2022 年 01 月 11 日

直管ではない管の自然倍音について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、高校の物理で学ぶ直管の気柱共鳴の倍音列と、直管でない気柱共鳴の関係について、いわゆる「ホーン方程式」(ホルン方程式、[3]) を用いて、数式で考察を行う。

特に、[3] で紹介されている断面の例について、その解と共鳴周波数を求めることを目標とする。

2 背景

高校の物理で「気柱の共鳴」を学ぶが、そこでは、開管、すなわち管の両端が開いていて、側面以外の反射壁がない場合の音の共鳴と、閉管、すなわち管の片側が閉じていて反射壁になっている場合の音の共鳴の周波数 f_n や波長 λ_n には、以下の関係があることが紹介される。

- 開管: 波長 $\lambda_n = 2L\dfrac{1}{n}$, 周波数 $f_n = \dfrac{c}{2L}n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$
- 閉管: 波長 $\lambda_n = 2L\dfrac{2}{2n-1}$, 周波数 $f_n = \dfrac{c}{2L}\dfrac{2n-1}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$

ここで L は管長、c は音速である。

これらの周波数の音は、管に穴やバルブがなくても自然に「鳴りやすい」音なので、「自然倍音」とも呼ばれる。開管の場合には $f_1 = c/(2L)$ の整数倍が自然倍音列で、閉管の場合には $f_1 = c/(4L)$ の奇数倍が自然倍音列となり、少しずれがあることがわかる。

一方、息を吹き込んで音を出す管楽器も、穴やバルブを使わなくてもとびとびの自然倍音列が出るのであるが、その周波数は、管としての共鳴音の自然倍音列と同じとは限らない。それは、息という流体を吹き込んでいるためによる影響、音を発生させる仕組みや形状などの影響による。ただ、楽器としての自然倍音列が、共鳴管としての自然倍音列に追従する形で現れるのは間違いない

だろうと思うので、本稿ではホーン方程式に従って計算される、共鳴管としての自然倍音列について考察する。

ちゃんとした楽器としての自然倍音列に関しては、音響学の専門書、例えば [4],[5] 等や、あるいは音響学会等の論文などを見るべきだろうと思う。

特に本稿で考えたいのは、管楽器の断面形状と自然倍音列の関係についてである。フルート以外の多くの管楽器は、管の形状としては閉管 (息を入れる方の口が壁になる) であり、よって直管であれば本来は最低音の奇数倍の自然倍音列が出るはずであるが、金管楽器もまたは木管楽器のオーボエも、自然倍音列は、むしろ直管の開管のような最低音の整数倍の自然倍音列が出ることが知られている。

これは、管の形状、特に出口部分が極端に広がっているため、という説明がなされるが (例えば [6])、それをホーン方程式で説明ができるのかどうかを考察したいと思う。

3 ホーン方程式

ホーン方程式の導出は、Wikipedia [3] にも概略は載っているし、ランダウ-リフシッツ [8] にも載っているが、本稿では、[9] のノズル方程式からの導出を行う。

楽器のように断面が一様でない管中の気体の 1 次元的な方程式 (連立偏微分方程式) は以下の通り ([9])。

$$\begin{cases} A(x)\rho_t + (A(x)\rho u)x = 0 \\ A(x)(\rho u)_t + (A(x)\rho u^2)_x + A(x)P_x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

ここで、t は時刻、x は x 軸に沿った座標、$\rho = \rho(x,t)$ (未知関数) は気体密度、$u = u(x,t)$ (未知関数) は気体速度、$P = P(x,t)$ (未知関数) は単位面積当たりの気体圧力、$A(x)$ (既知関数) は x 軸に垂直な面での x での断面積とする。ただし、気体の粘性は無視しているし、$A(x)$ が大きくなりすぎると気体を 1 次元的な運動と見ることができなくなるので、方程式の解と実際の現象とのずれが大きくなるだろう。

P は ρ のみの関数と考え、$P = P(\rho)$ とすると、音速 c は、

$$c^2 = \frac{dP}{d\rho} \tag{2}$$

となる。本稿では、この c は一定であると考え、また楽器管内の流速は c に比

べだいぶ小さいと考え (多分音速の数パーセント程度)、(1) の u^2 の項は無視する。こうすると (1) より、

$$(A(x)\rho u)_x = -A(x)\rho_t, \quad (A(x)\rho u)_t = -A(x)P_x$$

となるので、ここから u を消去すれば

$$(A(x)P_x)_x = A(x)\rho_{tt}$$

となるが、(2) より、

$$P_t = \frac{dP}{d\rho}\rho_t = c^2\rho_t$$

なので $P_{tt} = c^2\rho_{tt}$ となり、よって、圧力 $P = P(x,t)$ のみを未知関数とする方程式

$$\frac{1}{c^2}P_{tt} = \frac{1}{A(x)}(A(x)P_x)_x \tag{3}$$

が得られる。これがウェブスターのホーン方程式である。本稿ではこの方程式を使って考察を行う。

なお、ホーン方程式 (3) は圧力 P を未知関数としているが、高校の物理では、縦波は圧力ではなく「変位」を未知関数として説明することが多い。変位と圧力では、定在波の「腹」と「節」の関係が逆になるので注意が必要である。

4 変数分離と境界条件

本稿では、ホーン方程式 (3) から得られる楽音の周波数を考えるため、定在波のような解を主に考察する。

定在波は、通常は時間的に周期的な解で、左右に移動せず振幅のみ変化する解を指すが、それは、変数分離形の解

$$P(x,t) = P_0 + h(t)g(x) \tag{4}$$

で (P_0 は大気圧)、$h(t)$ が周期的なものとして表現される。必ずしもこのような解が存在することは明かではないが、線形の波動方程式では良くこの形の解が

利用され、さらにその形の解の重ね合わせで、より一般的な解を構成すること (フーリエ級数解など) も良く行われている。

方程式 (3) の境界条件は、$x=0$ が息の入る口で、$x=L$ が息や音の出口とすると、出口では、

$$P(L,t)=P_0 \tag{5}$$

と考えるのが自然だろう。これは、定在波では $x=L$ が圧力の節であることも意味する。つまり管楽器のほぼ出口付近では音は最小であることになる。

一方もう一つの境界である入口 $x=0$ では、マウスピースによる圧力振動を入力するという条件

$$P(0,t)=P_0+p_1\sin\omega t$$

がよいのかもしれないが、本稿では $x=0$ が圧力の腹であること、すなわち

$$P_x(0,t)=0 \tag{6}$$

を課すことにする。これは、振動を与える入力口が最も振動の激しいところ、ということを意味するが、一応閉管の反射壁の条件とも対応する。しかし、こう考えることが現象と比較して適切なのかどうかはよくわからない。

(4) を (3) に代入すると、

$$\frac{1}{c^2}h''(t)g(x)=h(t)\,\frac{1}{A(x)}(A(x)g'(x))',\quad \frac{1}{c^2}\frac{h''(t)}{h(t)}=\frac{1}{A(x)g(x)}(A(x)g'(x))'$$

となり、左辺は t のみの式、右辺は x のみの式となるので、結果としてこの式は定数となり、よって

$$h''(t)=\alpha c^2 h(t),\quad (A(x)g'(x))'=\alpha A(x)g(x) \tag{7}$$

の 2 本の常微分方程式に分離できる。境界条件 (5), (6) は、$h(t)$, $g(t)$ で書くと、

$$P(L,t)=P_0+h(t)g(L)=P_0,\quad P_x(0,t)=h(t)g'(0)=0\quad (t>0)$$

より、

$$g(L)=0,\quad g'(0)=0 \tag{8}$$

となる。

$\alpha \geq 0$ の場合は、(7) の $h(t)$ は指数関数で表されるか ($\alpha > 0$)、または 1 次式となり ($\alpha = 0$)、周期関数にはならないし、その場合の $g(x)$ の解も境界条件 (5), (6) を満たすものは自明なもの $g(x) \equiv 0$ 以外にはない。

それを示す簡単な例として、直管の場合 $A(x) = A_0\ (> 0)$ の場合を考えてみる。

この場合は、(7) は

$$h''(t) = \alpha c^2 h(t), \quad g''(x) = \alpha g(x) \tag{9}$$

となる。$\alpha > 0$ ならば、この解は良く知られているように、

$$h(t) = C_1 e^{c\sqrt{\alpha}\,t} + C_2 e^{-c\sqrt{\alpha}\,t}, \quad g(x) = C_3 e^{\sqrt{\alpha}\,x} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha}\,x}$$

となる。(8) より、

$$g(L) = C_3 e^{\sqrt{\alpha}\,L} + C_4 e^{-\sqrt{\alpha}\,L} = 0, \quad g'(0) = C_3\sqrt{\alpha} - C_4\sqrt{\alpha} = 0 \tag{10}$$

となる。C_3, C_4 の連立方程式の係数行列の行列式は、

$$\begin{vmatrix} e^{\sqrt{\alpha}\,L} & e^{-\sqrt{\alpha}\,L} \\ \sqrt{\alpha} & -\sqrt{\alpha} \end{vmatrix} = -\sqrt{\alpha}(e^{\sqrt{\alpha}\,L} + e^{-\sqrt{\alpha}\,L}) < 0$$

なので、(10) を満たす解は $C_3 = C_4 = 0$ しかない。よって $g(x) \equiv 0$ となり、解は必然的に自明な定数解 $P(x,t) = P_0$ になってしまう。

$\alpha = 0$ の場合は、(9) の解は、

$$h(t) = C_1 t + C_2, \quad g(x) = C_3 x + C_4$$

となるが、この場合は

$$g(L) = C_3 L + C_4 = 0, \quad g'(0) = C_3 = 0$$

なのでやはり $C_3 = C_4 = 0$ となってしまう。

$\alpha < 0$ の場合は、$\alpha = -k^2\ (k > 0)$ とすると、

$$h''(t) = -k^2 c^2 h(t), \quad g''(x) = -k^2 g(x)$$

より、この解は、

$$h(t) = C_1 \sin ckt + C_2 \cos ckt = C_3 \sin(ckt + \beta),$$
$$g(x) = C_4 \sin kx + C_5 \cos kx$$

となる。境界条件 (8) より、

$$g'(0) = C_4 k \cos 0 + C_5 k \sin 0 = C_4 k = 0$$

より $C_4 = 0$、よって $g(x) = C_5 \cos kx$、

$$g(L) = C_5 \cos kL = 0$$

より、$kL = k_n L = (n - 1/2)\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ となり、

$$P(x,t) = P_n(x,t) = P_0 + C_6 \sin(ck_n t + \beta) \cos k_n x \quad \left(k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)$$

となる。この場合波長、すなわち x 方向の周期 $\lambda = \lambda_n$ と、周波数、すなわち t 方向の周期の逆数 $f = f_n$ は、

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = 2L \frac{2}{2n-1}, \quad f_n = \frac{ck_n}{2\pi} = \frac{c}{2L} \frac{2n-1}{2}$$

となり、2 節で述べた直閉管の波長と周波数に確かに一致する。

本稿では定在波を考察するため、$\alpha < 0$ の場合を考えることとし、以後 $\alpha = -k^2$ $(k > 0)$ とする。

5 円錐管

本節以降、いくつか具体的な $A(x)$ に対して、$\alpha < 0$ の場合の方程式 (7)、すなわち、$\alpha = -k^2$ $(k > 0)$ での $g(x)$ に対する 2 階常微分方程式の境界値問題

$$(A(x)g'(x))' = -k^2 A(x) g(x) \ \ (0 < x < L), \quad g(L) = 0, \quad g'(0) = 0 \tag{11}$$

と、$h(t)$ の解

$$h(t) = C_1 \sin(ckt + \beta) \quad (C_1,\ \beta \text{ は定数})$$

について考察する。

まず本節では $A(x)=A_0(x+\delta)^2$ $(\delta>0)$ とする。これは、管が円錐の一部の場合に相当する。なお、(11) の両辺で A_0 は消えてしまうので、最初から $A_0=1$ として構わないことに注意する。

ちなみに、管楽器のうち、オーボエは円錐管であるらしい。

今、

$$g(x)=(x+\delta)^{-1}\hat{g}(x)$$

とすると、

$$\begin{aligned}
Ag' &= (x+\delta)^2((x+\delta)^{-1}\hat{g})' = (x+\delta)^2(-(x+\delta)^{-2}\hat{g}+(x+\delta)^{-1}\hat{g}') \\
&= -\hat{g}+(x+\delta)\hat{g}', \\
(Ag')' &= (-\hat{g}+(x+\delta)\hat{g}')' = -\hat{g}'+\hat{g}'+(x+\delta)\hat{g}'' = (x+\delta)\hat{g}'', \\
-k^2Ag &= -k^2(x+\delta)\hat{g}
\end{aligned}$$

より、$\hat{g}$ に関する方程式は

$$\hat{g}''=-k^2\hat{g}$$

となり、よって

$$\hat{g}=C_2\sin kx+C_3\cos kx=C_4\sin(kx+\gamma) \tag{12}$$

が一般解となる。境界条件を $\hat{g}$ の条件に書き直すと、

$$g(L)=(L+\delta)^{-1}\hat{g}(L)=0,\quad g'(0)=-\delta^{-2}\hat{g}(0)+\delta^{-1}\hat{g}'(0)=0$$

より、

$$\hat{g}(L)=0,\quad \hat{g}(0)-\delta\hat{g}'(0)=0$$

となる。よって (12) より、

$$\hat{g}(L)=C_4\sin(kL+\gamma)=0,\quad \hat{g}(0)-\delta\hat{g}'(0)=C_4(\sin\gamma-\delta k\cos\gamma)=0$$

となるので、

$$kL + \gamma = n\pi \ \ (n \text{ は整数}), \quad \tan\gamma = \delta k \tag{13}$$

となる。ここから γ を消去すると、

$$\delta k = \tan(n\pi - KL) = -\tan kL \tag{14}$$

となる。この (14) を満たす k により λ, f が決定する。$\alpha = kL$ とすると、(14) は、

$$\tan\alpha = -\frac{\delta}{L}\alpha$$

となる。

この形の超越方程式は今後も出てくるので、

$$\tan x = -px \quad (p > 0) \tag{15}$$

の $x > 0$ の解について、ここに少しまとめておく。$y = \tan x$ のグラフと直線 $y = -px$ の交点の x 座標が (15) の解となるので、その解は無限に存在し、

$$x = \frac{(2n-1)\pi}{2} + T_n(p) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{16}$$

の形になる。ここで $T_n(p)$ は以下の性質を満たす。

- $0 < T_n(p) < \dfrac{\pi}{2}$
- $T_n(p)$ は n に関して単調減少で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n(p) = 0$
- $T_n(p)$ は p に関して単調減少で $\displaystyle\lim_{p\to+0} T_n(p) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{p\to\infty} T_n(p) = 0$

これらはグラフから容易にわかる。

(16) より、(14) を満たす $k = k_n$ は

$$k = \frac{\alpha}{L} = \frac{(2n-1)\pi}{2L} + \frac{1}{L}T_n\left(\frac{\delta}{L}\right) \tag{17}$$

となる。(11) の解 $g(x)$ は、(13) より $\gamma = n\pi - KL$ なので、

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+\delta)^{-1}\hat{g}(x) \;=\; C_4(x+\delta)^{-1}\sin(kx+\gamma) \\ &= C_4(x+\delta)^{-1}\sin(kx-kL+n\pi) \;=\; C_4(-1)^n(x+\delta)^{-1}\sin(kx-kL) \end{aligned}$$

より、(17) の $k = k_n$ に対して

$$g(x) = C_5\,\frac{\sin k_n(x-L)}{x+\delta}$$

が (11) の解となる。そして、波長 λ と周波数 f は、

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}, \quad f = f_n = \frac{ck_n}{2\pi} = \frac{c}{2L}\left\{\frac{2n-1}{2} + \frac{1}{\pi}T_n\left(\frac{\delta}{L}\right)\right\}$$

となる。

T_n の性質により、n がかなり大きければ f_n は T_n/π は 0 に近くなるが、δ/L がかなり小さければ T_n/π は 1/2 に近い。よって $\delta \ll L$ であれば、円錐管の自然倍音列の最初の方は、直閉管の自然倍音列よりも直開管の自然倍音列に近くなることになる。

6 指数関数

次は、[3] にもある指数関数形の断面積 $A(x) = A_0e^{2\delta x}$ $(\delta > 0)$ の場合を考える。これは、断面の半径が $R_0e^{\delta x}$ の指数関数である円である管に対応する。これも $A_0 = 1$ としてよい。

この場合は、

$$g(x) = e^{-\delta x}\hat{g}(x)$$

とすると、

$$\begin{aligned} Ag' &= e^{2\delta x}(e^{-\delta x}\hat{g})' \;=\; e^{2\delta x}(-\delta e^{-\delta x}\hat{g} + e^{-\delta x}\hat{g}') \\ &= e^{\delta x}(\hat{g}' - \delta\hat{g}) \\ (Ag')' &= \delta e^{\delta x}(\hat{g}' - \delta\hat{g}) + e^{\delta x}(\hat{g}'' - \delta\hat{g}') \;=\; e^{\delta x}(\hat{g}'' - \delta^2\hat{g}) \\ -k^2Ag &= -k^2e^{\delta x}\hat{g} \end{aligned}$$

より、$\hat{g}$ は

$$\hat{g}'' = (\delta^2 - k^2)\hat{g} \tag{18}$$

を満たす。$\hat{g}$ の境界条件は、

$$g(L) = e^{-\delta L}\hat{g}(L) = 0, \quad g'(0) = -\delta\hat{g}(0) + \hat{g}'(0) = 0$$

より、

$$\hat{g}(L) = 0, \quad \hat{g}'(0) - \delta\hat{g}(0) = 0 \tag{19}$$

となる。

(18) の一般解は、k と δ の大小により解の形が分かれる。

まず、$0 < k < \delta$ の場合は $\tau = \sqrt{\delta^2 - k^2}$ に対して、

$$\hat{g}(x) = C_1 e^{\tau x} + C_2 e^{-\tau x}$$

となるが、この場合境界条件 (19) より、

$$\hat{g}(L) = C_1 e^{\tau L} + C_2 e^{-\tau L} = 0, \quad \hat{g}'(0) - \delta\hat{g}(0) = C_1(\tau - \delta) + C_2(-\tau - \delta) = 0$$

となる。C_1, C_2 の係数行列の行列式は、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e^{\tau L} & e^{-\tau L} \\ -(\delta - \tau) & -(\tau + \delta) \end{vmatrix} &= (\delta - \tau)e^{-\tau L} - (\tau + \delta)e^{\tau L} \\ &= (\tau + \delta)e^{-\tau L}\left(\frac{\delta - \tau}{\delta + \tau} - e^{2\tau L}\right) \end{aligned}$$

となるが、$e^{2\tau L} > 1$, $(\delta - \tau)/(\delta + \tau) < 1$ なので、この行列式は負となり、よって $C_1 = C_2 = 0$ となるので不可。

次に、$k = \delta$ の場合は $\hat{g}''(x) = 0$ より $\hat{g}(x) = C_1 + C_2 x$ となり、(19) より、

$$\hat{g}(L) = C_1 + C_2 L = 0, \quad \hat{g}'(0) - \delta\hat{g}(0) = C_2 - \delta C_1 = 0$$

より、行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & L \\ -\delta & 1 \end{vmatrix} = 1 + \delta L > 0$$

なので、やはり $C_1 = C_2 = 0$ となって不可。

よって $k > \delta$ の場合のみ 0 でない解が存在する可能性がある。この場合 $\tau = \sqrt{k^2 - \delta^2}$ とすると、(18) より

$$\hat{g}(x) = C_1 \sin \tau x + C_2 \cos \tau x = C_3 \sin(\tau x + \gamma)$$

となる。境界条件 (19) より、

$$\hat{g}(L) = C_3 \sin(\tau L + \gamma) = 0, \quad \hat{g}'(0) - \delta \hat{g}(0) = C_3(\tau \cos \gamma - \delta \sin \gamma) = 0$$

となるから、

$$\tau L + \gamma = n\pi \ \ (n \text{ は整数}), \quad \tan \gamma = \frac{\tau}{\delta}$$

となるが、γ を消去すると、

$$\frac{\tau}{\delta} = \tan(n\pi - \tau L) = -\tan \tau L$$

となるので、$\bar{\tau} = \tau L \ (> 0)$ とすると

$$\tan \bar{\tau} = -\frac{\bar{\tau}}{\delta L}$$

となり、よって (16) より、

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_n = \frac{\bar{\tau}}{L} = \frac{(2n-1)\pi}{2L} + \frac{1}{L} T_n\left(\frac{1}{\delta L}\right), \\ k &= k_n = \sqrt{\delta^2 + \tau^2} = \sqrt{\delta^2 + \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2L} + \frac{1}{L} T_n\left(\frac{1}{\delta L}\right)\right\}^2} \end{aligned}$$

となる。これにより、解 $g(x)$ は、

$$g(x) = C_3 e^{-\delta x} \sin(\tau x + \gamma) = C_3 e^{-\delta x} \sin(\tau x - \tau L + n\pi)$$

より

$$g(x) = C_4 e^{-\delta x} \sin \tau_n (x - L) \tag{20}$$

となるので、波長 λ と周波数 f_n は、

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2\pi}{\tau_n}, \quad f = f_n = \frac{ck_n}{2\pi} = \frac{c}{2L}\sqrt{\left(\frac{\delta L}{\pi}\right)^2 + \left\{\frac{2n-1}{2} + \frac{1}{\pi}T_n\left(\frac{1}{\delta L}\right)\right\}^2}$$

となる。周波数 f_n の挙動を決めるのは δL で、δL が大きい、すなわち管の曲がりが急な場合は $T_n(1/(\delta L))$ は $\pi/2$ に近くなるが、この場合 $\delta L/\pi$ の項が無視できなくなるので、自然倍音列は直開管に近いとも直閉管に近いともいいにくい状況になる。逆に δL が小さい、すなわち管の曲がりがゆるやかな場合は $T_n(1/(\delta L))$ は 0 に近く、よって f_n は直閉管に近い状況になる。

つまり、この指数関数形では、自然倍音列を直開管に近づけるのは難しいかもしれない。

7 ベッセルホーン

最後に、いわゆる「ベッセルホーン」について考察する。これは、

$$A(x) = A_0(M-x)^{-2\tau} \quad (\tau > 0,\ M \geq L)$$

の場合である。$M = L$ だと、開口端 $x = L$ で $A(x) = \infty$ となるので現実的ではないし、大きい $A(x)$ に対しては方程式そのものの妥当性も薄れてしまうが、近似的な状況を考えるにはシンプルで、考えやすいモデルかもしれない。しばらくは、$M > L$ として考える。$A_0 = 1$ としてよい。

この場合は、

$$g(x) = (M-x)^{\tau+1/2}\hat{g}(M-x) \tag{21}$$

とし、$\nu = \tau + 1/2, y = M - x$ とすると、$\tau = \nu - 1/2$ より、

$$\begin{aligned}
Ag' &= y^{-2\tau}\frac{d}{dx}(y^\nu \hat{g}(y)) \\
&= -\nu y^{-2\tau+\nu-1}\hat{g}(y) - y^{-2\tau+\nu}\hat{g}'(y) \\
&= -\nu y^{-\nu}\hat{g}(y) - y^{-\nu+1}\hat{g}'(y), \\
(Ag')' &= -\nu^2 y^{-\nu-1}\hat{g}(y) + \nu y^{-\nu}\hat{g}'(y) + (-\nu+1)y^{-\nu}\hat{g}'(y) + y^{-\nu+1}\hat{g}''(y) \\
&= -\nu^2 y^{-\nu-1}\hat{g}(y) + y^{-\nu}\hat{g}'(y) + y^{-\nu+1}\hat{g}''(y), \\
-k^2 Ag &= -k^2 y^{-2\tau} y^\nu \hat{g}(y) \ = \ -k^2 y^{-\nu+1}\hat{g}(y)
\end{aligned}$$

となるので、$\hat{g}(y)$ が満たす方程式は、

$$\hat{g}''(y)+\frac{1}{y}\hat{g}'(y)+\left(k^2-\frac{\nu^2}{y^2}\right)\hat{g}(y)=0 \tag{22}$$

となる。これは、$\hat{g}(y)=\bar{g}(ky)$, $ky=\xi$ とすると、

$$k^2\bar{g}''(\xi)+\frac{k^2}{\xi}\bar{g}'(\xi)+\left(k^2-\frac{\nu^2k^2}{\xi^2}\right)\bar{g}(\xi)=0$$

となり、よって $\bar{g}(\xi)$ は、いわゆるベッセルの微分方程式

$$\bar{g}''(\xi)+\frac{1}{\xi}\bar{g}'(\xi)+\left(1-\frac{\nu^2}{\xi^2}\right)\bar{g}(\xi)=0$$

を満たすことになる。その一般解は、特殊関数の ν 次ベッセル関数 J_ν と ν 次ノイマン関数 N_ν を用いて

$$\bar{g}(\xi)=C_1J_\nu(\xi)+C_2N_\nu(\xi)$$

と書ける (例えば [1] 第 VI 篇 §36、[2] 等)。よって $\hat{g}(y)$ は、

$$\hat{g}(y)=C_1J_\nu(ky)+C_2N_\nu(ky) \tag{23}$$

となる。

(21) より、境界条件 (8) を $\hat{g}$ に書き直すと、

$$g(L)=(M-L)^\nu\hat{g}(M-L)=0,\quad g'(0)=-\nu M^{\nu-1}\hat{g}(M)-M^\nu\hat{g}'(M)=0$$

より

$$\hat{g}(M-L)=0,\quad \nu\hat{g}(M)+M\hat{g}'(M)=0$$

となる。これを (23) に代入すると、前者は

$$C_1J_\nu(k\delta))+C_2N_\nu(k\delta)=0\quad(\delta=M-L>0) \tag{24}$$

となり、後者は

$$\begin{aligned}&\nu\hat{g}(M)+M\hat{g}'(M)\\&=\ C_1(\nu J_\nu(kM)+kMJ'_\nu(kM))+C_2(\nu N_\nu(kM)+kMN'_\nu(kM))=0\end{aligned} \tag{25}$$

となる。ところで、ベッセル関数、ノイマン関数は、次の公式を満たすことが知られている ([1] 第 VI 篇 §38)。

$$(\xi^\nu J_\nu(\xi))' = \xi^\nu J_{\nu-1}(\xi), \quad (\xi^\nu N_\nu(\xi))' = \xi^\nu N_{\nu-1}(\xi) \tag{26}$$

これにより、

$$\nu J_\nu(\xi) + \xi J_\nu'(\xi) = \xi J_{\nu-1}(\xi), \quad \nu N_\nu(\xi) + \xi N_\nu'(\xi) = \xi N_{\nu-1}(\xi)$$

となるので、これにより条件 (25) は、

$$C_1 J_{\nu-1}(kM) + C_2 N_{\nu-1}(kM) = 0 \tag{27}$$

と書き換えられる。ここで、

$$W_\nu(X,Y) = \begin{vmatrix} J_\nu(X) & N_\nu(X) \\ J_{\nu-1}(Y) & N_{\nu-1}(Y) \end{vmatrix}$$

と書くことにすると、C_1, C_2 の条件式 (24), (27) の係数行列の行列式は $W_\nu(k\delta, kM)$ となるので、この行列式が 0 でなければ $C_1 = C_2 = 0$ となって 0 以外の解が求まらないことになるので、0 でない解が求まるためには

$$W_\nu(k\delta, kM) = \begin{vmatrix} J_\nu(k\delta) & N_\nu(k\delta) \\ J_{\nu-1}(kM) & N_{\nu-1}(kM) \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

が必要となる。そしてこれを満たす k が存在すれば、その k に対し

$$C_1 = C_3 N_{\nu-1}(kM), \quad C_2 = -C_3 J_{\nu-1}(kM)$$

となるので、解 $g(x)$ は

$$\begin{aligned} g(x) &= (M-x)^\nu \hat{g}(M-x) \\ &= C_3(M-x)^\nu (N_{\nu-1}(kM) J_\nu(k(M-x)) - J_{\nu-1}(kM) N_\nu(k(M-x))) \\ &= C_3(M-x)^\nu W_\nu(k(M-x), kM) \end{aligned} \tag{29}$$

と書けることになる。

これまでのように、(28) を満たす k が無数に存在するかどうか、そしてそのとき周波数 $f = ck/(2\pi)$ はどうなるかを考えたいが、一般の $\nu = \tau + 1/2$ の場合

には少し難しいので、ここでは簡単のため、τ が整数 n の場合を考えてみる。ベッセル関数、ノイマン関数は $\nu = n + 1/2$ の場合は半ベッセル関数と呼ばれ、sin, cos で表現されることが知られている ([1] 第 VI 篇 §39)。本節では主に $n = 1$ の場合を紹介するが、これは断面の半径が $R(x) = R_0(M - x)^{-1}$ の円である場合に相当する。

[1] (第 VI 篇 §39) によれば、$J_{n+1/2}$, $N_{n+1/2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ は、

$$\begin{aligned}
J_{n+1/2}(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi^{n+1/2}\left(-\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)^n \frac{\sin\xi}{\xi},\\
N_{n+1/2}(\xi) &= (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi^{n+1/2}\left(\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)^n \frac{\cos\xi}{\xi}
\end{aligned}$$

と表されるので、$J_{1/2}$, $J_{3/2}$, $N_{1/2}$, $N_{3/2}$ は、

$$\begin{aligned}
J_{1/2}(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\sin\xi, & J_{3/2}(\xi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\frac{\sin\xi - x\cos\xi}{\xi},\\
N_{1/2}(\xi) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\cos\xi, & N_{3/2}(\xi) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\frac{\cos\xi + x\sin\xi}{\xi}
\end{aligned} \tag{30}$$

となる。よって $W_{3/2}(X, Y)$ は、

$$\begin{aligned}
W_{3/2}(X,Y) &= J_{3/2}(X)N_{1/2}(Y) - N_{3/2}(X)J_{1/2}(Y)\\
&= \frac{2}{\pi X\sqrt{XY}}\{-(\sin X - X\cos X)\cos Y + (\cos X + X\sin X)\sin Y\}\\
&= \frac{2}{\pi X\sqrt{XY}}\{(\cos X\sin Y - \sin X\cos Y) + X(\cos X\cos Y + \sin X\sin Y)\}\\
&= \frac{2}{\pi X\sqrt{XY}}\{\sin(Y - X) + X\cos(Y - X)\}
\end{aligned}$$

となる。条件 (28) は、$kM - k\delta = kM - k(M - L) = kL$ より、

$$W_{3/2}(k\delta, kM) = \frac{2}{\pi k^2\delta\sqrt{\delta M}}(\sin kL + k\delta\cos kL) = 0$$

となるので、(28) を満たす k は、

$$k = k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} + \frac{1}{L}T_n\left(\frac{\delta}{L}\right) \tag{31}$$

となり、無数に存在することがわかる。そして、(29) より解 $g(x)$ は、

$$
\begin{aligned}
g(x) &= C_3(M-x)^{3/2}W_{3/2}(k(M-x),kM) \\
&= C_3\frac{2(M-x)^{3/2}}{\pi k^2(M-x)\sqrt{(M-x)M}}(\sin kx + k(M-x)\cos kx) \\
&= C_4(\sin kx + k(M-x)\cos kx) \qquad (32)
\end{aligned}
$$

となる。これは、三角関数で表現されているが、例えば (20) のような単純にその振幅を変更したものではなく位相も変動し、その位相のずれも x に依存する。よって (32) の $g(x)$ に対して「波長」という呼び方はもはやこの解に対しては適切ではないが、

$$
g'(x) = -C_4k^2(M-x)\sin kx
$$

となるから、$g(x)$ の極大極小の位置は、$x=M$ の前後で反転はするが、$\cos kx$ のその位置とほぼ同じになる。つまり $\cos kx$ の波長と同じ「波長」らしきものが $g(x)$ にも存在すると見ることができ、その「波長」は (31) の $k=k_n$ に対して

$$
\lambda = 2\pi/k_n
$$

となる。

周波数の方は、(31) の $k=k_n$ に対して

$$
f = f_n = \frac{ck}{2\pi} = \frac{c}{2L}\left\{\frac{(2n-1)}{2} + \frac{1}{\pi}T_n\left(\frac{\delta}{L}\right)\right\} \qquad (33)
$$

となる。これも、$\delta \ll L$ であれば $T_n/\pi \doteqdot 1/2$ となるので、$f_n \doteqdot (cn)/(2L)$ となるから、その自然倍音列は直開管の自然倍音列の周波数に近くなる。

最後に $M=L$ の場合の話も少し書いておく。この場合も、(21) の変換によってベッセルの方程式 (22) が得られ、その一般解が (23) と表されることまでは同じである。

境界条件の $g(L)=0$ の方は、この場合は $g(x)=(L-x)^\nu\hat{g}(L-x)$ より $\nu>0$ なら自然に $g(L)=0$ となりそうであるが、実はそんなに簡単でもない。$J_\nu(x)$ は $x\to+0$ で $J_\nu(x)=O(x^\nu)$ なので $J_\nu(+0)=0$ であるが、$N_\nu(x)$ の方は $N_\nu(x)=O(x^{-\nu})$ なので $N_\nu(+0)=\infty$ となる。

ただ、

$$
\lim_{x\to+0} x^\nu N_\nu(x) = m_\nu \neq 0
$$

なので、

$$g(L) = \lim_{y\to+0} y^\nu (C_1 J_\nu(ky) + C_2 N_\nu(ky)) = C_2 \frac{m_\nu}{k^\nu} = 0$$

より $C_2 = 0$ となり、よってこの場合

$$g(x) = C_1 (L-x)^\nu J_\nu(k(L-x))$$

となる。$g'(0)$ は (26) より、$k(L-x) = \xi$ とすれば、

$$g'(x) = C_1 \frac{d}{d\xi}(\xi^\nu J_\nu(\xi)) \cdot \frac{-k}{k^\nu} = -C_1 k^{1-\nu} \xi^\nu J_{\nu-1}(\xi)$$

となるので、

$$g'(0) = -C_1 k^{1-\nu} (kL)^\nu J_{\nu-1}(kL) = -C_1 k L^\nu J_{\nu-1}(kL) = 0$$

より、

$$J_{\nu-1}(kL) = 0$$

が $k = k_n$ が満たすべき条件となる。$\nu > 0$ ならば $J_{\nu-1}(\xi)$ には、$\xi = 0$ 以外に無限個の離散的な零点 $\xi = \xi_n(\nu-1)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ が存在することが知られていて、正確な値を知ることは容易ではないが、漸近公式なども知られている ([1] 第 VI 篇 §36)。

特に、$\nu = 3/2$ $(\tau = 1)$ の場合は、(30) より、$\xi_n(1/2) = n\pi$ なので、

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad f = f_n = \frac{c}{2L} n$$

となって、完全に直開管と同じ自然倍音列を与えることになる。なお、これは (33) で $\delta = 0$ $(M = L)$ としたものにも一致している。

また、この場合の解 $g(x)$ は、

$$g(x) = C_1 (L-x)^{3/2} J_{3/2}(k(L-x)) = C_3 (\sin k(L-x) - k(L-x) \cos k(L-x))$$

となるが、$kL = n\pi$ より、

$$g(x) = C_3 (-1)^n (\sin(-kx) - k(L-x) \cos(-kx)) = C_4 (\sin kx + k(L-x) \cos kx)$$

となり、これも (32) で $M = L$ としたものに一致する。

つまり、あまり現実的ではなさそうな $M = L$ の式は、$M - L = \delta$ が小さい場合の話を、ある程度ちゃんと近似していることがわかる。

8 最後に

本稿では、$A(x)$ のいくつかの具体例、特に Wikipedia [3] に載っている円錐管、指数関数形、ベッセルホーンの対して、定在波と共鳴による自然倍音列を考察した。

実際には 2 節で述べたように、吹奏楽器としての自然倍音と本稿の共鳴管としての自然倍音はずれがある可能性があり、[7] によれば楽器によってはそれが半音程度になることもあるそうなので、その点では本稿のホーン方程式による管としての共鳴周波数の考察は、残念ながらあまり意味はないかもしれない。

個人的には、吹奏楽器としての自然倍音列を解析すること、および近似としてのホーン方程式 (3) ではなく (1) の非線形方程式の方で、定在波に対応するような周期解の存在や吹奏の気流が自然音階列に与える影響などを考察するのが本来の目標であるが、先はかなり遠そうである。

参考文献

[1] 森口繁一、宇田川銈久、一松信、「岩波 数学公式 III 特殊函数」、岩波書店 (1987)

[2] 寺沢寛一、「自然科学者のための数学概論 [増補版]」、岩波書店 (1983)

[3] Wikipedia、「ウェブスターのホルン方程式」、
`https://ja.wikipedia.org/wiki/ウェブスターのホルン方程式`

[4] N.H. フレッチャー、T.D. ロッシング (岸憲史、久保田秀美、吉川茂 訳)、「楽器の物理学」、シュプリンガー・フェアラーク東京 (2002)

[5] 安藤由典、「新版 楽器の音響学」、音楽の友社 (1996)

[6] 柳田益造 編、「楽器の科学」(サイエンス・アイ新書)、ソフトバンク クリエイティブ (2013)

[7] 足立整治、楽器研究のすすめ – ストロー笛の音響学 –、日本音響学会誌 72 巻 12 号 (2016)、770-776

[8] エリ・ランダウ、イェ・リフシッツ (竹内均 訳)、「流体力学 2」、東京図書 (1971)

[9] 竹野、1 次元ノズル流方程式の導出について、(2022)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/