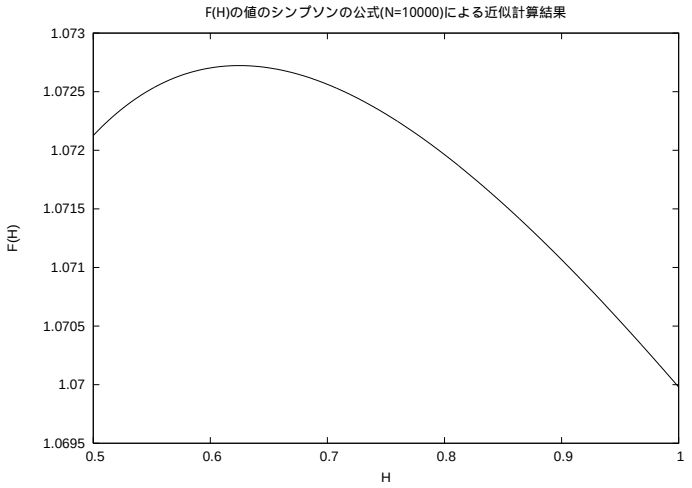

図 8: F(H) のグラフ $(1/2 \leq H \leq 1)$

付近で最大値約 1.0727 をとり、その両側では単調になっている。

また、$F(4), F(16)$ はそれぞれ $F(4) = 1.0399$, $F(16) = 1.0137$ 位であった。結局、$F(H)$ は

- $H = 0$ では $F(H) = 1$、
- $0 < H < 0.6245$ $(0 < h/r < 0.7903)$ では $F(H)$ は増加、
- $F(0.6245) = 1.0727$ $(h/r = 0.7903)$ が最大値、
- $H > 0.6245$ $(h/r > 0.7903)$ では $F(H)$ は減少
- $H \to \infty$ では $F(H)$ は 1 に収束
- $4 \leq H \leq 16$ $(2 \leq h/r \leq 4)$ では $F(H)$ の最大値は $F(4) = 1.0399$

ということになる。

質問者に取っては相対誤差は 1.0399 位、その範囲を越えても高々 1.0727 位になるわけであるが、これくらいの値になると報告してみたところ、他の要因のためにも少し余裕を見ているのでこれくらいの誤差なら全く問題はない、ということであった。

10 最後に

今まで知識として $\sqrt{(4\text{ 次式})}$ の含まれる積分は楕円積分になる、ということは知っていたがここまでの計算をしたことはなかったし、斜円錐の表面積が実際にそうなるということを考えたこともなかった。直円錐は古くから研究されていて色々綺麗な性質が成り立つということも知ってはいたが、その斜めにカットした表面積が簡単な式で表される、ということは全く予想もしなかった。今回この問題によって色々なことを体験できたわけで、私に取っても非常にいい経験であった。

また、質問者からの返事にもあったのだが、今回の問題はごく身近な中にも非常に難しいものがあるということを知ってもらう一つのいい例にもなるのではないかと思う。

参考文献

[1] 寺沢寛一「自然科学者のための数学概論 [増訂版]」岩波書店、1983