2009 年 06 月 22 日

糸の方程式の境界条件について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

[1] の 13 章に、つり下げられた糸の自由振動として、次のような方程式が書かれている ($u=u(t,x)\in R$)。

$$u_{tt}-(xu_x)_x=0\quad(t>0,\ 0<x<L)\tag{1}$$
$$u(0,x)=f(x),\quad u_t(0,x)=F(x)\quad(0<x<L)\tag{2}$$
$$u(t,L)=0\quad(t>0)\tag{3}$$

これは、横軸が u、縦軸が x 軸の (u,x) 平面の、$(u,x)=(0,L)$ の位置から長さ L の糸をたらしたときの糸の微小な振動の運動方程式で、$u=u(t,x)$ は、高さ x での糸の横方向の変位を表している。

なお、元の [1] とは少し記号を変えているし、また [1] には u_{tt} の前に定数がついているのであるが、簡単のためここではそれは 1 とした。t のスケール変換を行えば、そのようにしてよいことは容易に確認できる。

この方程式 (1) は 2 階の線形偏微分方程式で、その主要部は

$$u_{tt}-xu_{xx}\tag{4}$$

であるから、$0<x<L$ では双曲型の方程式であり、よって通常なら (1) の方程式の境界条件 (3) はこれだけでは足りず、もう一方の境界 $x=0$ でも境界条件を 1 つ与える必要があるように見える (2 節参照)。

しかし、境界 $x=0$ はこの方程式の特性方向になっていて (特性境界)、しかも $x=0$ では双曲性が退化しているので、通常の双曲型方程式とは状況はだいぶ異なる。

本稿では、(1) をやや一般化した方程式

$$u_{tt}-(xu_{xx}+\mu u_x)=0\quad(t>0,\ 0<x<L)\tag{5}$$

に対して、その境界条件が (3) で足りるのか、それとも $x = 0$ での境界条件

$$u(t,0) = p(t) \quad (t > 0) \tag{6}$$

も必要であるのかについて、[1] の手法、及び数値計算によって考察する。(1) は (5) の $\mu = 1$ の場合になっているが、それについては 3 節、5 節で考察する。

2 $\mu = 1/2$ の場合

この節では、(5) が通常の波動方程式に帰着できる $\mu = 1/2$ の場合についてまず考察する。

通常の波動方程式

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (t > 0,\ 0 < x < L) \tag{7}$$

の場合は、よく知られているように、初期条件 (2) と境界条件 (3) だけでは足りず、$x = 0$ での境界条件 (6) も必要で、それによりそれらを満たす解の存在と一意性が保証される。

今、$\mu = 1/2$ の場合の (5) を考え、$\eta = 2\sqrt{x}$ とし、$u(t,x) = \bar{u}(t,\eta)$ とすると、$0 < \eta < 2\sqrt{L}$ で、

$$u_x = \bar{u}_\eta \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad u_{xx} = \bar{u}_{\eta\eta}\frac{1}{x} - \bar{u}_\eta \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

より、

$$xu_{xx} + \frac{1}{2}u_x = \bar{u}_{\eta\eta} - \bar{u}_\eta \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\bar{u}_\eta \frac{1}{\sqrt{x}} = \bar{u}_{\eta\eta}$$

となるので、(2), (3), (5), (6) は、

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \bar{u}_{\eta\eta} = 0 \quad (t > 0,\ 0 < \eta < 2\sqrt{L}), \\ \bar{u}(0,\eta) = f(\eta^2/4), \quad \bar{u}_t(0,\eta) = F(\eta^2/4) \quad (0 < \eta < 2\sqrt{L}), \\ \bar{u}(t,0) = p(t), \quad \bar{u}(t, 2\sqrt{L}) = 0 \quad (t > 0) \end{cases}$$

となり、これは通常の波動方程式 (7) の形なので、これらの初期値境界値によって $\bar{u}(t,\eta)$ が一意に決まり、それにより u が $u(t,x) = \bar{u}(t, 2\sqrt{x})$ と求まることになる。

つまり、$x = 0$ での境界条件 (6) は、少なくとも $\mu = 1/2$ の場合は必要であることになる。

3 $\mu = 1$ の場合

次に、方程式 (5) の $\mu = 1$ の場合

$$u_{tt} = xu_{xx} + u_x \tag{8}$$

に対して、[1] に基づいた手法 (変数分離法) で $x = 0$ での境界条件 (6) の必要性について考察する。

(8) の u を $u = v(t)w(x)$ と変数分離すると、

$$v''(t)w(x) = xv(t)w''(x) + v(t)w'(x)$$

となるので、

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{xw''(x) + w'(x)}{w(x)}$$

と分離でき、これは t のみの式と x のみの式が等しいことを意味するので、この両辺は定数となる。それを c_0 とする。

$c_0 \geq 0$ であると、$v(t)$ は限りなく増大するか、または単調に減少する関数になってしまい、それでは本来の糸の運動に対応する振動する解を表現できないので、$c_0 < 0$ である必要がある。よって $c_0 = -\lambda^2$ $(\lambda > 0)$ と書くことにすると、

$$v''(t) + \lambda^2 v(t) = 0 \quad (t > 0) \tag{9}$$

$$xw''(x) + w'(x) + \lambda^2 w(x) = 0 \quad (0 < x < L) \tag{10}$$

となる。(9) より $v(t)$ は

$$v(t) = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t$$

と求まるが、$w(x)$ はベッセル関数で表されるものとなる。

4 ベッセル関数

ベッセル関数は、例えば [1], [2], [3], [4], [5] などに詳しく書かれているが、ここではその概要を述べる。詳しくはそれらを参照のこと。

ベッセル関数は、次のベッセルの微分方程式を満たす関数である ($\nu \geq 0$ は定数)。

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{11}$$

この (11) は 2 階の線形微分方程式であるから、2 つの一次独立な解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ を持ち、その一般解は

$$y = C_3y_1(x) + C_4y_2(x)$$

と書ける。その 1 つの解が **第 1 種ベッセル関数** $J_\nu(x)$

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^2}{2^{2n+\nu}} \frac{x^{2n}}{n!\mathit{\Gamma}(n+\nu+1)} \tag{12}$$

であり、(12) の ν の代わりに $-\nu$ とした $J_{-\nu}(x)$ も (11) の解となる。

ν が整数でなければ $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ は一次独立であるが、ν が整数 n である場合は、

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

となってしまうため、この 2 つは一次独立にならない。そのため、$J_n(x)$ に一次独立なもう 1 つの解を得るために、以下のように定義される **第 2 種ベッセル関数** (又は **ノイマン関数** と呼ばれる) $Y_\nu(x)$ が導入される。

$$Y_\nu(x) = \begin{cases} \dfrac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} & (\nu \text{ が整数でないとき}) \\ \lim\limits_{\nu\to n} Y_\nu(x) & (\nu = n \text{ が整数のとき}) \end{cases}$$

この $Y_\nu(x)$ は、ν が整数であろうとなかろうと $J_\nu(x)$ とは一次独立になるので、よって ν が整数でないときは、

$$y = C_3J_\nu(x) + C_4J_{-\nu}(x), \quad y = C_3J_\nu(x) + C_4Y_\nu(x)$$

のいずれも (11) の一般解であり、ν が整数 n のときは、

$$y = C_3J_n(x) + C_4Y_n(x)$$

が (11) の一般解となる。

$J_\nu(x)$ は、(12) からもわかるが、$0 < x < L$ では有界な関数で、$x = 0$ の付近では

$$J_\nu(x) = O(x^\nu) \tag{13}$$

となっている。一方、ν が整数でない場合の $J_{-\nu}(x)$ は、

$$J_{-\nu}(x) = O(x^{-\nu}) \tag{14}$$

となる。そして、ν が整数 n の場合の $Y_n(x)$ は、$x = 0$ の近くでは有界ではなく、

$$Y_0(x) = O(\log x), \quad Y_n(x) = O(x^{-n}) \quad (n \geq 1) \tag{15}$$

であることが知られている。

ベッセル関数 $J_\nu(x)$ は、$x > 0$ に無限個の離散的な零点

$$0 < \tau_{\nu,1} < \tau_{\nu,2} < \tau_{\nu,3} < \cdots \tag{16}$$

を持つことが知られていて、この零点に関して次のような直交性が成り立つことが知られている。

$$\int_0^1 xJ_\nu(\tau_{\nu,j}x)J_\nu(\tau_{\nu,k}x)dx = \frac{\delta_{j,k}}{2}J_{\nu+1}(\tau_{\nu,j})^2$$

ここで、$\delta_{j,k} = 0$ $(j \neq k)$, $\delta_{j,j} = 1$ である。そして、この直交性により $0 < x < 1$ 上の関数 $\phi(x)$ を、

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\nu(\tau_{\nu,n}x), \quad a_n = \frac{2}{J_{\nu+1}(\tau_{\nu,n})^2}\int_0^1 x\phi(x)J_\nu(\tau_{\nu,n}x)dx \tag{17}$$

のようにベッセル関数により級数展開できる (**フーリエ・ベッセル展開** と呼ばれる) が、その展開の完全性、すなわちすべての関数をこのように表すことができるかどうかについては、[5] のベッセル関数の項にその結果のみ紹介されている ($L^2(0,1)$ での完全性)。

5 ベッセルの方程式への帰着と境界条件

さて、3 節に戻って、(10) を満たす $w(x)$ を求めることにする。それには、方程式 (10) を変数変換して、ベッセルの微分方程式 (11) に帰着させる。

今、

$$w = x^{\alpha}\hat{w}(\hat{x}), \quad \hat{x} = \gamma x^{\beta} \quad (\gamma > 0,\ \beta > 0) \tag{18}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
w'(x) &= \alpha x^{\alpha-1}\hat{w} + \gamma\beta x^{\alpha+\beta-1}\hat{w}' \\
&= x^{\alpha-1}(\alpha\hat{w} + \beta\hat{x}\hat{w}'), \\
w''(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\hat{w} + \gamma\beta(2\alpha+\beta-1)x^{\alpha+\beta-2}\hat{w}' + \gamma^2\beta^2 x^{2\beta+\alpha-2}\hat{w}'' \\
&= x^{\alpha-2}\{\alpha(\alpha-1)\hat{w} + \beta(2\alpha+\beta-1)\hat{x}\hat{w}' + \beta^2\hat{x}^2\hat{w}''\}
\end{aligned}$$

となるので、これらを (10) に代入して整理すると、

$$\hat{x}^2\hat{w}'' + \frac{2\alpha+\beta}{\beta}\hat{x}\hat{w}' + \frac{\alpha^2+\lambda^2 x}{\beta^2}\hat{w} = 0 \tag{19}$$

が得られる。よって、

$$\frac{\lambda^2}{\beta^2}x = \hat{x}^2\ (= \gamma^2 x^{2\beta})$$

となるように $\beta = 1/2, \gamma = 2\lambda$ とし、

$$\frac{2\alpha+\beta}{\beta} = 1$$

となるように、$\alpha = 0$ とすると、(19) は $\nu = 0$ のベッセルの方程式となる。よって、この $\hat{w}$ は、4 節に述べたように

$$\hat{w} = C_3 J_0(\hat{x}) + C_4 Y_0(\hat{x})$$

と書けるので、元の $w(x)$ に戻すと、

$$w(x) = \hat{w}(2\lambda\sqrt{x}) = C_3 J_0(2\lambda\sqrt{x}) + C_4 Y_0(2\lambda\sqrt{x}) \tag{20}$$

となる。

この $w(x)$ は、もちろん $x = 0$ では有界である必要があるが、4 節に述べたように Y_0 は $x = 0$ で有界ではないので、$C_4 = 0$ でなければならない。よって、$w(x)$ は $x = 0$

での境界条件がないまま (厳密には、「$w(0)$ は有限である」という境界条件によって)、1 つの任意定数が決定されて、

$$w(x) = C_3 J_0(2\lambda\sqrt{x})$$

となる。これを 3 節の $u = v(t)w(x)$ に戻せば、

$$u = (A\cos\lambda t + B\sin\lambda t)J_0(2\lambda\sqrt{x}) \tag{21}$$

と書ける。

さて、この (21) が、境界条件 (3) を満たすためには、

$$J_0(2\lambda\sqrt{L}) = 0$$

すなわち、$2\lambda\sqrt{L}$ が $J_0(x)$ の零点である必要がある。よって 4 節の (16) により、λ は

$$\lambda = \lambda_j = \frac{\tau_{0,j}}{2\sqrt{L}} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

という離散的な値のいずれかであることになる。

方程式 (8) は線形であるから、この λ_j に対する (21) の重ね合わせ

$$u = \sum_{j=1}^{\infty}(A_j\cos\lambda_j t + B_j\sin\lambda_j t)J_0(2\lambda_j\sqrt{x}) \quad (\lambda_j = \tau_{0,j}/(2\sqrt{L})) \tag{22}$$

も (8) の解となる。これが初期条件 (2) を満たすとすると

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(2\lambda_j\sqrt{x}), \quad F(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j B_j J_0(2\lambda_j\sqrt{x}) \tag{23}$$

となるが、4 節のフーリエ・ベッセル展開 (17) により

$$A_j = \frac{2}{J_1(\tau_{0,j})^2}\int_0^1 \xi f(L\xi^2)J_0(\tau_{0,j}\xi)d\xi = \frac{1}{LJ_1(\tau_{0,j})^2}\int_0^L f(x)J_0(\lambda_j\sqrt{x})dx, \tag{24}$$

$$B_j = \frac{1}{L\lambda_j J_1(\tau_{0,j})^2}\int_0^L F(x)J_0(\lambda_j\sqrt{x})dx \tag{25}$$

となり、この A_j, B_j とフーリエ・ベッセル展開の完全性により、(23) が確かに $f(x)$, $F(x)$ を表すことがわかる。よってこの A_j, B_j による (22) は、方程式 (8) の初期条件 (2) と境界条件 (3) を満たす解となることがわかる。

つまり、$\mu = 1$ の場合の方程式 (8) は、$x = 0$ での境界条件 (6) は必要なく解がちゃんと決定することになり、これは、$\mu = 1/2$ の場合とは状況が異なる。つまり $x = 0$ での境界条件 (6) の必要性は、方程式 (5) の主要部 (4) のみでは決定せず、低階の項 u_x の係数に依存するものであることがわかる。

6 一般の μ の場合

それでは、一般の μ の場合はどうなるのかを次に考えてみることにする。

5 節の $\mu = 1$ の場合の議論を見れば、$x = 0$ での境界条件の不要性は、結局 w の $x = 0$ での有界性から (20) の $C_4 = 0$ が導かれることに起因することがわかる。よって、一般の μ の場合にも 3 節、5 節と同様の変数分離法を用いて、x に関する方程式をベッセルの方程式に帰着させることで考察してみることにする。

方程式 (5) に対して $u = v(t)w(x)$ とすると、

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{xw''(x) + \mu w'(x)}{w(x)} = -\lambda^2$$

となるので、

$$\begin{aligned} &v(t) = C_1 \cos\lambda t + C_2 \sin\lambda t \quad (t > 0) \\ &xw''(x) + \mu w'(x) + \lambda^2 w(x) = 0 \quad (0 < x < L) \end{aligned}$$

となる。5 節と同様に w を (18) のように置いて変形すると、この場合は

$$\hat{x}^2\hat{w}'' + \frac{2\alpha + \beta + \mu - 1}{\beta}\hat{x}\hat{w}' + \frac{\alpha(\alpha + \mu - 1) + \lambda^2 x}{\beta^2}\hat{w} = 0 \tag{26}$$

となるので、よって

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 2\lambda, \quad \alpha = \frac{1 - \mu}{2}$$

とすることで

$$\frac{\lambda^2}{\beta^2}x = \hat{x}^2, \quad \frac{2\alpha + \beta + \mu - 1}{\beta} = 1, \quad \frac{\alpha(\alpha + \mu - 1)}{\beta^2} = -(1 - \mu)^2$$

となって、よって (26) は

$$\hat{x}^2\hat{w}'' + \hat{x}\hat{w}' + \{\hat{x}^2 - (1-\mu)^2\}\hat{w} = 0$$

の形、すなわち $\nu = |1-\mu|$ のベッセルの微分方程式となる。

まず μ が整数でない場合は、$\nu = |1-\mu|$ も整数ではなく、よって $\hat{w}$ は

$$\hat{w} = C_3 J_\nu(\hat{x}) + C_4 J_{-\nu}(\hat{x})$$

と書けるので、これにより $w(x)$ は

$$w(x) = x^{(1-\mu)/2}\{C_3 J_\nu(2\lambda\sqrt{x}) + C_4 J_{-\nu}(2\lambda\sqrt{x})\} \tag{27}$$

となるが、(13) より $x^{(1-\mu)/2}J_\nu(2\lambda\sqrt{x})$ は

$$x^{(1-\mu)/2}J_\nu(2\lambda\sqrt{x}) = x^{(1-\mu)/2}(\sqrt{x})^\nu O(1) = x^{(1-\mu+|1-\mu|)/2}O(1)$$

となるので、これはどんな μ に対しても $x=0$ の近くで有界となる。一方、(14) より $x^{(1-\mu)/2}J_{-\nu}(2\lambda\sqrt{x})$ は

$$x^{(1-\mu)/2}J_{-\nu}(2\lambda\sqrt{x}) = x^{(1-\mu-|1-\mu|)/2}O(1)$$

となるので、これは $\mu<1$ ならば有界であるが、$\mu>1$ ならば有界ではない。つまり、$\mu<1$ ならば (27) の C_4 は残るが、$\mu>1$ ならば $C_4=0$ ではなくてはならないことになる。

次に μ が整数の場合は、$\nu = |1-\mu|$ も整数なので、

$$\hat{w} = C_3 J_\nu(\hat{x}) + C_4 Y_\nu(\hat{x})$$

より、

$$w(x) = x^{(1-\mu)/2}\{C_3 J_\nu(2\lambda\sqrt{x}) + C_4 Y_\nu(2\lambda\sqrt{x})\} \tag{28}$$

となる。$x^{(1-\mu)/2}J_\nu(2\lambda\sqrt{x})$ は μ が整数でない場合と同様に $x=0$ で常に有界であるが、$x^{(1-\mu)/2}Y_\nu(2\lambda\sqrt{x})$ は (15) より、$\mu=1$ のときは

$$x^0 Y_0(2\lambda\sqrt{x}) = O(\log x)$$

より有界ではなく、$\mu \neq 1$ のときは、

$$x^{(1-\mu)/2}Y_\nu(2\lambda\sqrt{x}) = x^{(1-\mu)/2}(\sqrt{x})^{-\nu}O(1) = x^{(1-\mu-|1-\mu|)/2}O(1)$$

となるので、やはり $\mu < 1$ ならば有界、$\mu > 1$ ならば有界ではない。よって、μ が整数の場合も $\mu < 1$ ならば $w(x)$ は有界なので (28) の C_4 は残るが、$\mu \geq 1$ ならば有界ではないので $C_4 = 0$ でなくてはならない。

結局以上をまとめると、以下のようになる。

- $\mu < 1$ の場合は、(27), (28) の C_4 が残るので、それを決定するために $x = 0$ での境界条件 (6) が必要
- $\mu \geq 1$ の場合は、(27), (28) の C_4 は、w が有界であるためには 0 ではなくてはならず、よって $x = 0$ での境界条件 (6) は不要

7 数値計算

6 節の考察により、$\mu < 1$ か $\mu \geq 1$ かで $x = 0$ での境界条件 (6) の要、不要が分かれることがわかったが、それを数値計算結果と比較してみることにする。

それは、(5) の数値計算を通常の差分で考えると、その計算方法は μ が 1 より大きいか小さいかとは無関係に計算できてしまうからで、つまり差分の作り方によって

1. $\mu < 1$ で、境界条件 (6) を必要とする計算方法の場合
2. $\mu \geq 1$ で、境界条件 (6) を必要とする計算方法の場合
3. $\mu < 1$ で、境界条件 (6) を使わない計算方法の場合
4. $\mu \geq 1$ で、境界条件 (6) を使わない計算方法の場合

の 4 通りがあることになるが、6 節の考察により 1. と 4. は正しく、2. は無用な境界条件を与えていることになっていて、逆に 3. は必要な境界条件がない状態になっているはずである。本節では、これらの計算方法を実際にどのように行うのか、そしてその結果と 6 節の考察との関係について紹介する。

方程式 (5) を普通に差分化すると

$$\begin{aligned} &\frac{u(t+\Delta t, x) - 2u(t,x) + u(t-\Delta t, x)}{(\Delta t)^2} \\ &= x\frac{u(t, x+\Delta x) - 2u(t,x) + u(t, x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} + \mu\frac{u(t, x+\Delta x) - u(t,x)}{\Delta x} \end{aligned} \tag{29}$$

のようなものが考えられるが、これだと $x=0$ の近くで、$x=\Delta x$ での u の値を計算するときに u_{xx} の差分の $u(t,0)$ の値を用いるので $x=0$ での境界条件が必要になってしまう。これを解消するには、u_{xx} の差分の $u(t,x-\Delta x)$ の項に、x 倍の代わりに $(x-\Delta x)$ 倍がついていればよく、そうすれば $u(t,0)$ の計算のときはそれが 0 倍となって消えてくれることになる。つまり、xu_{xx} の差分の代わりに $(xu)_{xx}$ の差分を考えればよいことになる。

よって、xu_{xx} を

$$xu_{xx} = (xu)_{xx} - 2u_x$$

と変形して、$(xu)_{xx}$ の差分を

$$\frac{(x+\Delta x)u(t,x+\Delta x) - 2xu(t,x) + (x-\Delta x)u(t,x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{30}$$

とすればよい。

残る 1 階微分の u_x の項は、(29) では前進差分としているが、その場合には $x=0$ での境界条件は必要なく、これを後退差分とすると $x=0$ での境界条件が必要となる。

結局、方程式 (5) を、

$$u_{tt} = (xu)_{xx} + (\mu-2)u_x$$

と書き直した上で、2 階微分の項は $x=0$ での境界条件が不要な形 (30) を利用することにして、1 階微分は前進差分とした

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t+\Delta t,x) - 2u(t,x) + u(t-\Delta t,x)}{(\Delta t)^2}\\
&\quad = \frac{(x+\Delta x)u(t,x+\Delta x) - 2xu(t,x) + (x-\Delta x)u(t,x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\\
&\qquad +(\mu-2)\frac{u(t,x+\Delta x) - u(t,x)}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{31}$$

を $x=0$ での境界条件が不要な差分 (4 通りのうちの 3. と 4.) とし、u_x の差分を後退差分にした

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t+\Delta t,x) - 2u(t,x) + u(t-\Delta t,x)}{(\Delta t)^2}\\
&\quad = \frac{(x+\Delta x)u(t,x+\Delta x) - 2xu(t,x) + (x-\Delta x)u(t,x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\\
&\qquad +(\mu-2)\frac{u(t,x) - u(t,x-\Delta x)}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{32}$$

を $x = 0$ での境界条件が必要な差分 (4 通りのうちの 1. と 2.) として数値計算することにする。

以下にその数値計算結果を示すが、いずれも $L = 1$、初期値は

$$u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = \sin 2\pi x$$

とし、境界条件が必要な差分では $x = 0$ での境界条件は

$$u(t, x) = \sin t$$

としている。また、x 方向の分割数は $N = 500$ ($\Delta x = L/N$) で、Δt は $\Delta t = \Delta x$ として計算した。以下に示すグラフは、いずれも $t = 0.2$ 毎の $u = u(t, x)$ のグラフを (x, u) 平面に約 50 本重ねて表示している。

まずは、境界条件をつけた差分 (32) による結果を示す。この差分では、$\mu < 1$ の場合は適切で、$\mu \geq 1$ の場合は不適切、すなわち境界条件が余計になっているはずである。

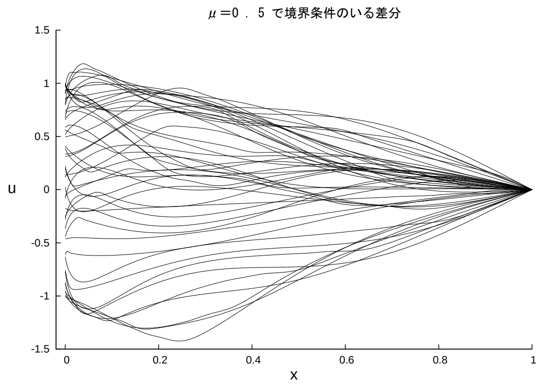

図 1: $\mu = 0.5$、境界条件つき (全体図)

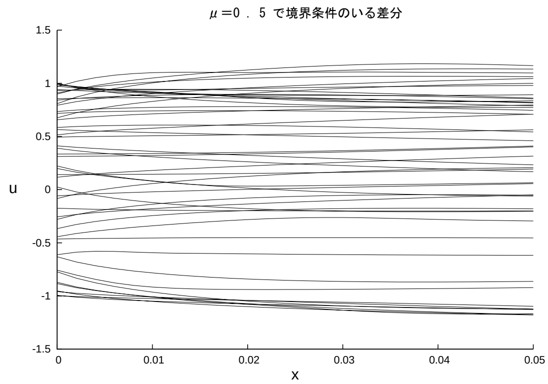

図 2: $\mu = 0.5$、境界条件つき (境界付近)

図 1 を見ると、$x = 0$ の付近では境界条件に引きずられて糸が不自然に折れ曲がっているように見えなくもないが、$x = 0$ の付近を拡大した図 2 を見ると、そうでもない感じがする。

それに対して、$\mu = 1.0$ (図 3, 4), $\mu = 1.5$ (図 5, 6) と μ が大きくなるにつれ、糸がかなり不自然に境界条件に引きずられ、$x = 0$ の近くで急に曲がっていることがわかる。つまり、$x = 0$ の付近では境界条件に拘束されて不自然に急激に折れ曲がっていて、それは本来は余計な境界条件のためにそのように不自然な形になっているのだと想像される。

次は、境界条件の不要な差分 (31) による結果を示す。この差分では、$\mu \geq 1$ の場合が適切で、$\mu < 1$ の場合は境界条件が足りないはずである。

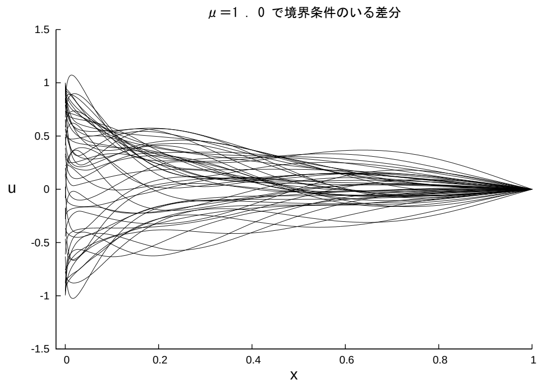

図 3: $\mu = 1.0$、境界条件つき (全体図)

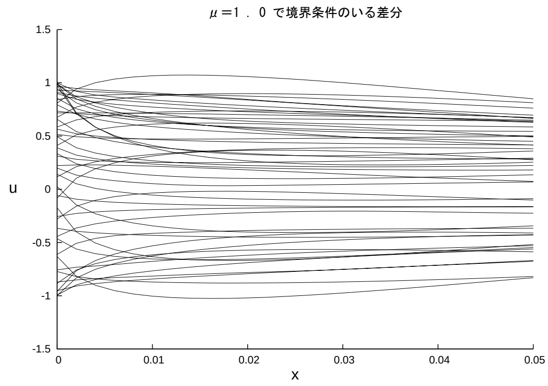

図 4: $\mu = 1.0$、境界条件つき (境界付近)

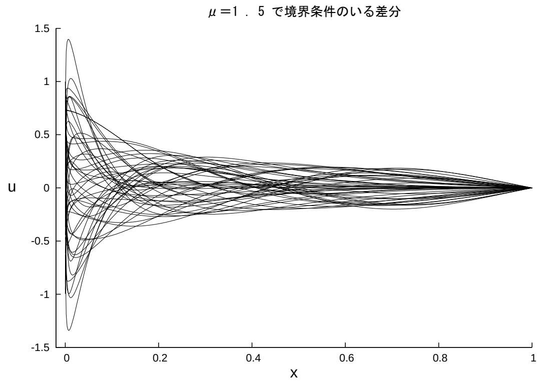

図 5: $\mu = 1.5$、境界条件つき (全体図)

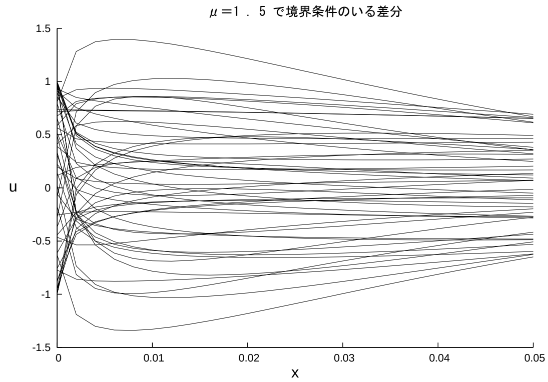

図 6: $\mu = 1.5$、境界条件つき (境界付近)

図 7, 8 は、その $\mu \geq 1$ の場合のグラフであるが、μ が大きい方が $x = 0$ でのしなり (変動) が大きいと感じる (u 軸の目盛りに注意) が、特に問題は見られない。

一方、$\mu < 1$ の場合は、$\mu = 0.5$ (図 9)、$\mu = 0.0$ (図 10) も、$x = 0$ での振動が小さくなっているように感じるが、それほど問題があるようには見えない。

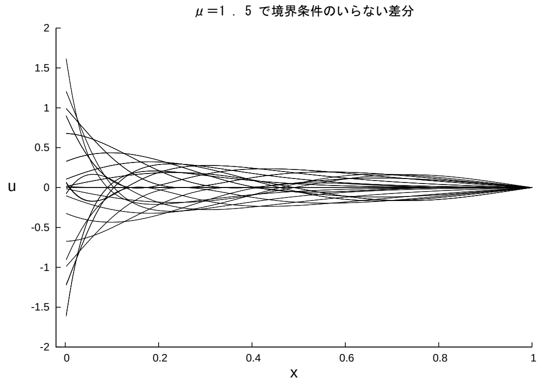

図 7: $\mu = 1.5$、境界条件なし (全体図)

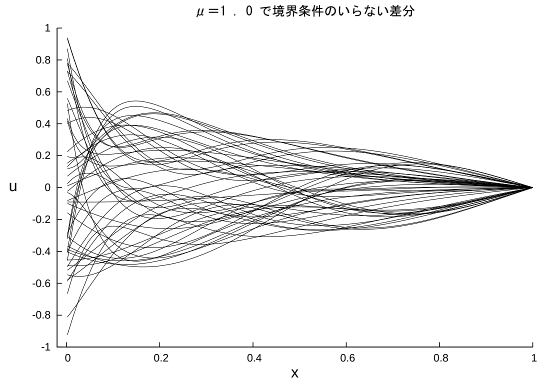

図 8: $\mu = 1.0$、境界条件なし (全体図)

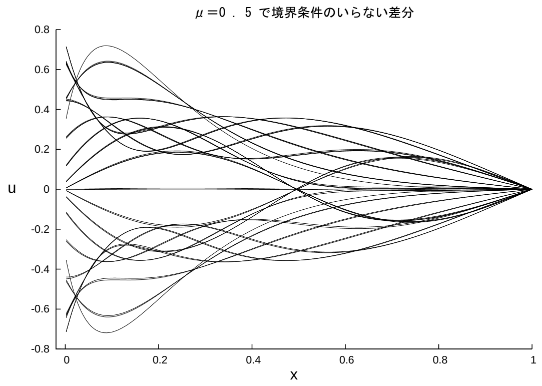

図 9: $\mu = 0.5$、境界条件なし (全体図)

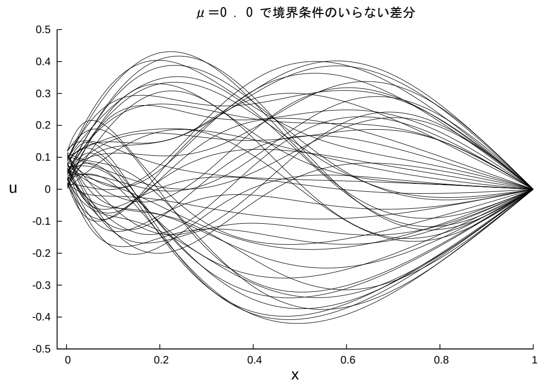

図 10: $\mu = 0.0$、境界条件なし (全体図)

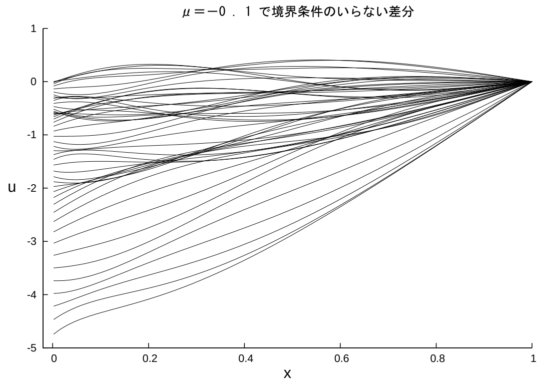

図 11: $\mu = -0.1$、境界条件なし (全体図)

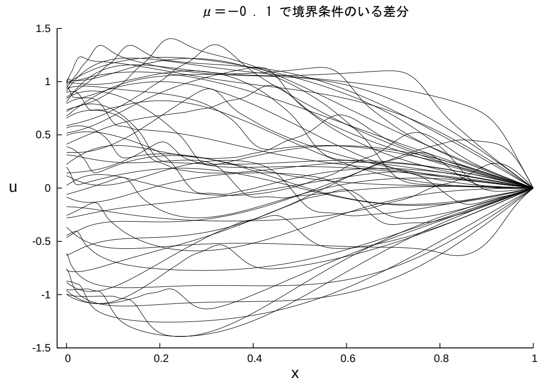

図 12: $\mu = -0.1$、境界条件つき (全体図)

しかし、μ をさらに小さくして負の値にすると、境界条件なしの差分 (31) では解の有界性が崩れて、どんどん負の方に絶対値が大きくなっていく (図 11)。これを、同じ $\mu = -0.1$ の値に対する境界条件つきの差分 (32) の結果 (図 12) と比較すると、これもやや変わった感じのグラフではあるが、安定性という点では境界条件つきの差分 (32) の方がましなように思う。この不安定性は、本来必要な境界条件が足りないために起きているのであろうが、この図 11 がそれを明確に表しているのかどうかは、しかしよくはわからない。

8 最後に

本稿では、[1] を元に、線形の特性境界値問題 (2), (3), (5) の境界条件 (6) の必要性について考察し、変数分離法によりそれが $\mu = 1$ を境に分かれるということがわかったが、数値計算の結果は $\mu = 1$ を境に急激に分かれるというものではなく、特に境界条件のいらない差分 (31) では、本来は不適切であるはずの $0 \leq \mu \leq 1$ の場合についてもそれほど強い不自然さは見られないといった結果となった。むしろ数値的には $\mu = 0$

を境にかなり不安定になるようであるが、これが何を意味しているのかはよくはわからない。

よって、数値計算によって完全に裏付けられたとは言いがたいが、大まかな傾向として、境界条件のいらない差分 (31) は小さい μ に対しては適切ではなく、境界条件つきの差分 (32) は大きい μ に対しては適切ではない、ということは、少なくとも見てとれたのではないかと思う。

なお本稿は、慶応大学の高山正宏先生に [1] を紹介していただき、そして色々と教えて頂いたことを元にして書いたものである。さらに、高山先生には、本稿の原稿を見て頂いた上で、以下の指摘を頂いた。

- 方程式 (5) は、[1] の章末問題で、線密度が $x^{\mu-1}$ に比例する場合の糸の振動として紹介されている。
- 5 節で (24), (25) による級数 (22) が (2), (3), (8) の解であると述べているが、それはあくまで形式解であって、厳密解になっているかどうかは収束性の議論等が必要であろう。

これらは確かにご指摘の通りである。高山先生にはこの場を借りて深くお礼申し上げたい。

参考文献

[1] コシリヤコフ、グリニエル、スミルノフ (藤田宏、池部晃生、高見穎郎訳)「物理・工学における偏微分方程式」上、岩波書店 (1974)

[2] E. クライツィグ (北原和夫訳) 「常微分方程式」第 5 版、培風館 (1987)

[3] クーラン、ヒルベルト (銀林浩訳) 「数理物理学の方法」2、東京図書 (1959)

[4] 寺沢寛一「自然科学者のための数学概論」増訂版、岩波書店 (1983)

[5] 日本数学会編集「岩波 数学辞典」第 4 版、岩波書店 (2007)