2017 年 02 月 09 日

レーダーチャートの面積と隣接積の和

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

先日、ふとネット上で「レーダーチャートの面積」という言葉を見かけた。レーダーチャートとは、正多角形の中心から各頂点に結んだ線分を軸とみてその上に各値を取り、それを多角形的に結んだもので、データのどういう要素が強いか弱いかを見やすくしたものである (図 1)。

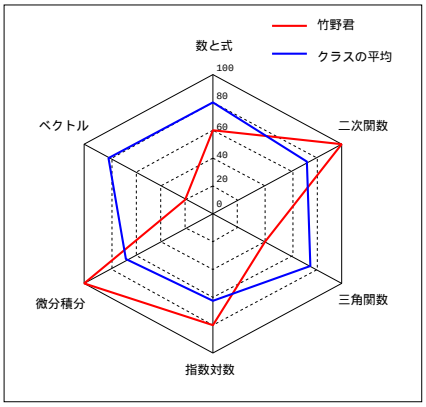

図 1: レーダーチャートの例

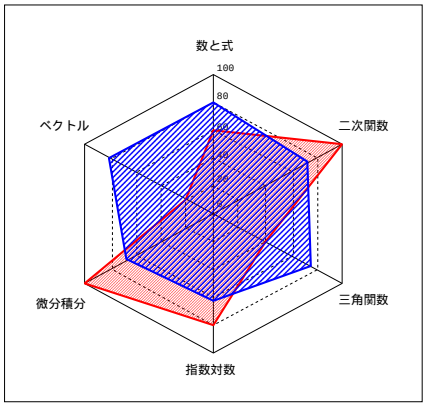

図 2: レーダーチャートの面積

レーダーチャートは、平均値などの標準的な値との比較で用いられることが多いが、比較の大小はあくまで各軸毎に行われ、その「面積」を比較することは、無意識に視覚的に行っていることはあるかもしれないが、定量的に比較することは通常は行われない (図 2)。そのあたりについて少し考えてみる。

2 レーダーチャートの面積

レーダーチャートは、前節でも説明したように、n 個の項目に対する n 個のデータ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ を、正 n 角形の中心から各頂点に向かう線分を軸としてその上に値を取り、隣接する軸上のデータ同士を線分で結んで多角形としたものである (図 1)。

通常は、各項目の平均値などの標準的な多角形と比較することで弱い点や強い点などのデータの性質を見いだしたり、多角形の形などから典型的な状態に分類したりするのに用いられる。

この多角形の面積を見るというのは、多分面積が大きければ総合的に点数がいい、評価が高い、ということを意味し、面積が小さければ点数が悪い、評価が低い、ということを意味すると考える、ということだと思うが、それは正しいだろうか。

実は、レーダーチャートが囲む多角形の面積は、軸のスケールの選び方や軸の位置の選び方で同じデータでも値は変わるし、違う種類の 2 種類のデータでは異なる方向に変化してしまうので、その面積を指標に用いることは一般的にはできない。それらを以下で簡単に説明する。

まずこの多角形の面積を式で表わしてみる。

各軸の最大を意味する場所までの中心からのグラフ上の距離 ($=$ 最も外側の正多角形の外接円の半径) を R とし、k 番目の軸の R の場所が表わす値 (最大値) を M_k とする。k 番目の軸に対するデータ値を p_k とすれば、グラフ上での中心からの p_k までの距離は Rp_k/M_k であり、その点と、隣りの $k-1$ 番目のデータの軸上の点と中心の 3 点が作る三角形の面積は、中心角が $2\pi/n$ より

$$\frac{1}{2}\frac{Rp_{k-1}}{M_{k-1}}\frac{Rp_k}{M_k}\sin\frac{2\pi}{n} \tag{1}$$

となるので、レーダーチャート全体の多角形の面積は、

$$S_0 = \frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{k-1}p_k}{M_{k-1}M_k} \tag{2}$$

となる。ただし、$p_0 = p_n$, $M_0 = M_n$ とする。

(2) の $(R^2/2)\sin(2\pi/n)$ の部分はデータや軸の最大値の取り方にはよらない定数なので、残りの部分のみを考える。

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{p_{k-1}p_k}{M_{k-1}M_k} \tag{3}$$

例えば図 1 の各項目が各教科のテストの点数の場合のように、各軸のデータの種類 (単位) が同じであるときは M_k の値はすべて同じ値と取ることも多い。

$$M_1 = M_2 = \cdots = M_n = M$$

この場合は

$$S_1 = \frac{1}{M^2}\sum_{k=1}^{n}p_{k-1}p_k$$

なので、スケール値 M の値を変えても全体が定数倍されるだけなので、問題は起こらない。しかし例えば各項目が個人の体力データで、ある軸は握力値、ある軸は垂直跳

び、ある軸は背筋力などの場合は、M_k の値は必ずしも共通ではなく、軸毎に単位や最大値 M_k の選び方は変わってくる。

通常は、M_k はデータが R におさまるような大きな値を取るわけであるが、ある j 番目の軸の M_j のみ 2 倍の値に変更すると、(3) の S_1 ではその j 軸の両隣の値との積

$$\frac{p_{j-1}p_j}{M_{j-1}M_j}+\frac{p_jp_{j+1}}{M_jM_{j+1}}=\frac{p_j}{M_j}\left(\frac{p_{j-1}}{M_{j-1}}+\frac{p_{j+1}}{M_{j+1}}\right)$$

の値にのみ影響がでて、その値が半分になる。つまり、$(j-1)$ 番目の軸の値、および $(j+1)$ 番目の軸の値によって、影響が強く出る場合と、影響が弱く出る場合があり、これはすべてのデータで共通に変化せず、データ毎に異なる形で変化が現れる。そして、その影響の出方は、軸の並び方にも強く依存することがわかる。

スケールを変えずに単に軸の並び方を変えるだけでも面積は変化する。例えば極端な例をあげれば、$n=4$ で $p_1=M_1$, $p_2=M_2$, $p_3=p_4=0$ である場合は、レーダーチャートは直角三角形になり $S_1=1/2$ となるが、2 番目の軸と 3 番目の軸を交換すれば、$p_1=M_1$, $p_3=M_3$, $p_2=p_4=0$ となり、これは $S_1=0$ となる。一方、$p_2=M_2$, $p_3=M_3$, $p_1=p_4=0$ というデータに対しては、その軸の交換によって面積は変わらない。

すなわち、レーダーチャートの面積は、軸を並べかえるだけで変わってしまい、それもデータによって影響の出方には違いがある。このようにレーダーチャートの面積には不変性がなく、一般的には指標に用いるのは問題がある。

逆に、レーダーチャートの面積を指標として使えば、恣意的にあるデータを良く見せ、あるデータは悪く見せるために軸の並び方を入れかえ、一方のレーダーチャートの面積が大きく、他方は小さくなるようにする、ということすらできてしまうわけである。

3 隣接積の和の最大最小

では、今度は n 個のデータ $p_k/M_k(\geq 0)$ が与えられたときに、(3) の S_1 の値は、軸の並べかえでどのように変化するか、どのような並びのときに (3) の値は、最大、最小となるのか、といったことを考えてみる。

これは、$a_k\geq 0$ $(k=1,2,\ldots n)$ に対し、$a_0=a_n$ とするとき、

$$S_2=\sum_{k=1}^{n}a_{k-1}a_k$$

の値が、$a_1,\ldots a_n$ の順を並べかえたときに、どのような並びのときに最大、あるいは最小となるか、という問題になる。そのため、この S_2 と、両端の積を排除した

$$S_3=\sum_{k=2}^{n}a_{k-1}a_k=S_2-a_1a_n$$

を考えてみることにする。

ここでは、数列のすべての並びかえを考えるので、元の a_k は

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$$

であるとしてよい。

簡単のため、例えば $n = 3$ の場合を考えてみる。まず S_3 を考える。通常の a_1, a_2, a_3 の並びに対しては、

$$S_3 = S_3^1 = a_1a_2 + a_2a_3 \tag{4}$$

となるが、これを並べかえて a_1, a_3, a_2 とすると、S_3 の値は

$$S_3 = S_3^2 = a_1a_3 + a_3a_2 \tag{5}$$

となり、さらに a_2, a_1, a_3 という並びに対しては、S_3 は

$$S_3 = S_3^3 = a_2a_1 + a_1a_3 \tag{6}$$

となる。a_1, a_2, a_3 の順列の並べかえは全部で $3! = 6$ 通りあるが、並び全体を反転させても S_3 の値は変わらないので、並べかえによる値はこの S_3^1, S_3^2, S_3^3 の 3 通りとなる。例えば、a_3, a_1, a_2 に対する S_3 は確かに

$$S_3 = a_3a_1 + a_1a_2 = S_3^3$$

に等しくなる。この S_3^1, S_3^2, S_3^3 では、

$$S_3^1 - S_3^2 = a_1(a_2 - a_3) \leq 0$$

より $S_3^1 \leq S_3^2$ で、また

$$S_3^1 - S_3^3 = (a_2 - a_1)a_3 \geq 0$$

より $S_3^1 \geq S_3^3$ なので、よって $S_3^3 \leq S_3^1 \leq S_3^2$ であり、a_1, a_3, a_2 (および a_2, a_3, a_1) の並びの場合に S_3 は最大、a_2, a_1, a_3 (および a_3, a_1, a_2) の並びの場合に最小となることがわかる。

一方 S_2 は、a_1, a_2, a_3 に対しては

$$S_2 = S_2^1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$$

となるが、これも反転しても値は変わらないが巡回的、すなわち円順列なので、$n = 3$ の場合は $(3-1)!/2 = 1$ 通り、すなわちこの S_2^1 の 1 種類しかない。

$n = 4$ の場合は、$(4-1)!/2 = 3$ 通りあり、

$$\begin{aligned} S_2^1 &= a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) \\ S_2^2 &= a_1a_2 + a_2a_4 + a_4a_3 + a_3a_1 \quad (a_1, a_2, a_4, a_3) \\ S_2^3 &= a_1a_3 + a_3a_2 + a_2a_4 + a_4a_1 \quad (a_1, a_3, a_2, a_4) \end{aligned}$$

となる。他のものはすべてこのいずれかと同じものになる。例えば、a_4, a_2, a_1, a_3 の場合は、

$$S_2 = a_4a_2 + a_2a_1 + a_1a_3 + a_3a_4 = a_1a_2 + a_2a_4 + a_4a_3 + a_3a_1 = S_2^2$$

となる。これらの大小は、

$$\begin{aligned} S_2^1 - S_2^2 &= a_2a_3 + a_4a_1 - a_2a_4 - a_3a_1 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_4) \le 0, \\ S_2^1 - S_2^3 &= a_1a_2 + a_3a_4 - a_1a_3 - a_2a_4 = (a_1 - a_4)(a_2 - a_3) \ge 0 \end{aligned}$$

より $S_2^3 \le S_2^1 \le S_2^2$ となり、よって a_1, a_3, a_2, a_4 の並びのときに最小、a_1, a_2, a_4, a_3 の並びのときに最大となることがわかる。

なお、上の例では、すべての並べかえに対して S_2, S_3 の大小が $\{a_k\}$ の順序から一意に確定している、すなわち線形順序 (全順序) がついているが、これは常にそうなるわけではない。例えば、$n = 4$ の S_3 では、a_1, a_2, a_3, a_4 の並びに対する

$$S_3 = S_3^1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$$

と、a_1, a_4, a_2, a_3 の並びに対する

$$S_3 = S_3^2 = a_1a_4 + a_4a_2 + a_2a_3$$

を比較すると、

$$S_3^1 - S_3^2 = a_1a_2 + a_3a_4 - (a_1a_4 + a_4a_2) = a_4(a_3 - a_2) - a_1(a_4 - a_2)$$

となるが、これは正の項同士の差で、その正負は $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$ の大小だけでは決定せず、値によって変わりうる。例えば $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 8$, $a_1 < 4$ とすると、

$$S_3^1 - S_3^2 = 8 - 4a_1 = 4(2 - a_1)$$

となるので、S_3^1 と S_3^2 の大小は、a_1 が 2 より大きいか小さいかで変わることになり、$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$ という条件だけでは必ずしも確定しない。このように、すべての並びに必ずしも大小は確定はしないが、しかし最大値、最小値を与える並びはこの後見るように常に確定する。

4 設定、記号等

ここから一般の $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対する考察を行うが、そのためにいくつか仮定や記号等を導入する。

まず、対象とする数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は、

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \tag{7}$$

であると仮定する。この $\{a_k\}_k$ の並べかえ $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ に対して S_2 や S_3 を考えることになる。その並べかえた列や、その部分列を、順番と端を記号的に示して、

$$A = [a'_1\ a'_2\ \cdots\ a'_n], \quad B = [a'_k\ a'_{k+1}\ \cdots\ a'_m]$$

のような記号で表すことにし、さらに、

$$A = [a'_1\ \cdots a'_{k-1}\ B\ a'_{m+1}\ \cdots\ a'_n]$$

のように部分列をその中に入れて書くことも行う。

一つの列の並び $B = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_m]$ を逆順にしたものを $\bar{B}$ と書く:

$$\bar{B} = [b_m\ b_{m-1}\ \cdots\ b_1]$$

$n(B)$ を列 B の要素の個数とする: $n([b_1\ b_2\ \cdots\ b_m]) = m$

$B = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_m]$ $(m \geq 2)$ に対して、隣接積和 $S_3(B)$ と 巡回的隣接積和 $S_2(B)$ を、

$$S_3(B) = \sum_{k=2}^{m} b_{k-1}b_k, \quad S_2(B) = S_3(B) + b_m b_1 \tag{8}$$

と定義する。なお、$m = 0, 1$ の場合は、いずれも 0 であるとする。

S_3, S_2 は反転に関して明らかに不変であることに注意する:

$$S_3(\bar{B}) = S_3(B), \quad S_2(\bar{B}) = S_2(B) \tag{9}$$

目標は、(7) を満たす $\{a_k\}_k$ の並びかえ $A' = [a'_1\ \cdots\ a'_n]$ の中で、$S_3(A')$, $S_2(A')$ を最大、最小にするものを求めること、となる。

5 隣接積和が最大となる並び

まずは S_3, S_2 を最大にする並びの方を考える。

補題 1. x,y を、$x \le y \le a_1$ であるとする。$a_1, a_2, \ldots, a_k$ $(a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k)$ の並べかえ A の左端が a_1 でない場合、$A' = [a_1\ \cdots]$ の形の A の並べかえで、

$$S_3([x\ A\ y]) \le S_3([x\ A'\ y])$$

となるものが存在する。

この補題は、列の両端にその最小のものを配置したような並びのうちの S_3 の最大値を考えた場合、その両端以外の最小要素 a_1 が、列全体の最小要素 x と隣接しないものよりは隣接するものの方が大きくなる (厳密にはそれ以上になる) ことを示していて、よって最大値もそのような形の並びの中にあることになる。

この補題 1 は、反転列を用いて構成的に証明するが、その手法はこの後も用いる。今回は少し丁寧に説明する。

証明

A は a_1 を左端に持たないので、

$$[A\ y] = [B\ a_1\ C]$$

のように書くことができ、この B の左端を p、C の左端を q とする:

$$B = [p\ \cdots], \quad C = [q\ \cdots\ y]$$

仮定より $n(B) \ge 1$ であるが、C は $[y]$ のみの場合もありうる。その場合は $q = y$ と考える。このとき、

$$[x\ A\ y] = [x\ B\ a_1\ C] = \left[x\ \boxed{p\ \cdots}\ a_1\ \boxed{q\ \cdots\ y}\right] \tag{10}$$

となっている。これに対し、A の $[B\ a_1]$ の部分をまとめて逆順にしたものを A' とする。このとき、

$$[x\ A'\ y] = [x\ a_1\ \bar{B}\ C] = \left[x\ a_1\ \boxed{\cdots\ p}\ \boxed{q\ \cdots\ y}\right] \tag{11}$$

となる。これらに対し、$S_3([x\ A\ y])$ と $S_3([x\ A'\ y])$ の値を比較する。

これらの列の違いは、$[B\ a_1] = [p\ \cdots\ a_1]$ の部分が逆転しているところで、その部分に対する S_3 の値と、C の部分に対する S_3 の値は両者で共通である $(S_3([B\ a_1]) = S_3([a_1\ \bar{B}]))$。

よって、$S_3([x\ A\ y])$ と $S_3([x\ A'\ y])$ の違いは、その境界部分だけであり、その項は、$S_3([x\ A\ y])$ の方は (10) より xp (x と A の境界) と a_1q (a_1 と C の境界)、$S_3([x\ A'\ y])$ の方は (11) より xa_1 と pq ($\bar{B}$ と C の境界) となる。よって、

$$S_3([x\ A\ y]) - S_3([x\ A'\ y]) = xp + a_1q - xa_1 - pq = (x - q)(p - a_1) \tag{12}$$

となる。ここで、q は $a_2, \ldots, a_k$ か y のいずれかなので、仮定より $q \geq y \geq x$ であり、また p は $a_2, \ldots, a_k$ のいずれかなので $p \geq a_2 \geq a_1$ である。よって (12) の右辺は 0 以下となり、$S_3([x\ A\ y]) \leq S_3([x\ A'\ y])$ となる。 ∎

これは、例えば

$$S_3\left(\left[1\ \boxed{4\ 5\ 3}\ 2\right]\right) \leq S_3\left(\left[1\ \boxed{3\ 5\ 4}\ 2\right]\right), \quad S_3\left(\left[1\ \boxed{4\ 3}\ 5\ 2\right]\right) \leq S_3\left(\left[1\ \boxed{3\ 4}\ 5\ 2\right]\right)$$

のように、それぞれ左辺に対して S_3 がそれ以上の値となるような並べかえがあることを示している。

この補題 1 を使えば S_3, S_2 の最大値を与える並びを決定することができる。まず S_3 を考える。

$a_1, \ldots, a_n$ の並べかえ A に対し、列 $[0\ A\ 0]$ を考えると、$S_3([0\ A\ 0]) = S_3(A)$ で、$a_1 \geq 0$ より補題 1 を適用でき、$S_3(A) = S_3([0\ A\ 0])$ を最大にするには a_1 は A の左端 (または右端) に置く方が良いことがわかる。

よって $A = [a_1\ A']$ とし、次は列 $[A\ 0] = [a_1\ A'\ 0]$ を考える。

$$S_3(A) = S_3([A\ 0]) = S_3([a_1\ A'\ 0]) = S_3([0\ \bar{A}'\ a_1])$$

と見ると、$0 \leq a_1$ で $\bar{A}'$ の要素はすべて a_1 以上なので、補題 1 よりそれを最大にするには、$\bar{A}'$ の最小要素はその左端 (A' では右端) に置く方がよい。これにより、$A = [a_1\ A''\ a_2]$ となる。

以下同様にして (この後は 0 は追加しなくてよい)、A'' の左端が a_3、右端が a_4、と端からジグザグ順に小さいものを並べるときに大きくなることになり、最終的に S_3 の最大値を与える並びは、

$$A = [a_1\ a_3\ a_5\ \cdots\ a_6\ a_4\ a_2] \tag{13}$$

のようになる。

次は、S_2 を考える。これは巡回的なので、左端は任意の a_j に固定して考えればよいので、それを a_1 とし、$A = [a_1\ A']$ とする。このとき、

$$S_2(A) = S_2([a_1\ A']) = S_3([a_1\ A'\ a_1]) = S_3([a_1\ \bar{A}'\ a_1]) \tag{14}$$

と、$S_2(A)$ を S_3 で表現できる。よって上の S_3 に対する結果により、A' は $a_2, \ldots, a_n$ を右端から (左端からでもよい) 小さい順にジグザグに並べていけばよいことがわかる。A はその左端に a_1 を追加したものだから、結局その A は (13) と同じものになる。よって、S_2 の最大値もこの並びにより与えられることになる。

定理 2. $S_2(A), S_3(A)$ は、(13) の並びのときにいずれも最大となる。並べ方はいずれも左端からジグザグ順に並べていく。

なお、最大値を与える並びは一意には決まらない。左右を反転させたものや、S_2 の場合にはそれを巡回的にずらしたものももちろん最大値を与えるが、それだけではない。

例えば、$A = [1\ 2\ 3\ 3\ 4\ 5]$ の場合には、最大を与える並び (13) は、$[1\ 3\ 4\ 5\ 3\ 2]$ となるが、3 が 2 つ入っているため、そこから先 (内側) は左右のジグザグ順を逆にしても S_3 は同じ値になる:

$$S_3([1\ 3\ 4\ 5\ 3\ 2]) = S_3([1\ 3\ 5\ 4\ 3\ 2])$$

このように、数列の中に同じ値の要素が含まれている場合は、最大値を与える並びかえのバリエーションが色々できてしまう。

6 隣接積和が最小となる並び

次は S_3, S_2 の最小値の方を考える。こちらは、最大の場合より少し複雑である。まずは、補題 1 に対応する補題を紹介する。

補題 3. $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$ の並べかえを A とする。

1. $x \le y \le a_1$ のとき、A の左端が a_k でない場合は、左端が a_k である並びかえ $A' = [a_k\ \cdots]$ で、
$$S_3([x\ A\ y]) \ge S_3([x\ A'\ y])$$
となるものが存在する。
2. $x \le a_1 \le a_k \le y$ のとき、A の右端が a_1 でない場合は、右端が a_1 である並びかえ $A' = [\cdots\ a_1]$ で、
$$S_3([x\ A\ y]) \ge S_3([x\ A'\ y])$$
となるものが存在する。
3. $x \le a_1 \le a_k \le y$ のとき、A の左端が a_k でない場合は、左端が a_k である並びかえ $A' = [a_k\ \cdots]$ で、
$$S_3([x\ A\ y]) \ge S_3([x\ A'\ y])$$
となるものが存在する。

4. $a_k \le x \le y$ のとき、A の右端が a_1 でない場合は、右端が a_1 である並びかえ $A' = [\cdots\ a_1]$ で、

$$S_3([x\ A\ y]) \ge S_3([x\ A'\ y])$$

となるものが存在する。

証明

まずは 1. から示す。この場合は、$[A\ y] = [B\ a_k\ C]$ とし、B の左端を p, C の左端を q とし、A の $[B\ a_k]$ を反転させたものを A' とすると、$[A'\ y] = [a_k\ \bar{B}\ C]$ で、p は $a_1, \ldots, a_{k-1}$ のいずれか、q は $a_1, \ldots, a_{k-1}, y$ のいずれかで、

$$[x\ A\ y] = [x\ p \cdots\ a_k\ q\ \cdots\ y], \quad [x\ A'\ y] = [x\ a_k \cdots\ p\ q\ \cdots\ y]$$

であり、よって

$$S_3([x\ A\ y]) - S_3([x\ A'\ y]) = xp + a_kq - xa_k - pq = (x-q)(p-a_k)$$

となるが、仮定より $q \ge y \ge x$, $p \le a_{k-1} \le a_k$ より $(x-q)(p-a_k) \ge 0$、よって $S_3([x\ A\ y]) \ge S_3([x\ A'\ y])$ となる。

次は 2. この場合は、$[x\ A] = [B\ a_1\ C]$ とし、B の右端を p, C の右端を q とし、A の $[a_1\ C]$ を反転させたものを A' とすると、$[x\ A'] = [B\ \bar{C}\ a_1]$ で、p は $a_2, \ldots, a_k, x$ のいずれか、q は $a_2, \ldots, a_k$ のいずれかで、

$$[x\ A\ y] = [x\ \cdots\ p\ a_1\ \cdots\ q\ y], \quad [x\ A'\ y] = [x\ \cdots\ p\ q\ \cdots\ a_1\ y]$$

であり、よって

$$S_3([x\ A\ y]) - S_3([x\ A'\ y]) = pa_1 + qy - pq - a_1y = (p-y)(a_1-q)$$

となるが、仮定より $p \le a_k \le y$, $q \ge a_2 \ge a_1$ より $(p-y)(a_1-q) \ge 0$、よって $S_3([x\ A\ y]) \ge S_3([x\ A'\ y])$ となる。

次は 3. この場合は、1. と同じに B, C, A', p, q を取ると、

$$S_3([x\ A\ y]) - S_3([x\ A'\ y]) = (x-q)(p-a_k)$$

だが、仮定より $q \ge a_1 \ge x$, $p \le a_{k-1} \le a_k$ より $(x-q)(p-a_k) \ge 0$、よって $S_3([x\ A\ y]) \ge S_3([x\ A'\ y])$ となる。

最後は 4. この場合は、2. と同じに B, C, A', p, q を取ると、

$$S_3([x\ A\ y]) - S_3([x\ A'\ y]) = (p-y)(a_1-q)$$

だが、仮定より $p \le x \le y$, $q \ge a_2 \ge a_1$ より $(p-y)(a_1-q) \ge 0$、よって $S_3([x\ A\ y]) \ge S_3([x\ A'\ y])$ となる。 ∎

この補題 3 に従い、最大値の場合と同様に A の並びをジグザグに決めていけば最小値を与える並びを得ることができる。

まずは S_3 から考える。最大値の場合と同様に $S_3(A) = S_3([0\ A\ 0])$ を考えると、補題 3 の $1.$ により S_3 を最小にするには A の左端には a_n を置くとよいことがわかる。

すると $A = [a_n\ A']$ になるので、次は

$$S_3(A) = S_3([a_n\ A']) = S_3([a_n\ A'\ 0]) = S_3([0\ \bar{A}'\ a_n])$$

を考える。これは、補題 3 の $3.$ の形なので、S_3 を最小にするには $\bar{A}'$ の左端、すなわち A' の右端には a_{n-1} を置くとよいことがわかる。

なお、これは補題 3 の $2.$ の形でもあるので、$\bar{A}'$ の右端、すなわち A' の左端 (A でいえば左から 2 番目) に a_1 を先に置いてもよいが、とりあえず端からジグザグ順に埋めることとし、ここでは a_{n-1} を先に A' の右端に埋めることにする。

これで $A = [a_n\ A''\ a_{n-1}]$ となるが、これは、補題 3 の $4.$ を反転させた形なので、S_3 を最小にするには、A'' の左端は a_1 と決まる。そしてさらに $A = [a_n\ a_1\ A'''\ a_{n-1}]$ に対しては補題 3 の $2.$ により、A''' の右端が a_2 と決まる。

これらの手順を繰り返すことで、$S_3(A)$ を最小にする並べかえ A は、

$$A = [a_n\ a_1\ a_{n-2}\ a_3\ \cdots a_4\ a_{n-3}\ a_2\ a_{n-1}] \tag{15}$$

であり、これは $a_n, a_{n-1}, a_1, a_2, a_{n-2}, a_{n-3}, a_3, a_4, \ldots$ を左端、右端、左から 2 番目、右から 2 番目、$\ldots$のような順番に並べていったものとなる。

なお、上でも触れたように補題 3 の $2.$ と $3.$ の適用順を変えれば、左端 2 つを先に a_n, a_1 と決定し、次は右端 2 つを a_2, a_{n-1} と決定する、という形の「2 つずつのジグザグ順」に並べていくことも可能である。なお、いずれにせよ 4 回で 1 セット、といった並べ方になっていることに注意する。

最後に S_2 の最小値を考える。

これは、最大の場合と同様、(14) のようにして S_2 を S_3 に帰着させて考えるのであるが、しかし最大の場合とは違い、S_3 の最小値を与える並び (15) は、S_2 の最小値を与えない。

S_2 は巡回的なので、左端は任意の a_j に固定できるので、左端を a_1 とする。

この場合、(14) をそのまま使えば、上の S_3 の最小の場合 $[0\ A\ 0]$ から始めたのとほぼ同じ状態と見ることができる。よって、この場合の $S_3([a_1\ \bar{A}'\ a_1])$ を最小にする並びは

$$[a_1\ \bar{A}'\ a_1] = [a_1\ \bar{A}] = [a_1\ a_n\ a_2\ a_{n-2}\ a_4 \cdots\ a_5\ a_{n-3}\ a_3\ a_{n-1}\ a_1]$$

であることがわかる。埋める順番は、両端を除けば a_n が先、つまり左から先である。

この左端の a_1 を除いて反転すれば A の並びが得られる:

$$A = [a_1\ a_{n-1}\ a_3\ a_{n-3}\ a_5 \cdots\ a_4\ a_{n-2}\ a_2\ a_n] \tag{16}$$

上では a_1 を仮定して a_n から埋めていったので、並べ方の順番は、左端の a_1 が最初で、次は右端の a_n、次は左の a_{n-1}、というジグザグ順に埋めることになる。

なお、今は A の左端を a_1 と固定して考えたが、次にこれを a_n に固定して考えてみる。この場合、

$$S_2(A) = S_2([a_n\ A']) = S_3([a_n\ A'\ a_n])$$

なので、(15) の両端が既に並んでいると見ればよい。よってこの値を最小にするのは、

$$[a_n\ A] = [a_n\ A'\ a_n] = [a_n\ a_1\ a_{n-1}\ a_3\ \cdots a_4\ a_{n-2}\ a_2\ a_n]$$

であり、よって S_2 の最小を与える A はこれの右端の a_n を除いた

$$A = [a_n\ a_1\ a_{n-1}\ a_3\ \cdots a_4\ a_{n-2}\ a_2]$$

であることがわかる。しかし、これは最初が a_n、次がその隣の a_1、その次が右端の a_2 のようになってしまい、先頭がジグザグ順にはなっていない。よって、左端の a_n を右端に巡回的に移動させた

$$A = [a_1\ a_{n-1}\ a_3\ \cdots a_4\ a_{n-2}\ a_2\ a_n] \tag{17}$$

を S_2 の最小を与えるものと見ることができ、これでジグザグ順の並べかえが得られることになる。

これは、並びだけ見れば (16) と同じもののようであり、 S_2 の同じ最小値を与えることは一見明らかなように見える。

しかし、注意しなければいけないのは、その並びを決定する順番の違いであり、(16) の方は左端の a_1 が最初で次が右端の a_n、という順であるが、(17) の方は右端の a_n が最初で次が左端の a_1、という順になっていて、並びは同じようであるが順番は逆になっている。ということは、この 2 種類の並べ方の最後の方で並び方がずれてしまわないか、違ってしまわないか、をちゃんと確認する必要がある。

手順は 4 つで 1 セットなので、n が 4 で割りきれる場合、4 で割って余りが $1, 2, 3$ のそれぞれの場合、の 4 通りで調べればよい。簡単のため $n = 4, 5, 6, 7$ で考えてみる。これで同じであれば、これ以上 n を増やしても 4 つのセットが追加されるだけなので同じである。

まず $n = 4$ の場合、(16) に従って左端から並べる。置く順番は、左端から

$$a_1,\ a_4(= a_n),\ a_3(= a_{n-1}),\ a_2$$

の順なので、結果として

$$[a_1\ a_3\ a_2\ a_4]$$

という列になる。一方、(17) の方は、置くのは

$$a_4(=a_n),\ a_1,\ a_2,\ a_3(=a_{n-1})$$

の順なので、

$$[a_1\ a_3\ a_2\ a_4]$$

となり確かに同じものになっていて、ずれは起きないことがわかる。

$n=5$ の場合は、(16) の方は

$$a_1,\ a_5(=a_n),\ a_4(=a_{n-1}),\ a_2,\ a_3$$

の順、(17) の方は

$$a_5(=a_n),\ a_1,\ a_2,\ a_4(=a_{n-1}),\ a_3(=a_{n-2})$$

の順で、いずれも $[a_1\ a_4\ a_3\ a_2\ a_5]$ とやはり同じものになる。

$n=6$ の場合は、(16) の方は

$$a_1,\ a_6(=a_n),\ a_5(=a_{n-1}),\ a_2,\ a_3,\ a_4(=a_{n-2})$$

の順、(17) の方は

$$a_6(=a_n),\ a_1,\ a_2,\ a_5(=a_{n-1}),\ a_4(=a_{n-2}),\ a_3$$

の順で、いずれも $[a_1\ a_5\ a_3\ a_4\ a_2\ a_6]$ となり、$n=7$ の場合は、(16) の方は

$$a_1,\ a_7(=a_n),\ a_6(=a_{n-1}),\ a_2,\ a_3,\ a_5(=a_{n-2}),\ a_4(=a_{n-3})$$

の順、(17) の方は

$$a_7(=a_n),\ a_1,\ a_2,\ a_6(=a_{n-1}),\ a_5(=a_{n-2}),\ a_3,\ a_4$$

の順でいずれも $[a_1\ a_6\ a_3\ a_4\ a_5\ a_2\ a_7]$ となる。

結局、S_2 の方は、最小を与える並びは (16) で、並べかたは右から先でも左から先でもよいが、端からジグザグ順に並べていったもの、であることがわかる。

定理 4. $S_3(A)$ は、(15) の並びのときに最小となり、$S_2(A)$ は、(16) の並びのときに最小となる。並べ方はいずれも左端からジグザグ順に並べていく。

S_2 と S_3 の最小値は、異なる並びで最小を与えることになっている。これは、最大値の方が、なるべく大きいもの同士をかけるようにしているのに対し、最小解は逆に大きいものには小さいものをかけるようにして大きくならないようにしていることに由来する。

S_3 の場合は両端に一番大きいもの $(a_n$ と $a_{n-1})$ を置くことで、それらにはそれぞれ一番小さいもの $(a_1$ と $a_2)$ をひとつかけた積 1 つだけを作るようにしているのに対し、巡回型の S_2 の場合は両端に a_n と a_{n-1} を置いてしまうと、それらの積が入ってしまうので小さくならず、よって (16) では巡回的に大きいものと小さいものが順番に並ぶようになっている。そのため S_2 と S_3 の最小を与える並び方が違っているわけである。

7 最後に

今回、「レーダーチャートの面積」を考えることは良くないこと、およびそれと関連して有限数列の隣接積和の値を最大、最小にする数列の並びかえの話を紹介した。

後半の隣接積和の最大最小問題については、解の並びがどうなるかはなんとなく想像できても、それが確かに最大、最小を与えることをちゃんと証明するのは少し面倒である。有限の組み合わせ的な話にはそういう問題がよくあるような気がする。

また、定理 $2, 4$ については、前半で紹介した「レーダーチャートの面積」に関する悪用 $(?)$ 以外には、今のところ残念ながらその応用例を思いつかない。何かいい使い道があれば、是非教えていただきたい。