2022 年 01 月 11 日

半ベッセル関数について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、ν 次のベッセル関数 $J_\nu(x)$, ノイマン関数 $N_\nu(x)$ ($Y_\nu(x)$ とも書かれる) の、$\nu=n+1/2$ (n: 自然数) の場合の半奇数次ベッセル関数の計算法などを考察する。[2] (§39) によれば、「半ベッセル関数」と呼ぶこともあるらしい。

半ベッセル関数は、$\sin x$, $\cos x$ で表せることが知られている少し特別なものだが、ヘルムホルツ方程式とも関係し、比較的よく現れるもののようでもある。私もホーン方程式に対する解として初めて扱った ([3])。

半ベッセル関数を $\sin x$, $\cos x$ で表す公式やいくつかの具体的な式は、数学辞典 [1] や公式集 [2] などで紹介されているが、本稿ではその具体的な式を導くのに多少便利な漸化式を紹介したいと思う。

2 公式

まず、一般のベッセル関数 $J_\nu(x)$、ノイマン関数 $N_\nu(x)$ について、次の漸化式が成り立つことがよく知られている (例えば [2] §38)。

$$J_{\nu+1}(x)+J_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x),\quad N_{\nu+1}(x)+N_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}N_\nu(x) \tag{1}$$

また [2] によれば (§39)、半ベッセル関数は以下のように表されるようである。

$$\begin{aligned} J_{n+1/2}(x) &= (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,x^{n+1}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{\sin x}{x},\\ N_{n+1/2}(x) &= (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,x^{n+1}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{\cos x}{x} \end{aligned} \tag{2}$$

この公式 (2) がを使えば、とりあえずすべての半ベッセル関数を $\sin x$, $\cos x$ で表すことができるが、(2) は商の関数の n 階微分、しかも $1/x$ が微分の度にかけ算されるという公式なので、大きい n に対する計算はかなり手間がかかる。

実際、これを用いて、最初の 3 つの微分の部分を計算してみると以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{1/2}(x) &= \frac{\sin x}{x} \\
\frac{-1}{x^2}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{3/2}(x) &= \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\frac{\sin x}{x} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \\
\frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}J_{5/2}(x) &= \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\frac{\sin x}{x} \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\right) = \frac{1}{x}\left(x^{-2}\cos x - x^{-3}\sin x\right)' \\
&= \frac{1}{x}\left(-2x^{-3}\cos x - x^{-2}\sin x + 3x^{-4}\sin x - x^{-3}\cos x\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(-3x^{-3}\cos x + (3x^{-4} - x^{-2})\sin x\right) \\
&= \frac{-(x^2-3)\sin x - 3x\cos x}{x^5} \\
\frac{-1}{x}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}N_{1/2}(x) &= \frac{\cos x}{x} \\
\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}N_{3/2}(x) &= \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\frac{\cos x}{x} = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^3} \\
\frac{-1}{x^3}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}N_{5/2}(x) &= \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^2\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\frac{\cos x}{x} \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{-x\sin x - \cos x}{x^3}\right) = -\frac{1}{x}\left(x^{-2}\sin x + x^{-3}\cos x\right)' \\
&= -\frac{1}{x}(-2x^{-3}\sin x + x^{-2}\cos x - 3x^{-4}\cos x - x^{-3}\sin x) \\
&= -\frac{1}{x}(-3x^{-3}\sin x + (x^{-2} - 3x^{-4})\cos x) \\
&= \frac{3x\sin x - (x^2-3)\cos x}{x^5}
\end{aligned}
$$

このうち、それぞれ 3 つ目の $J_{5/2}, N_{5/2}$ は、公式 (2) で計算するよりも、むしろ漸化式 (1) と 1/2, 3/2 次の関数を使って計算する方が、微分の計算なしに代数計算だけで済む分易しい。

(2) の公式でも上の計算のように、ひとつ前の計算を利用して次の次数が計算できるが、やはり微分の計算は必要なので、漸化式 (1) の代数計算に比べれば多少面倒である。

3 一般形と予想

2 節の計算結果、および (1) から、$J_{n+1/2}, N_{n+1/2}$ は、いずれも

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{f(x)\sin x + g(x)\cos x}{x^n}$$

で f, g は多項式の形になることがわかる。よってあとはこの f, g の部分を求めればよいことになる。

2 節の結果から、$J_{n+1/2}$ に対する f, g ($\sin x, \cos x$ の係数) は、$N_{n+1/2}$ に対する g, f ($\cos x, \sin x$ の係数) と符号の違い程度であることが予想でき、また、f と g の次数は一つ違っていて、その次数の高い方も、n の増加に対して入れ替わると予想される。よって、

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\frac{\phi_n(x)}{x^n}\sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\psi_n(x)}{x^n}\cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right\} \tag{3}$$

と置いて考えていく。$\phi_n(x)$ が次数の高い (と予想される) 方である。

$$\boldsymbol{v}_n = \left(\sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right),\ \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right), \quad \boldsymbol{\alpha}_n = (\phi_n(x), \psi_n(x))$$

とすると、

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\frac{\boldsymbol{\alpha}_n \cdot \boldsymbol{v}_n}{x^n}$$

と書け、$\boldsymbol{v}_n$ の最初の 4 つは

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_0 = (\sin x, \cos x), &&\boldsymbol{v}_1 = (-\cos x, \sin x), \\ &\boldsymbol{v}_2 = (-\sin x, -\cos x), &&\boldsymbol{v}_3 = (\cos x, -\sin x) \end{aligned}$$

で、あとはこの繰り返しとなる。ここから、$\boldsymbol{\alpha}_n$ の最初の 3 つを見てみると、2 節の計算より、

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = (1, 0), \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = (x, 1), \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = (x^2 - 3, 3x) \tag{4}$$

となることがわかる。

一方、$N_{n+1/2}$ の x^n の分子の $f(x)\sin x + g(x)\cos x$ の部分は、丁度

$$\begin{aligned}
-\cos x &= (1,0)\cdot(-\cos x, \sin x) = \boldsymbol{\alpha}_0\cdot\boldsymbol{v}_1,\\
-x\sin x - \cos x &= (x,1)\cdot(-\sin x, -\cos x) = \boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{v}_2,\\
-3x\sin x + (x^2-3)\cos x &= (x^2-3, 3x)\cdot(\cos x, -\sin x) = \boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{v}_3
\end{aligned}$$

となっているので、

$$\begin{aligned}
N_{n+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\boldsymbol{v}_{n+1}}{x^n}\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\frac{\phi_n(x)}{x^n}\sin\left(x-\frac{n+1}{2}\pi\right)+\frac{\psi_n(x)}{x^n}\cos\left(x-\frac{n+1}{2}\pi\right)\right\} \qquad (5)
\end{aligned}$$

となることが予想される。

ここまでをまとめて、今後以下のことを示すことにする。

1. $\phi_n(x)$ は n 次式、$\psi_n(x)$ は $(n-1)$ 次式 ($n \geq 1$ のとき)
2. n が奇数の場合は ϕ_n は奇関数、ψ_n は偶関数で、n が偶数の場合は ϕ_n は偶関数、ψ_n は奇関数
3. ϕ_n と ψ_n に関する微分のない漸化式を得ること
4. (5) が成り立つこと

4 漸化式

3 節最後の 1.～4. のうち、多分 3. の漸化式ができれば、あとのものは帰納法で示されるので、まずは漸化式を求める。それには、(3) に (1) を適用すればよい。$n \geq 2$ に対して、(1) に (3) を代入すると、

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\boldsymbol{v}_n}{x^n} = \frac{2n-1}{x}\,\frac{\boldsymbol{\alpha}_{n-1}\cdot\boldsymbol{v}_{n-1}}{x^{n-1}} - \frac{\boldsymbol{\alpha}_{n-2}\cdot\boldsymbol{v}_{n-2}}{x^{n-2}}$$

となるが、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_{n-1} &= \left(\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right),\ \cos\left(x-\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\
&= \left(\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right),\ -\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{n-2} &= \left(\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}+\pi\right),\ \cos\left(x-\frac{n\pi}{2}+\pi\right)\right)\\ &= \left(-\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right),\ -\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right) = -\boldsymbol{v}_n\end{aligned}$$

となるので、

$$\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\boldsymbol{v}_n = (2n-1)(-\psi_{n-1},\phi_{n-1})\cdot\boldsymbol{v}_n + x^2(\phi_{n-2},\psi_{n-2})\cdot\boldsymbol{v}_n$$

より、ϕ_n, ψ_n に対する漸化式は、

$$\begin{cases}\phi_n(x) &= -(2n-1)\psi_{n-1}(x) + x^2\phi_{n-2}(x)\\ \psi_n(x) &= (2n-1)\phi_{n-1}(x) + x^2\psi_{n-2}(x)\end{cases}\quad (n\geq 2) \tag{6}$$

となる。この漸化式と (4) により、すべての ϕ_n, ψ_n が確定する。

次は、この漸化式を用いて、3 節最後の 1., 2., 4. を示していこう。

まずは 1. の次数であるが、$n=0,1,2$ では成立している。(6) から、ϕ_n の方 (1 本目) は、帰納法で考えれば右辺は $(n-2)$ 次式と $n-2+2=n$ 次式の和になるので、確実に n 次式となるが、問題は ψ_n の方 (2 本目) で、これは右辺が $(n-1)$ 式と $(n-1)$ 次式の和なので、最高次の係数が 0 でないことをちゃんと示す必要がある。

よって、1. をさらに詳しく、

> ϕ_n は、x^n の係数が a_n である高々 n 次式、ψ_n は、x^{n-1} の係数が b_n である高々 $(n-1)$ 次式 $(n\geq 1)$

として、この係数 a_n, b_n が 0 にならないことを示す。

漸化式 (6) より、a_n, b_n については、以下の漸化式が成り立つことがわかる。

$$a_n = a_{n-2},\quad b_n = (2n-1)a_{n-1} + b_{n-2}\quad (n\geq 2) \tag{7}$$

ただし、便宜的に b_0 は $b_0=0$ とするが、こうすれば、(7) はすべての $n\geq 2$ に対して成立する。

(4) により、$a_0=1, a_1=1$ なので、$a_n=1$ がすべての $n\geq 0$ に対して成り立つ。b_n は、n が偶数、奇数で分けると $b_0=0, b_1=1$ より、

$$b_{2n} = (4n-1) + b_{2n-2} = (4n-1) + (4n-5) + b_{2n-3} = \ldots$$

$$\begin{aligned}
&= (4n-1)+(4n-5)+\cdots+3+b_0 \ = \ \frac{n(4n-1+3)}{2} \ = \ n(2n+1), \\
b_{2n-1} &= (4n-3)+b_{2n-3} \ = \ (4n-3)+(4n-7)+b_{2n-5} \ = \ \ldots \\
&= (4n-3)+(4n-7)+\cdots+5+b_1 \ = \ \frac{n(4n-3+1)}{2} \ = \ n(2n-1)
\end{aligned}$$

となり、結局、両方をまとめて

$$b_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

と書ける。これにより、$n \geq 1$ では $b_n \neq 0$ が保証され、よってこれで 1. が示されたことになる。

奇関数、偶関数の関係 2. は、(6) と帰納法で容易に示すことができるので、説明は省略する。

最後に、4. の、ノイマン関数に対する (5) を示す。

$n = 0, 1, 2$ に対しては、(5) は成り立っているから、あとは帰納法を用いる。すなわち、(5) が $n = k-1$ まで成り立っているとする ($k \geq 2$) と、$n = k$ に対しては、漸化式 (1) より、

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,N_{k+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,\frac{2k-1}{x}N_{k-1/2}(x) - \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,N_{k-3/2}(x) \\
&= \frac{2k-1}{x}\,\frac{\boldsymbol{\alpha}_{k-1}\cdot\boldsymbol{v}_k}{x^{k-1}} - \frac{\boldsymbol{\alpha}_{k-2}\cdot\boldsymbol{v}_{k-1}}{x^{k-2}}
\end{aligned}$$

であり、前と同様にして

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_k &= \left(\cos\left(x - \frac{k+1}{2}\pi\right),\ -\sin\left(x - \frac{k+1}{2}\pi\right)\right), \\
\boldsymbol{v}_{k-1} &= \left(-\sin\left(x - \frac{k+1}{2}\pi\right),\ -\cos\left(x - \frac{k+1}{2}\pi\right)\right) \ = \ -\boldsymbol{v}_{k+1}
\end{aligned}$$

なので、(6) より、

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,N_{k+1/2}(x) &= \frac{2k-1}{x}\,\frac{(-\psi_{k-1},\phi_{k-1})\cdot\boldsymbol{v}_{k+1}}{x^{k-1}} + \frac{(\phi_{k-2},\psi_{k-2})\cdot\boldsymbol{v}_{k+1}}{x^{k-2}} \\
&= \frac{(-(2k-1)\psi_{k-1}+x^2\phi_{k-2},\ (2k-1)\phi_{k-1}+x^2\psi_{k-2})\cdot\boldsymbol{v}_{k+1}}{x^k} \\
&= \frac{(\phi_k,\psi_k)\cdot\boldsymbol{v}_{k+1}}{x^k}
\end{aligned}$$

となることが $k \geq 2$ に対して言えるので、帰納法により (5) がすべての $k \geq 0$ に対して示されたことになる。

5 複素形

(3), (5) の $J_{n+1/2}(x)$, $N_{n+1/2}(x)$ の式、および ϕ_n, ψ_n の漸化式 (6) は複素数を使うと多少簡単な式にまとめることもできる。本節でそれを紹介する。

$$\xi_n(x)=\phi_n(x)+i\psi_n(x),\quad M_\nu(x)=J_\nu(x)+iN_\nu(x)$$

とすると、(3), (5) より、

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,x^n M_{n+1/2}(x)\\
&= \phi_n(x)\left\{\sin\left(x-\frac{n}{2}\pi\right)+i\sin\left(x-\frac{n+1}{2}\pi\right)\right\}\\
&\quad +\psi_n(x)\left\{\cos\left(x-\frac{n}{2}\pi\right)+i\cos\left(x-\frac{n+1}{2}\pi\right)\right\}\\
&= \phi_n(x)\left\{\cos\left(x-\frac{n+1}{2}\pi\right)+i\sin\left(x-\frac{n+1}{2}\pi\right)\right\}\\
&\quad +\psi_n(x)\left\{-\sin\left(x-\frac{n+1}{2}\pi\right)+i\cos\left(x-\frac{n+1}{2}\pi\right)\right\}\\
&= e^{i(x-(n+1)\pi/2)}(\phi_n(x)+i\psi_n(x)) \;=\; e^{ix}(-i)^{n+1}\xi_n(x)
\end{aligned}$$

となるので、

$$M_{n+1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{(-i)^{n+1}}{x^n}\,e^{ix}\xi_n(x) \tag{8}$$

の形に表される。漸化式 (6) の方は、

$$\begin{aligned}
\xi_n(x) &= \phi_n(x)+i\psi_n(x)\\
&= (2n-1)(-\psi_{n-1}(x)+i\phi_{n-1}(x))+x^2(\phi_{n-2}(x)+i\psi_{n-2}(x))
\end{aligned}$$

より、

$$\xi_n(x)=i(2n-1)\xi_{n-1}(x)+x^2\xi_{n-2}(x)\quad(n\geq 2) \tag{9}$$

となることがわかる。(4) より $\xi_0(x)=1$, $\xi_1(x)=x+i$ なので、これで ξ_n が帰納的に計算できることになる。

元々 (2) より、

$$\begin{aligned}
M_{n+1/2}(x) &= (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,x^{n+1}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{\sin x-i\cos x}{x}\\
&= (-1)^{n+1}i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,x^{n+1}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{e^{ix}}{x}
\end{aligned} \tag{10}$$

なので、複素数を使って自然にひとつにまとまる形をしている。容易に、

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\frac{e^{ix}}{x}=\frac{\eta_n(x)}{x^{2n+1}}\,e^{ix}\quad(\eta_n(x)\ \text{は複素数係数の多項式})\tag{11}$$

の形になることがわかるので、(10) より

$$M_{n+1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{(-1)^{n+1}i}{x^n}\,e^{ix}\eta_n(x)$$

となるから、(8) より

$$\eta_n(x)=i^n\xi_n(x)$$

となることがわかる。つまり、η_n を求めることと ξ_n を求めることはほぼ同等である。

ところが、η_n に関する漸化式を (11) から作ろうとすると、η_n に関する微分の関係式になってしまって、計算にはあまり都合はよくない。

6 具体例

最後に (6)、および (9) を用いて、いくつかの ϕ_n,ψ_n と、$J_{n+1/2},N_{n+1/2}$ を計算してみる。

$n=0,1,2$ については既に示してあるので、$n=3$ から。(6) より、

$$\begin{aligned}\phi_3&=x^2\phi_1-5\psi_2=x^3-15x,\\ \psi_3&=x^2\psi_1+5\phi_2=x^2+5(x^2-3)=6x^2-15\end{aligned}$$

となる。これを (9) で計算してみると、

$$\xi_3=x^2\xi_1+5i\xi_2=x^2(x+i)+5i(x^2-3+3ix)=x^3+6ix^2-15x-15i$$

となるが、上の ϕ_3,ψ_3 の計算より易しいわけではなく、複素形の ξ_n で計算することに意味やメリットはほぼない。これらにより、$J_{7/2}(x),N_{7/2}(x)$ は

$$J_{7/2}(x)\ =\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\frac{x^3-15x}{x^3}\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+\frac{6x^2-15}{x^3}\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{(x^2-15)x\cos x-(6x^2-15)\sin x}{x^3},\\
N_{7/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\frac{x^3-15x}{x^3}\sin\left(x-\frac{4\pi}{2}\right)+\frac{6x^2-15}{x^3}\cos\left(x-\frac{4\pi}{2}\right)\right\}\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{(x^2-15)x\sin x+(6x^2-15)\cos x}{x^3}
\end{aligned}
$$

となる。これもついでに複素形の (8) を見てみると、

$$
\begin{aligned}
M_{7/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{(-i)^4}{x^3}\,e^{ix}\xi_3(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{e^{ix}}{x^3}(x^3+6ix^2-15x-15i)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{(x^2-15)x\cos x-(6x^2-15)\sin x}{x^3}\\
&\quad +i\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{(x^2-15)x\sin x+(6x^2-15)\cos x}{x^3}
\end{aligned}
$$

となる。$J_{7/2}$, $N_{7/2}$ より sin, cos の処理が多少易しくはなるが、やはりさほど複素数の式を使うメリットはない。

次は $n=4$。

$$
\begin{aligned}
\phi_4 &= x^2\phi_2-7\psi_3=x^2(x^2-3)-7(6x^2-15)=x^4-45x^2+105,\\
\psi_4 &= x^2\psi_2+7\phi_3=3x^3+7(x^3-15x)=10x^3-105x
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
J_{9/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{(x^4-45x^2+105)\sin x+(10x^2-105)x\cos x}{x^4},\\
N_{9/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{-(x^4-45x^2+105)\cos x+(10x^2-105)x\sin x}{x^4}
\end{aligned}
$$

となる。

$n=5$ も計算すると、

$$
\begin{aligned}
\phi_5 &= x^2\phi_3-9\psi_4=x^2(x^3-15x)-9(10x^3-105x)=x^5-105x^3+945x,\\
\psi_5 &= x^2\psi_3+9\phi_4=x^2(6x^2-15)+9(x^4-45x^2+105)=15x^4-420x^2+945
\end{aligned}
$$

より、

$$
\begin{aligned}
J_{11/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{-(x^4-105x^2+945)x\cos x+(15x^4-420x^2+945)\sin x}{x^5},\\
N_{11/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\frac{-(x^4-105x^2+945)x\sin x-(15x^4-420x^2+945)\cos x}{x^5}
\end{aligned}
$$

となる。いずれも微分計算を必要としないので、(2) よりも (6) による計算の方がだいぶ楽であることがわかるだろう。

なお、[2] §40 には、球ベッセル関数

$$j_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+1/2}(x)=\frac{\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\boldsymbol{v}_n}{x^{n+1}},\quad n_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,N_{n+1/2}(x)=\frac{\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\boldsymbol{v}_{n+1}}{x^{n+1}}$$

の式が、$n=8$ まで紹介されている。

7 最後に

本稿では、半奇数次ベッセル関数とノイマン関数の関係、および微分を用いない漸化式等を紹介した。

高次のものを計算するには本稿の漸化式は便利だと思うが、その高次の半奇数次ベッセル関数がどんな場面で必要なのかはわからないので、本稿の計算が実際にどれくらい有用なのかは不明である。

参考文献

[1] 日本数学会編、「岩波 数学辞典 第 3 版」、岩波書店 (1985)

[2] 森口繁一、宇田川銈久、一松信、「岩波 数学公式 III 特殊函数」、岩波書店 (1987)

[3] 竹野、直管ではない管の自然倍音について、(2022)
`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/`