2017 年 12 月 08 日

20 度、40 度、80 度の三角関数の積について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

先日、ある高校の先生から、

$$I_0 = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ \tag{1}$$

が簡単な値 ($\sqrt{3}/8$) になるのだが、それはなぜなのか、という質問を受けた。積和の公式を用いて変形すれば確かにそのようになるのだが、なぜそうなるのかを知りたい、という話であった。

これについて調べたこと、考えたことを、ここにまとめておく。

2 簡単な値になること

私は知らなかったが、ネットで検索してみるとこの問題は割と有名なようで、質問サイト等にかなりあがっているし、Wikipedia [1] や、冨田 [2] などでも説明されている。

それらに I_0 が簡単な値になる計算も書かれているが、それをまず紹介する。使うのは積和の公式:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\} \tag{2}$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\} \tag{3}$$

と、その逆の和積の公式である。まず、(2), (3) により

$$\begin{aligned} I_0 &= (\sin 20^\circ \sin 40^\circ)\sin 80^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)\sin 80^\circ \\ &= \frac{1}{2}(\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \sin 80^\circ \cos 60^\circ) \\ &= \frac{1}{4}\{(\sin 100^\circ + \sin 60^\circ) - (\sin 140^\circ + \sin 20^\circ)\} \end{aligned}$$

となり、

$$I_0 = \frac{1}{4}\sin 60^\circ + \frac{1}{4}(\sin 100^\circ - \sin 140^\circ - \sin 20^\circ)$$

となる。よって、I_0 が簡単な値となるためには、この後半の $\sin 100^\circ - \sin 140^\circ - \sin 20^\circ$ が簡単な値となる必要があるが、これらを 90° 以下の角に直すと

$$\sin 100^\circ - \sin 140^\circ - \sin 20^\circ = \sin 80^\circ - \sin 40^\circ - \sin 20^\circ \tag{4}$$

となって、また $20^\circ, 40^\circ, 80^\circ$ の角がでてくる。これに今度は和積の公式を用いると、

$$\begin{aligned}\sin 80^\circ - \sin 40^\circ &= \sin(60^\circ + 20^\circ) - \sin(60^\circ - 20^\circ) = 2\cos 60^\circ \sin 20^\circ \\ &= \sin 20^\circ \end{aligned} \tag{5}$$

となるので、確かに (4) が 0 となり、よって

$$I_0 = \frac{1}{4}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \tag{6}$$

が得られる。

上の流れを見ると、三角比の値が容易には求まらない $20^\circ, 40^\circ, 80^\circ$ という角で簡単な値の (6) が得られるのは、その前の (5) で $2\cos 60^\circ = 1$ によって (4) の値が 0 となることがうまく働いているように見える。

この話を一般化するため、$I_1 = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ $(\alpha < \beta < \gamma)$ に積和の公式を用いて

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2}\{\cos(\beta-\alpha) - \cos(\beta+\alpha)\}\sin\gamma \\ &= \frac{1}{4}\{\sin(\gamma+\beta-\alpha) + \sin(\gamma-\beta+\alpha) - \sin(\gamma+\beta+\alpha) - \sin(\gamma-\beta-\alpha)\}\end{aligned}$$

と変形し、前の計算と比較することで、

$$\beta = 60^\circ - \alpha, \quad \gamma = 60^\circ + \alpha$$

の形であれば、

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{4}\{\sin(120^\circ - \alpha) + \sin 3\alpha - \sin(120^\circ + \alpha) - \sin\alpha\} \\ &= \frac{1}{4}\sin 3\alpha + \frac{1}{4}(-2\cos 120^\circ \sin\alpha - \sin\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha\end{aligned}$$

となることに気がついたので、とりあえず、I_0 が (6) となるのは、

$$I_1 = \sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

という構造があるようです、と答えておいた。

しかし、(4) の値が 0 になることが少し気になったので、あらためて考えてみると、

$$\begin{aligned}\sin 40^\circ &= \sin(180^\circ-40^\circ) = \sin 140^\circ = \sin(20^\circ+120^\circ),\\ \sin 80^\circ &= -\sin(80^\circ+180^\circ) = -\sin 260^\circ = \sin(20^\circ+240^\circ)\end{aligned} \tag{7}$$

と書き直すことができるので、よって (4) は、

$$\sin 80^\circ - \sin 40^\circ - \sin 20^\circ = -\{\sin 20^\circ + \sin(20^\circ+120^\circ) + \sin(20^\circ+240^\circ)\}$$

の形になるが、これはよく知られた

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(x+\frac{2\pi}{n}k\right) = 0 \tag{8}$$

の特別な場合であり、そのあたりに関連するとわかる。特に、(7) の関係から、I_0 も

$$I_0 = -\sin 20^\circ\sin(20^\circ+120^\circ)\sin(20^\circ+240^\circ) \tag{9}$$

となるので、そのあたりに一般的な性質が成り立つのでは、と思い、手元の公式集 [3], [4] を見てみるとやはり以下のものがあった。

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}k\right) &= \frac{1}{(-2)^{n-1}}\left\{\cos n\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\frac{n\pi}{2}\right\} \qquad (10)\\ &= \begin{cases}\dfrac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}}(1-\cos nx) & (n\text{ が偶数のとき})\\[2ex] \dfrac{(-1)^{(n-1)/2}}{2^{n-1}}\sin nx & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}\\ \prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(x+\frac{2\pi}{n}k\right) &= \frac{1}{(-2)^{n-1}}\left(\cos nx - \cos\frac{n\pi}{2}\right) \qquad (11)\\ &= \begin{cases}\dfrac{1}{2^{n-1}}\{(-1)^{n/2} - \cos nx\} & (n\text{ が偶数のとき})\\[2ex] \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos nx & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}\end{aligned}$$

さらに、今回検索で見つけた、本稿に似た考察を行っている [2] では

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{\pi}{n}\,k\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sin nx \tag{12}$$

についても触れているが、これも公式集 [3], [4] のいずれにも書かれている。なお、この (12) の x に $x+\pi/2$ を代入すれば、もちろん

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(x+\frac{\pi}{n}\,k\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \tag{13}$$

も得られる。

これらを用いれば、(1) のような、一見求まらなそうな角に対する三角関数の積がきれいな数字になる例はかなり作れそうであることがわかる。また、元の問題のように、(9) ではなく、一見対称性がなさそうな (1) の形にしておけば不思議さもより増すことだろう。

なお、冨田 [2] では、(9) のような等差系の角の話だけではなく、(1) の形の 2 倍の等比系の角についても言及している。

3 和の公式の証明

せっかくなので、本節以降で (8), (10), (11), (12), (13) の公式の証明を紹介する。

なお、なるべくオイラーの公式は用いずに高校の範囲で、と考えたが、それだとかなり難しくなるものもあるので (私が易しい証明を思いつかないだけかもしれないが)、そのあたりについても書き残しておく。

まず、本節では (8) を証明する。

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\,k\right),\quad g_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(x+\frac{2\pi}{n}\,k\right)$$

とする (n は 2 以上の整数)。

オイラーの公式を用いてよいなら、$e^{2\pi i/n}\neq 1$ から、等比数列の和の公式を用いて、

$$g_n(x)+if_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\cos\left(x+\frac{2\pi}{n}\,k\right)+i\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\,k\right)\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(x+2\pi k/n)} = e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2\pi i/n}\right)^k = e^{ix}\frac{e^{2\pi i}-1}{e^{2\pi i/n}-1} = 0$$

のようにして示されるのであるが、高校の範囲だとこうはいかない。

まず、加法定理を用いて $f_n(x)$, $g_n(x)$ から x を分離して、

$$f_n(x) = f_n(0)\cos x + g_n(0)\sin x, \quad g_n(x) = g_n(0)\cos x - f_n(0)\sin x$$

のようにしてから $f_n(0) = g_n(0) = 0$ を示すことで $f_n(x) = g_n(x) = 0$ を示す、という方向で考えると楽そうである。

$f_n(0) = 0$ の方は、角が円周上を上下に対称に並んでいることを考えれば、丁度反対符号同士のものが打ち消されて 0 になることは容易にわかる。しかし、$g_n(0)$ の方は左右に対称でないと消えないので、n が奇数の場合はそのような議論では 0 になることが簡単には言えない。

$g_n(0)$ については、角が円周全体に渡って並んでいることから、ひとつずらして加法定理を用いることで以下のように変形する。

$$\begin{aligned}
g_n(0) &= \sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi}{n}k = \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{n}k \quad (\cos 2\pi = \cos 0)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2\pi}{n}(k+1) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}\cos\frac{2\pi}{n} - \sin\frac{2\pi k}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\right)\\
&= g_n(0)\cos\frac{2\pi}{n} - f_n(0)\sin\frac{2\pi}{n}
\end{aligned}$$

ここから、$f_n(0) = 0$, および $\cos(2\pi/n) \neq 1$ $(n \geq 2)$ であることを用いれば $g_n(0) = 0$ が得られる。

あるいは、$f_n(0)$ の方も $g_n(0)$ と同様に変形して

$$f_n(0) = f_n(0)\cos\frac{2\pi}{n} + g_n(0)\sin\frac{2\pi}{n}$$

の式を導き出し、

$$\begin{cases}
g_n(0)\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right) + f_n(0)\sin\dfrac{2\pi}{n} &= 0,\\
g_n(0)\sin\dfrac{2\pi}{n} - f_n(0)\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right) &= 0
\end{cases}$$

の連立方程式を解いて $f_n(0)=g_n(0)=0$ を導く、という手もある。

なお、より一般に sin, cos に等差数列を代入したものの和も、次のように簡単な式で表すことができる ($d\neq 1$)。

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(a+(k-1)d) = \frac{1}{2\sin(d/2)}\left\{\cos\left(a-\frac{d}{2}\right)-\cos\left(a-\frac{d}{2}+nd\right)\right\} \tag{14}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(a+(k-1)d) = \frac{1}{2\sin(d/2)}\left\{\sin\left(a-\frac{d}{2}+nd\right)-\sin\left(a-\frac{d}{2}\right)\right\} \tag{15}$$

これらも、積和の公式より、以下のようにして容易に得られる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\sin(a+(k-1)d) = \frac{1}{\sin(d/2)}\sum_{k=1}^{n}\sin(a+(k-1)d)\sin\frac{d}{2}\\
&\quad = \frac{1}{2\sin(d/2)}\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left(a-\frac{d}{2}+(k-1)d\right)-\cos\left(a-\frac{d}{2}+kd\right)\right\}\\
&\quad = \frac{1}{2\sin(d/2)}\left\{\cos\left(a-\frac{d}{2}\right)-\cos\left(a-\frac{d}{2}+nd\right)\right\},\\
&\sum_{k=1}^{n}\cos(a+(k-1)d) = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(a+\frac{\pi}{2}+(k-1)d\right)\\
&\quad = \frac{1}{2\sin(d/2)}\left\{\cos\left(a+\frac{\pi}{2}-\frac{d}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{\pi}{2}-\frac{d}{2}+nd\right)\right\},\\
&\quad = \frac{1}{2\sin(d/2)}\left\{\sin\left(a-\frac{d}{2}+nd\right)-\sin\left(a-\frac{d}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

よって、(8) を (14), (15) を用いて示すこともできるし、あるいはこの証明と同じ積和の公式を利用する方法で示すこともできる。

4 オイラーの公式を用いない積の公式の証明

次は、(10), (11) の積の公式の証明について考える。本節では、まず、オイラーの公式を用いない証明法を検討する。

(10) と (11) は、一方を示せば、他方はその x の代わりに $x\pm\pi/2$ を代入すれば得られるので、まずは積和の計算が楽そうな (11) の方を考える。すなわち、

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\},$$

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma &= \frac{1}{4}\{\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)\\ &\quad +\cos(\alpha-\beta-\gamma)\}\end{aligned}$$

のように、和だけでかつ cos だけで変形ができ、よって一般に

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\alpha_j = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{\epsilon_j}\cos(\alpha_1+\epsilon_2\alpha_2+\cdots+\epsilon_n\alpha_n)$$

と書けることが容易にわかるからである。ここで、$\epsilon_j=\pm1$ であり、$\sum_{\epsilon_j}$ は、ϵ_j の値のすべての組み合わせに対する 2^{n-1} 項の和である。対称性を高めるために、これはさらに

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\alpha_j = \frac{1}{2^{n}}\sum_{\epsilon_j}\cos(\epsilon_1\alpha_1+\epsilon_2\alpha_2+\cdots+\epsilon_n\alpha_n) \tag{16}$$

と書き換えることもできる (2^n 項の和)。

(11) の左辺を $G_n(x)$ と書くことにすると、(16) により

$$\begin{aligned}G_n(x) &= \prod_{k=1}^{n}\cos\left(x+\frac{2\pi}{n}k\right)\\ &= \frac{1}{2^n}\left[\cos\left(nx+\frac{2\pi}{n}(0+1+\cdots+(n-1))\right)\right.\\ &\quad +\{\cos((n-2)x+\alpha)\text{ の形の項の和 }\}\\ &\quad +\{\cos((n-4)x+\alpha)\text{ の形の項の和 }\}+\cdots\\ &\quad \left.+\cos\left(-nx-\frac{2\pi}{n}(0+1+\cdots+(n-1))\right)\right]\end{aligned}$$

のような積のない形に変形できることがわかる。これを、cos の中に含まれる $(n-2k)x$ 毎に分類すると、$0<k<n/2$ に対する $\cos((n-2k)x+\alpha)$ の形の和は消えるはずなので、当初それは丁度 (8) の形、あるいはその定数倍になっているのではないかと期待していた。実際、例えば $n=5$ の場合、$G_5(x)$ には

$\cos(5x+\alpha)$ (1 項)、$\cos(3x+\alpha)$ (5 項)、$\cos(x+\alpha)$ (10 項)、
$\cos(-x+\alpha)$ (10 項)、$\cos(-3x+\alpha)$ (10 項)、$\cos(-5x+\alpha)$ (1 項)

の形の項が現れるが、$\cos(3x+\alpha)$ の項は、

$$\cos\left(3x+\frac{2\pi}{5}\times10\right)+\cos\left(3x+\frac{2\pi}{5}\times8\right)+\cos\left(3x+\frac{2\pi}{5}\times6\right)$$

$$\begin{aligned}
& +\cos\left(3x+\frac{2\pi}{5}\times 4\right)+\cos\left(3x+\frac{2\pi}{5}\times 2\right) \\
= \ & \cos 3x+\cos\left(3x+\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(3x+\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(3x+\frac{8\pi}{5}\right) \\
& +\cos\left(3x+\frac{4\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

となり、確かに (8) により 0 になるし、$\cos(x+\alpha)$ の形の項も、項数は 2 倍になるが、(8) の形の項が 2 つずつでるのでやはり 0 になる。

なお、$\cos(-x+\alpha)$ の形の項は $\cos(x+\alpha)$ の形の項と全く同じ和になり、$-3x$, $-5x$ も同様である。

しかし、すべての n に対してこうはならず、n によっては、$\cos((n-2k)x+2j\pi/n)$ の項が、j に対して均等に現れない場合もあることがわかった。例えば $n=8,9$ でそうなるが、$n=9$, $k=3$ $(\cos(3x+\alpha))$ のときは、項数は全部で ${}_9C_3=84$ 個あり、$j=1,2,4,5,7,8$ に対するものが 9 個ずつ、$j=0,3,6$ に対するものは 10 個ずつあって j に関して同数にはならない。ただし、それによって確かにその和は

$$9\times g_9(3x)+(10-9)\times g_3(3x)$$

となるので、やはり 0 になるのではあるが、個数が j に関して均等ではないとなると、その証明は難しいと思われるので、すべての n に対して (16) を用いて (11) を証明することは断念した。

しかし上の例から、このような不均衡は n が合成数のために起きていることが予想されたので、次に考えたのは、まず奇素数の n に対して、(16) を用いて (11) を証明することである。この場合は $n=9$ の場合などとは違い、$\cos((n-2k)x+2j\pi/n)$ の項が j に対して均等に現れることを示すことができるので (が、あまり易しくはない)、n が奇素数の場合は確かに (11) が成り立つことを示すことができる。しかもこの場合は n が奇数なので右辺は一つの $\cos$ のみになる:

$$\prod_{k=0}^{n-1}\cos\left(x+\frac{2\pi}{n}k\right)=\frac{\cos nx}{2^{n-1}}=\frac{\cos nx}{(-2)^{n-1}} \tag{17}$$

次に一般の n の場合は、n が奇素数 p を因数に持てば、$G_n(x)$ を

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \prod_{k=0}^{pq-1}\cos\left(x+\frac{2\pi}{pq}k\right) \\
&= \prod_{k=0}^{p-1}\cos\left(x+\frac{2\pi}{p}k\right)\times\prod_{k=0}^{p-1}\cos\left(x+\frac{2\pi}{p}k+\frac{2\pi}{n}\right)\times\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times\prod_{k=0}^{p-1}\cos\left(x+\frac{2\pi}{p}k+\frac{2\pi}{n}(q-1)\right)\\
= \ & G_p(x)G_p\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\times\cdots\times G_p\left(x+\frac{2\pi}{n}(q-1)\right)
\end{aligned}$$

のように、p おきの角のグループに分けて考えると、(17) により

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \frac{\cos px}{(-2)^{p-1}}\cdot\frac{\cos p(x+2\pi/n)}{(-2)^{p-1}}\cdots\frac{\cos p(x+2\pi(q-1)/n)}{(-2)^{p-1}}\\
&= \frac{1}{(-2)^{pq-q}}\prod_{k=0}^{q-1}\cos\left(px+\frac{2\pi}{q}k\right)=\frac{1}{(-2)^{n-q}}G_q(px) \qquad (18)
\end{aligned}$$

と直すことができ、G_q に帰着させることができる。このようにして、n のすべての奇素数の素因数に対して同じことを行えば、最後には奇素数 q に対する G_q か、$q=2^m$ の形に対する G_q が残ることになり、前者の場合には (17) によって (11) が示されることになる。

よってあとは $q=2^m$ の場合であるが、この場合は、まず $n=2^m$ に対して (10) が成り立つことを示し、そこから $n=2^m$ に対して (11) が成り立つことを示して、それを用いればよい。

今、(10) の左辺を $F_n(x)$ とすると、$n=4j$ に対して $F_{4j}(x)$ を $\pi/2$ 毎に 4 つに分けて考えると、倍角の公式により、

$$\begin{aligned}
F_{4j}(x) &= \prod_{k=0}^{4j-1}\sin\left(x+\frac{2\pi}{4j}k\right)\\
&= \prod_{k=0}^{j-1}\left\{\sin\left(x+\frac{2k\pi}{4j}\right)\sin\left(x+\frac{2k\pi}{4j}+\frac{\pi}{2}\right)\right.\\
&\qquad \left.\times\sin\left(x+\frac{2k\pi}{4j}+\pi\right)\sin\left(x+\frac{2k\pi}{4j}+\frac{3\pi}{2}\right)\right\}\\
&= \prod_{k=0}^{j-1}\left\{\sin\left(x+\frac{2k\pi}{4j}\right)\cos\left(x+\frac{2k\pi}{4j}\right)\right.\\
&\qquad \left.\times\sin\left(x+\frac{2k\pi}{4j}+\pi\right)\cos\left(x+\frac{2k\pi}{4j}+\pi\right)\right\}\\
&= \frac{1}{4^j}\prod_{k=0}^{j-1}\left\{\sin\left(2x+\frac{4k\pi}{4j}\right)\sin\left(2x+\frac{4k\pi}{4j}+2\pi\right)\right\}\\
&= \frac{(-1)^j}{4^j}\prod_{k=0}^{j-1}\left\{\sin\left(2x+\frac{4k\pi}{4j}\right)\sin\left(2x+\frac{4k\pi}{4j}+\pi\right)\right\}\\
&= \frac{1}{(-4)^j}F_{2j}(2x)
\end{aligned}$$

と変形できるので、これを繰り返せば、$n = 2^m$ $(m \geq 2)$ に対して

$$\begin{aligned} F_{2^m}(x) &= \frac{1}{(-4)^{2^{m-2}}} F_{2^{m-1}}(2x) = \frac{1}{(-4)^{2^{m-2}} \cdot (-4)^{2^{m-3}}} F_{2^{m-2}}(2^2 x) = \cdots \\ &= \frac{1}{(-4)^L} F_2(2^{m-2} x) \end{aligned}$$

とできる。ここで、L は

$$L = 2^{m-2} + 2^{m-3} + \cdots + 1 = 2^{m-1} - 1 = \frac{n}{2} - 1$$

なので $(-4)^L = -2^{n-2}$ だから、

$$F_n(x) = F_{2^m}(x) = \frac{-1}{2^{n-2}} F_2\left(\frac{n}{2} x\right)$$

となる $(m \geq 2)$。ここで、

$$F_2(x) = \sin x \sin(x + \pi) = -\sin^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x - 1)$$

なので、$n = 2^m$ $(m \geq 1)$ に対して、

$$F_n(x) = F_{2^m}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\cos 2x - 1) & (n = 2 \text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2^{n-1}}(1 - \cos nx) & (n \geq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。よって、$n = 2^m \geq 4$ のときは

$$\begin{aligned} G_n(x) &= G_{2^m}(x) = F_{2^m}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{1 - \cos\left(nx + \frac{n\pi}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}(1 - \cos nx), \end{aligned}$$

$n = 2$ のときは

$$G_2(x) = -\cos^2 x = -\frac{1 + \cos 2x}{2}$$

となるので、よっていずれも

$$G_n(x) = G_{2^m}(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos nx\right)$$

と書けて、これにより $n = 2^m$ の場合も (11) が成り立つことがわかる。そして、これと (18) を組み合わせれば、すべての自然数 n に対して (11) が成り立つことが示される。

あとは、奇素数に対して (11) が成り立つこと、すなわち積を和の形に直したときに、$\cos((n-2k)x + 2\pi j/n)$ の項が j に対して均等に現れることを示すことであるが、n が素数であることを使えば一応それを示すことは可能ではあるが、議論がかなり煩雑になる (ので、ここでは紹介しない)。

それに、ここまでの流れもかなり大変で、この方向、すなわち cos, sin だけを使い、積和の公式などを用いて示す方法はかなり難しいことがわかる (が、単に私が易しい方法を思いつかないだけかもしれない)。

5 オイラーの公式を用いた積の公式の証明

[2] では、オイラーの公式を用いた考察もしているが、その方法を用いれば (10), (11) は、前節の方法よりはかなり易しく示すことができる。本節ではその証明を紹介する。

そしてついでに (12), (13) も同じ方法で証明するが、多分 [2] で触れている (12) の証明 (証明自体は書かれていない) も同様の方法を用いるのだろうと思う。

なお、この方法の場合は、前節で扱った (11) よりも (10) の方が取り扱いは易しいので、こちらを考えることにする。オイラーの公式を用いて sin を指数関数で表せば、

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x + \frac{2\pi}{n}k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{e^{i(x+2\pi k/n)} - e^{-i(x+2\pi k/n)}}{2i} \\ &= \left(\frac{1}{2i}\right)^n e^{-i\{nx+2\pi(0+1+\cdots+(n-1))/n\}} \times \prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i(x+2\pi k/n)} - 1\right) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、$\prod$ の前の部分は、

$$\begin{aligned} & 2^{-n}i^{-n}e^{-i\{nx+(2\pi/n)\cdot n(n-1)/2\}} = 2^{-n}(-i)^n e^{-inx}e^{-i(n-1)\pi} \\ &= 2^{-n}(-i)^n e^{-inx}(-1)^{n-1} = -2^{-n}i^n e^{-inx} = -2^{-n}e^{-inx}e^{in\pi/2} \end{aligned}$$

であり、また $\prod$ の部分は、

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i(x+2\pi k/n)}-1\right)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-e^{i(x+2\pi k/n)}\right)\left(-1-e^{i(x+2\pi k/n)}\right) \tag{19}$$

と変形できるが、$e^{i(x+2\pi k/n)}$ は、y に関する n 次方程式 $y^n=e^{inx}$ の n 個の解であるから、代数学の基本定理により恒等式

$$y^n-e^{inx}=\prod_{k=0}^{n-1}\left(y-e^{i(x+2\pi k/n)}\right) \tag{20}$$

が成り立つはずである。これを用いれば、(19) は、(20) に $y=1$ を代入したものと $y=-1$ を代入したものの積なので、これらを合わせると $F_n(x)$ は

$$F_n(x)=-2^{-n}e^{-inx}e^{in\pi/2}(1-e^{inx})\left((-1)^n-e^{inx}\right)$$

と書けることになる。ここで、$(-1)^n=e^{-in\pi}$ とすると、

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= -2^{-n}e^{in\pi/2}(e^{-inx}-1)(e^{-in\pi}-e^{inx})\\
&= -2^{-n}e^{in\pi/2}(e^{-in(x+\pi)}-1-e^{-in\pi}+e^{inx})\\
&= -2^{-n}(e^{-in(x+\pi/2)}+e^{in(x+\pi/2)}-e^{in\pi/2}-e^{-in\pi/2})\\
&= -2^{1-n}\left\{\cos n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\frac{n\pi}{2}\right\}\\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\} \qquad (21)
\end{aligned}$$

となることがわかる。

ここで、n が奇数なら $\cos(n\pi/2)=0$ なので $\cos(n\pi/2)=(-1)^n\cos(n\pi/2)$ であるし、また加法定理により、

$$\begin{aligned}
\cos n\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+n\pi\right) = \cos n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos n\pi-0\\
&= (-1)^n\cos n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

となるので、よって (21) は、

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\left\{\cos\frac{n\pi}{2}-\cos n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{(-2)^{n-1}}\left\{\cos n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\frac{n\pi}{2}\right\}
\end{aligned}$$

と書き直すことができ、これで (10) が示されたことになる。

$F_n(x+\pi/2)=G_n(x)$ であるから、(11) は (10) に $x+\pi/2$ を代入すれば得られる。

(12) は、(10) から得られなくもないが ($F_{2n}(x)$ を用いればよい)、ここでは $F_n(x)$ と同様の手法で直接示すことにする。(12) の左辺を $\hat{F}_n(x)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\hat{F}_n(x) &= \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) \;=\; \prod_{k=0}^{n-1}\frac{e^{i(x+k\pi/n)}-e^{-i(x+k\pi/n)}}{2i}\\
&= \left(\frac{1}{2i}\right)^n e^{-i\{nx+\pi(0+1+\cdots+(n-1))/n\}}\times\prod_{k=0}^{n-1}\left(e^{i(2x+2k\pi/n)}-1\right)\\
&= 2^{-n}(-i)^n e^{-inx}e^{-i(n-1)\pi/2}(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-e^{i(2x+2k\pi/n)}\right)
\end{aligned}$$

となるが、(20) の x を $2x$ としたものに $y=1$ を代入すれば、

$$\begin{aligned}
\hat{F}_n(x) &= 2^{-n}(-i)^n e^{-inx}e^{-i(n-1)\pi/2}(-1)^n(1-e^{2inx})\\
&= 2^{-n}e^{in\pi/2}e^{-i(n-1)\pi/2}(e^{-inx}-e^{inx}) \;=\; 2^{-n}e^{i\pi/2}(e^{-inx}-e^{inx})\\
&= 2^{-n}i(-2i\sin nx) \;=\; 2^{1-n}\sin nx
\end{aligned}$$

となり、(12) が得られる。さらにこの式で x を $x+\pi/2$ とすれば (13) が得られる。

6 最後に

本稿では、(1) に関連して、sin, cos の 2π の等分角に対する和や積に関する公式などを紹介した。これらが一応元の質問に対する回答になるかと思う。

なお、I_0 と似ているが、I_0 を cos に変えた

$$J_0=\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$$

の方は、倍角の公式の繰り返しによって容易に、

$$\begin{aligned}
J_0 &= \frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} \;=\; \frac{\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}\\
&= \frac{\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} \;=\; \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} \;=\; \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} \;=\; \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

と変形できるので、元の質問者はこれと似た方法、あるいは同程度の易しい回答を期待していたかもしれないが、そうだとすると、I_0 はそれとはだいぶ構造は違うため、かなり難しい話になってしまったので、これは期待通りでの回答ではなかったかもしれない。

ただ、この問題に関連して、私も色々な公式を見ることができたし、質問者にも元の問題の背景にある一般的な数学的構造が多少でも見えてくれれば、それでよいのではないかと思う。さらに、これらが何かの参考になれば幸いである。

参考文献

[1] Wikipedia:「三角関数の公式一覧」
https://ja.wikipedia.org/wiki/三角関数の公式一覧

[2] 冨田一志「三角関数についての役に立たない公式」(その 1、その 2)、数研通信 34 号、35 号 (数研出版)、
https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin/stusin_backnum.html

[3] 大槻義彦監修、室谷義昭訳「新数学公式集 I 初等関数」(丸善)

[4] 森口、宇田川、一松「岩波 数学公式 III 級数・フーリエ解析」(岩波書店)