2022 年 11 月 14 日

ある定積分について その 2

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

研究の途中で、ある定積分

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{1}{x}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| dx \tag{1}$$

が出てきたが、この値を求めるのはあまり易しくはない。本稿では、その値の計算や、これに関するいくつかの性質を紹介する。

2 被積分関数の性質

本稿では、(1) の被積分関数を $f_0(x)$ とする。

$$f_0(x) = \frac{1}{x}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \tag{2}$$

これは、$x = -1, 0, 1$ 以外で定義される関数だが、ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to 0} f_0(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = 2$$

となるので、$f_0(0) = 2$ と定義すれば、$x = 0$ でも連続になる。また、

$$f_0(-x) = -\frac{1}{x}\log\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right| = \frac{1}{x}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = f_0(x)$$

より $f_0(x)$ は偶関数なので、主な性質に関しては $x > 0$ のみを考えればよい。

$0 < x < 1$ では

$$\frac{x+1}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x} > 1$$

$x > 1$ では

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} > 1$$

なので、$x > 0$ では $f_0(x) > 0$ となる。

また、$x \to 1$ では、

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \to \infty$$

となり、$x \to \infty$ では、

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \log \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} \log \frac{1+1/x}{1-1/x} \to 0 \times \log 1 = 0$$

となる。つまり、(1) の I_0 は、$x = 1$ と $x = \infty$ の 2 箇所に関して広義積分になっていることがわかる。

ただしそのオーダーを考えると、$x \to 1$ に関しては、

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \left(\log(x+1) - \log|x-1| \right) = \log 2 + o(1) - (1 + o(1)) \log|x-1|$$

なので、$x = 1$ の付近では可積分、$x \to \infty$ に関しては、

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \log \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = \frac{1}{x} \frac{2}{x-1} (1 + o(1))$$

なので、$x = \infty$ 付近でも可積分となり、よって (1) は有限な値に収束することがわかる。

3 積分の変換

$x = 1$ での反転 $x = 1/y$ によって、$f_0(x)$ は

$$f_0\left(\frac{1}{y}\right) = y \log \left| \frac{1+1/y}{1-1/y} \right| = y \log \left| \frac{y+1}{y-1} \right| = y^2 f_0(y) \tag{3}$$

となるので、この置換により積分 $I_1 = \int_0^1 f_0(x)dx$ は、

$$I_1 = \int_0^1 f_0(x)dx = \int_1^\infty f_0\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,dy = \int_1^\infty f_0(y)dy$$

が成立する。よって、

$$I_0 = \int_0^\infty f_0(x)dx = \int_0^1 f_0(x)dx + \int_1^\infty f_0(x)dx = 2I_1$$

となり、$(0,1)$ 乗の積分値 I_1 のみを考えればよいことになる。

I_1 の値も容易には求まらないが、部分積分すると、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (\log x)' \log\frac{1+x}{1-x}\,dx \\ &= \left[\log x \log\frac{1+x}{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (\log x)\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx \end{aligned} \tag{4}$$

となる。

$x \to 1-0$ では、

$$\log x = O(x-1), \quad \log\frac{1+x}{1-x} = \log 2 - \log(1-x) + o(1)$$

$x \to +0$ では、

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log\left(1+\frac{2x}{1-x}\right) = O(x)$$

なので、いずれの極限でも

$$\log x \log\frac{1+x}{1-x} \to 0 \tag{5}$$

が成り立つことがわかる。よって、$f_1(x)$ を

$$f_1(x) = -\frac{2}{1-x^2}\log|x| = \frac{2}{x^2-1}\log|x| \tag{6}$$

とすると、(4),(5) より

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)dx \tag{7}$$

となる。この $f_1(x)$ は、偶関数で、$x > 0$ では正であり、

$$\lim_{x\to 1} f_1(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2\log x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{x\cdot 2x} = 1$$

より $x = 1$ では $f_1(1) = 1$ とすれば連続となり、$f_1(+0) = \infty$、$f_1(\infty) = 0$ となるが、$x = 0$ 付近、$x = \infty$ 付近でも可積分となることは容易にわかる。

さらに、$x = 1/y$ の反転で、

$$f_1\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{2}{1 - 1/y^2}\log\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{2y^2}{y^2 - 1}\log|y| = y^2 f_1(y)$$

となり、f_0 の (3) と同じ性質を持つので、f_1 に対しても

$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)dx = \int_1^\infty f_1(y)dy, \quad I_0 = 2I_1 = \int_0^\infty f_1(x)dx$$

が成立する。

さらにもう一つ別な置換も紹介する。$(0,1)$ での $f_0(x)$ の積分で $(1+x)/(1-x) = t$ と置換すると $x = (t-1)/(t+1), dx = 2dt/(1+t)^2$ となり、$x = +0, 1-0$ は $t = 1+0, \infty$ に対応し、

$$f_0(x) = \frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{t+1}{t-1}\log t = \frac{(t+1)^2}{2}f_1(t) \tag{8}$$

となるので、

$$I_1 = \int_0^1 f_0(x)dx = \int_1^\infty \frac{(t+1)^2}{2}f_1(t)\frac{2dt}{(1+t)^2} = \int_1^\infty f_1(t)dt \tag{9}$$

となる。つまり、この置換でも部分積分と同じ結果 (7) が得られる。

4 積分値

さて、I_1 の値であるが、f_0, f_1 ともに留数を利用しても積分値は求まらず、別な方法が必要になる。

数学辞典 [1] を見ると、付録 (公式 9 V) に

$$I_1 = \int_0^1 f_0(x)dx = \frac{\pi^2}{4} \tag{10}$$

が書かれている。また、数表 [2] (2.6.5 p491) には、

$$J_\mu^n = \int_0^1 \frac{x^{\mu/2-1}}{1-x^\mu} (\log x)^n \, dx \quad (\mu > 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{11}$$

の値が記されていて、n が奇数の場合はこれが Bernoulli 数で表されている。J_2^1 が $f_1(x)$ の積分になっていて $I_1 = -2J_2^1$ なので、I_1 より一般の J_μ^n が分かれば I_1 の値もわかることになる。本節ではこの J_μ^n の値を考える。

この値を求めるために、非負の関数に対する無限和と積分の順序交換の定理を用いる。

定理 1

実数上の任意の区間 K と、K 上の非負の関数列 $\{g_n(x)\}_n$ に対し、

$$\int_K \sum_{n=1}^\infty g_n(x)dx = \sum_{k=1}^\infty \int_K g_n(x)dx \tag{12}$$

が成り立つ。

この定理は、Lebesgue 単調収束定理から直ちに従う。

さて J_μ^n の値を計算する。まず、$x^{\mu/2} = t$ と置換すると、

$$\frac{\mu}{2} x^{\mu/2-1} dx = dt, \quad \log x = \frac{2}{\mu} \log t$$

より J_μ^n は

$$J_\mu^n = \int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\frac{2}{\mu}\left(\frac{2}{\mu}\log t\right)^n dt = (-1)^n\left(\frac{2}{\mu}\right)^{n+1} L_n \tag{13}$$

と書ける。ここで、L_n は

$$L_n = \int_0^1 \frac{1}{1-t^2}(-\log t)^n\, dt$$

とした。この L_n には μ は含まれず、そして $I_1 = 2L_1$ となる。

$0 < t < 1$ では、

$$\frac{1}{1-t^2}(-\log t)^n = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}(-\log t)^n$$

と展開でき、この和の項の個々の積分に対して $-\log t = s$ とすると、$t = e^{-s}$, $dt = -e^{-s}ds$ より、

$$\int_0^1 t^{2k}(-\log t)^n\, dt = \int_0^\infty e^{-(2k+1)s}s^n ds = \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}\int_0^\infty e^{-y}y^n dy$$

となるが、良く知られているように、この最後の積分は Γ 関数で書け、

$$\int_0^\infty e^{-y}y^n dy = \Gamma(n+1) = n!$$

となるから、定理 1 より L_n は

$$L_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}(-\log t)^n\, dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 t^{2k}(-\log t)^n\, dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n!}{(2k+1)^{n+1}}$$

となることがわかる。

$$\frac{L_n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{n+1}}$$

は、いわゆる Riemann の zeta 関数

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

で表すことができる。

$$\zeta(n+1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+1}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{n+1}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^{n+1}}=\frac{L_n}{n!}+\frac{1}{2^{n+1}}\zeta(n+1)$$

より、

$$\frac{L_n}{n!}=\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\zeta(n+1)$$

となるから、結局 (13) より

$$J_\mu^n=(-1)^n\left(\frac{2}{\mu}\right)^{n+1}n!\,\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\zeta(n+1)=(-1)^n n!\,\frac{2^{n+1}-1}{\mu^{n+1}}\zeta(n+1) \tag{14}$$

と表されることになる。

$I_1=-2J_2^1=2L_2$ に関しては、良く知られているように $\zeta(2)=\pi^2/6$ なので、よって I_1 は

$$I_1=-2J_2^1=2\,\frac{3}{4}\zeta(2)=\frac{3}{2}\,\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{4}$$

となってこれで (10) が得られることになる。そして元の I_0 は $I_0=2I_1=\pi^2/2$ となる。

参考文献

[1] 日本数学会編「岩波数学辞典 第 3 版」(1985)、岩波書店

[2] 大槻義彦監修、室谷義昭訳「新数学公式集 I 初等関数」(1991)、丸善