

2019年03月05日

## 軸対称図形の重心

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

### 1 はじめに

以前、重心に関する考察と補題などを紹介したが ([1])、今回は、円や球の一部などの曲線で表現される図形の重心について考える。それらの計算には、本来は線積分や重積分が必要であるが、軸対称性などを利用すると、多少その計算が楽にできる。本稿では、そのような計算を紹介する。

### 2 線積分、面積分、体積分、重心

まずは、線積分、面積分、体積分の定義を復習する。3次元空間 (または2次元平面) 内の曲線を  $t$  をパラメータとして

$$C: P(t) (x(t), y(t), z(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

と表し、その位置ベクトルを  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP(t)}$  とすると、始点  $P(a)$  から  $P(t)$  までの弧長  $s(t)$  は、

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(\tau)| d\tau \quad (1)$$

となる。なお、この  $s$  を  $t$  の代わりに  $C$  のパラメータとして取ることも多い。

$C$  上定義された関数  $f(P) = f(P(t))$  に対して、 $C$  上の  $f(P)$  の線積分は、

$$\int_C f(P) dt = \lim \sum_{j=1}^n f(P_j) \Delta t_j = \int_a^b f(P(t)) dt \quad (2)$$

と定義され、計算される。弧長パラメータによる線積分も同様に、

$$\int_C f(P) ds = \lim \sum_{j=1}^n f(Q_j) \Delta s_j = \int_0^L f(Q(s)) ds = \int_a^b f(P(t)) \frac{ds}{dt} dt \quad (3)$$

により定義され、計算される。なお、

$$Q(s(t)) = P(t), \quad L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt, \quad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$$

である。

3次元空間内の曲面  $S$  を、 $u, v$  をパラメータとして、

$$S: P(u, v) (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

と表し、その位置ベクトルを  $\mathbf{r}(u, v) = \overrightarrow{OP(u, v)}$  とすると、その面積素  $dS$  は

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv \quad (\Delta S \approx |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v) \quad (4)$$

となり、 $S$  上定義された関数  $f(P) = f(P(u, v))$  に対して、 $S$  上の  $f(P)$  の面積分は、

$$\int_S f(P) dS = \lim \sum_{j=1}^n f(P_j) \Delta S_j = \iint_D f(P(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dudv \quad (5)$$

と定義され、計算される。

3次元領域  $V$  上で定義された関数  $f(P) = f(x, y, z)$  に対する  $V$  上の体積分は、

$$\int_V f(P) dv = \lim \sum_{j=1}^n f(P_j) \Delta v_j = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \quad (6)$$

と定義され、計算される。

次に、3次元空間 (または2次元平面) 内の物体の重心の計算式を復習する。

曲線  $C$  が質量を持つ針金のようなものを表しているとき、曲線上の点  $P$  での線密度、すなわち長さ1あたりの質量を  $\rho(P)$  とすると、この  $C$  の重心  $G$  は

$$\overrightarrow{OG} = \lim_n \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \rho(P_j) \Delta s_j}{\sum_{j=1}^n \rho(P_j) \Delta s_j} = \frac{\int_C \mathbf{r} \rho(P) ds}{\int_C \rho(P) ds} \quad (\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}) \quad (7)$$

となる。

同様に、質量を持つ曲面  $S$  の各点  $P$  での面密度、すなわち面積 1 あたりの質量を  $\rho(P)$  とすると、その  $S$  の重心  $G$  は

$$\overrightarrow{OG} = \lim_n \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \rho(P_j) \Delta S_j}{\sum_{j=1}^n \rho(P_j) \Delta S_j} = \frac{\int_S \mathbf{r} \rho(P) dS}{\int_S \rho(P) dS} \quad (8)$$

となる。

また、質量を持つ 3 次元領域  $V$  の各点  $P$  での密度、すなわち体積 1 あたりの質量を  $\rho(P)$  とすると、その  $V$  の重心  $G$  は

$$\overrightarrow{OG} = \lim_n \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \rho(P_j) \Delta v_j}{\sum_{j=1}^n \rho(P_j) \Delta v_j} = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho(P) dv}{\int_V \rho(P) dv} \quad (9)$$

となる。

### 3 回転面の重心

本節では、曲面状の回転図形 (軸対称図形)、すなわちある関数のグラフの回転面に関する重心の計算を考える。

曲面  $S$  を、 $f(x) \geq 0$  ( $a \leq x \leq b$ ) である関数  $h = f(x)$  のグラフを  $x$  軸を中心として回転させてできる回転面 ( $xyz$  空間内の曲面) であるとする。この  $S$  の面密度も  $x$  軸に関して回転対称、すなわち  $x$  座標のみで決まる値だとするが、それを  $\rho(P) = \rho_1(x)$  とする (線密度のようなもの)。その場合、 $S$  の重心  $G$  は、当然  $x$  軸上にあることになるが ( $G(g_x, 0, 0)$ )、それも含めて以下で考察する。

この場合、 $xyz$  空間内に作られる回転面  $S$  は、

$$S: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(x, \theta) = (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta) \quad (a \leq x \leq b, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表されるので、

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta &= (1, f'(x) \cos \theta, f'(x) \sin \theta) \times (0, -f(x) \sin \theta, f(x) \cos \theta) \\ &= (f(x)f'(x), -f(x) \cos \theta, -f(x) \sin \theta) \\ &= f(x)(f'(x), -\cos \theta, -\sin \theta)\end{aligned}$$

より

$$dS = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| dx d\theta = f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx d\theta$$

となり、よって、 $D = [a, b] \times [0, 2\pi)$  とすれば、

$$\begin{aligned}\int_S \rho(P) dS &= \iint_D \rho(P) |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| dx d\theta \\ &= \int_a^b dx \int_0^{2\pi} \rho_1(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} d\theta \\ &= 2\pi \int_a^b \rho_1(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \\ \int_S \mathbf{r} \rho(P) dS &= \iint_D \mathbf{r} \rho(P) |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta| dx d\theta \\ &= \int_a^b \rho_1 f \sqrt{1 + (f')^2} dx \int_0^{2\pi} (x, f(x) \cos \theta, f(x) \sin \theta) d\theta \\ &= \left( 2\pi \int_a^b x \rho_1 f \sqrt{1 + (f')^2} dx, 0, 0 \right)\end{aligned}\tag{10}$$

となるので、重心  $G$  は  $x$  軸上にあり、その  $x$  座標  $g_x$  は

$$g_x = \frac{\int_a^b x \rho_1(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \rho_1(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}\tag{11}$$

となる。

## 4 回転体の重心

次に、立体状の回転図形 (軸対称図形)、すなわち平面内のある領域が作る回転体の重心の計算を考える。

$xh$  平面内の  $h \geq 0$  の部分にある領域  $D$  を  $x$  軸の回りに回転させたときに  $xyz$  空間内に作られる回転体を  $V$  とする。その密度  $\rho(P)$  も  $x$  軸に関して回転対称であるとし、 $D$  内の点  $(x, h)$  のみでそれが決まるとして、それを  $\rho_2(x, h)$  とする ( $\rho(P) = \rho_2(x, h)$ )。

この場合、 $V$  は  $x, h, \theta$  をパラメータとして、

$$V: \mathbf{r} = \mathbf{r}(x, h, \theta) = (x, h \cos \theta, h \sin \theta) \quad ((x, h) \in D, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表される。この  $\mathbf{r}$  のヤコビアンは、

$$|\nabla \mathbf{r}| = \frac{D(x, y, z)}{D(x, h, \theta)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -h \sin \theta & h \cos \theta \end{vmatrix} = h (> 0) \quad (12)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \int_V \rho(P) dv &= \iint_D dx dh \int_0^{2\pi} \rho_2(x, h) h d\theta = 2\pi \iint_D h \rho_2(x, h) dx dh, \\ \int_V \mathbf{r} \rho(P) dv &= \iint_D h \rho_2(x, h) dx dh \int_0^{2\pi} (x, h \cos \theta, h \sin \theta) d\theta \\ &= \left( 2\pi \iint_D x h \rho_2(x, h) dx dh, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

となるので、重心  $G$  は  $x$  軸上にあり、その  $x$  座標  $g_x$  は

$$g_x = \frac{\iint_D x h \rho_2(x, h) dx dh}{\iint_D h \rho_2(x, h) dx dh} \quad (13)$$

となる。

特に、領域  $D$  が、ある関数  $h = f(x)$  の下の部分、すなわち、

$$D = \{(x, h); a \leq x \leq b, 0 \leq h \leq f(x)\}$$

であり、かつ密度  $\rho_2(x, h)$  が  $h$  によらず一定、すなわち  $\rho_2(x, h) = \rho_3(x)$  である場合は、

$$\begin{aligned} \iint_D h \rho_2(x, h) dx dh &= \int_a^b \rho_3(x) dx \int_0^{f(x)} h dh = \frac{1}{2} \int_a^b \rho_3(x) f(x)^2 dx, \\ \iint_D x h \rho_2(x, h) dx dh &= \int_a^b x \rho_3(x) dx \int_0^{f(x)} h dh = \frac{1}{2} \int_a^b x \rho_3(x) f(x)^2 dx \end{aligned}$$

より、 $g_x$  は

$$g_x = \frac{\int_a^b x \rho_3(x) f(x)^2 dx}{\int_a^b \rho_3(x) f(x)^2 dx} \quad (14)$$

となる。

## 5 平面軸対称図形の重心

次に、平面の軸対称図形の重心も簡単に公式を紹介する。

$x$  軸に関して対称な平面図形は、当然その重心も  $x$  軸にある。

例えば、 $y \geq 0$  にある曲線  $C: y = f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) の各点に線密度  $\rho_4(x)$  が定義されていて、それと  $x$  に関して対称な曲線  $y = -f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) に同じ線密度を与え、その両者の曲線を合わせた図形の重心の  $x$  座標  $g_x$  は、 $\mathbf{r} = (x, f(x))$  より、

$$\frac{ds}{dx} = |(1, f'(x))| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

なので、

$$g_x = \frac{2 \int_C x \rho(P) ds}{2 \int_C \rho(P) ds} = \frac{\int_a^b x \rho_4(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \rho_4(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx} \quad (15)$$

と求まる。

また、 $y = f(x)$  と  $y = -f(x)$  に囲まれる領域  $D = \{(x, y) : -f(x) \leq y \leq f(x)\}$  に対し、 $D$  内で  $x$  軸に対称な面密度  $\rho_5(x, y)$  ( $\rho_5(x, -y) = \rho_5(x, y)$ ) が定義されているとき、 $dS = dx dy$  より、

$$\iint_D \rho(P) dS = 2 \int_a^b dx \int_0^{f(x)} \rho_5(x, y) dy$$

等より、 $D$  の重心の  $x$  座標  $g_x$  は、

$$g_x = \frac{\iint_D x\rho(P)dS}{\iint_D \rho(P)dS} = \frac{\int_a^b xdx \int_0^{f(x)} \rho_5(x,y)dy}{\int_a^b dx \int_0^{f(x)} \rho_5(x,y)dy} \quad (16)$$

となり、特に  $\rho_5(x,y)$  が  $y$  によらない場合 ( $\rho_5(x,y) = \rho_6(x)$ ) は

$$g_x = \frac{\int_a^b x\rho_6(x)f(x)dx}{\int_a^b \rho_6(x)f(x)dx} \quad (17)$$

となる。

## 6 具体例

本節では具体例として、軸対称物体である、球面の一部、および球の一部の2つのパターンの3種類の図形について計算を行う(図1は中心に近い方から表面を見上げた図)。地球で言えば、(a)は  $\pi/2 - \alpha$  よりも高緯度の地域の地球表面

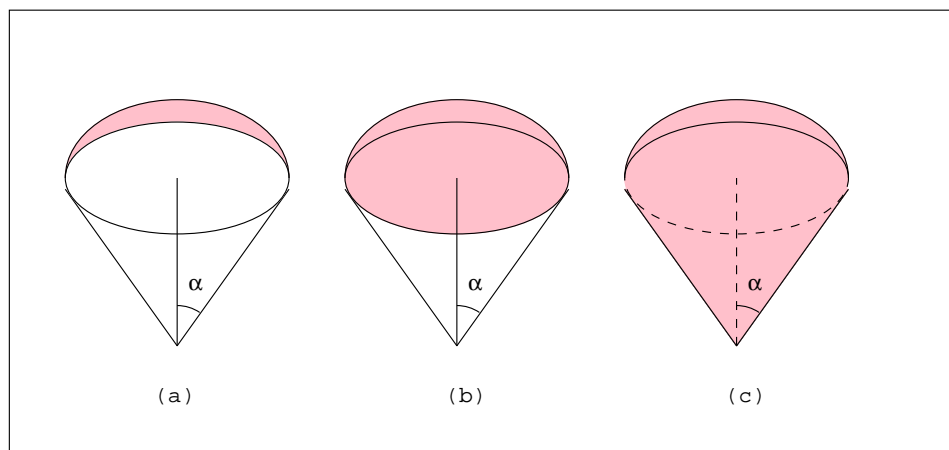


図 1: 考察する図形 (a),(b),(c)

面部分、(b)は地球内部も入れた  $\pi/2 - \alpha$  より高緯度の部分、(c)は、(b)と地球中心を結ぶ領域の円錐も追加した部分、ということになる。なお、簡単のため密度はいずれも一定であるとし、球の半径は  $R$  とする。

まず、(a) は、対称軸を  $x$  軸と見れば、円弧の一部である  $h = h_a(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  ( $R \cos \alpha \leq x \leq R$ ) の  $x$  軸回りの回転面なので、重心の  $x$  座標  $g_a$  は (11) より

$$g_a = \frac{\int_{R \cos \alpha}^R x h_a \sqrt{1 + (h'_a)^2} dx}{\int_{R \cos \alpha}^R h_a \sqrt{1 + (h'_a)^2} dx} \quad (18)$$

となるが、 $h'_a = -x/\sqrt{R^2 - x^2}$  なので、

$$h_a \sqrt{1 + (h'_a)^2} = \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \sqrt{R^2 - x^2 + x^2} = R \quad (19)$$

となるので、

$$\begin{aligned} \int_{R \cos \alpha}^R h_a \sqrt{1 + (h'_a)^2} dx &= \int_{R \cos \alpha}^R R dx = R^2(1 - \cos \alpha), \\ \int_{R \cos \alpha}^R x h_a \sqrt{1 + (h'_a)^2} dx &= \int_{R \cos \alpha}^R x R dx = \frac{R^3}{2}(1 - \cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

より、

$$g_a = \frac{R^3(1 - \cos^2 \alpha)/2}{R^2(1 - \cos \alpha)} = \frac{R}{2}(1 + \cos \alpha) \quad (20)$$

となる。

次は (b) であるが、これも同じ  $h = h_a(x)$  の下の図形の回転体なので、(14) よりその重心の  $x$  座標  $g_b$  は、

$$g_b = \frac{\int_{R \cos \alpha}^R x h_a^2 dx}{\int_{R \cos \alpha}^R h_a^2 dx} \quad (21)$$

となるが、

$$\begin{aligned} \int_{R \cos \alpha}^R h_a^2 dx &= \int_{R \cos \alpha}^R (R^2 - x^2) dx = \left[ R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{R \cos \alpha}^R \\ &= \frac{2}{3} R^3 - \left( R^3 \cos \alpha - \frac{R^3}{3} \cos^3 \alpha \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{R^3}{3}(2 - 3\cos\alpha + \cos^3\alpha) = \frac{R^3}{3}(1 - \cos\alpha)^2(2 + \cos\alpha), \\
\int_{R\cos\alpha}^R x h_a^2 dx &= \int_{R\cos\alpha}^R x(R^2 - x^2)dx = \left[ \frac{R^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{R\cos\alpha}^R \\
&= \frac{R^4}{4} - \left( \frac{R^4}{2} \cos^2\alpha - \frac{R^4}{4} \cos^4\alpha \right) \\
&= \frac{R^4}{4}(1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) = \frac{R^4}{4}(1 - \cos^2\alpha)^2
\end{aligned}$$

より、 $g_b$  は、

$$g_b = \frac{R^4(1 - \cos^2\alpha)^2/4}{R^3(1 - \cos\alpha)^2(2 + \cos\alpha)/3} = \frac{3R}{4} \frac{(1 + \cos\alpha)^2}{2 + \cos\alpha} \quad (22)$$

となる。

最後に (c) であるが、この計算は 2 通り考えられ、一つは、一般的な公式 (9) に戻って、その 3 重積分を 3 次元極座標変換して計算する方法である。対称軸を  $z$  軸と見れば、(c) の積分領域は、

$$\begin{aligned}
(x, y, z) &= (r \cos\phi \cos\theta, r \sin\phi \cos\theta, r \sin\theta) \\
&\left( 0 \leq r \leq R, 0 \leq \phi < 2\pi, \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned} \quad (23)$$

となるからその積分は難しくない。

もう一つは、(c) を (b) と円錐に分離して考える方法であり、それぞれの重心を求めた上で、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{M_1 \overrightarrow{OG'_1} + M_2 \overrightarrow{OG'_2}}{M_1 + M_2}$$

の公式を使えば計算できる。または、同じことであるが、(c) を

$$h = h_c(x) = \begin{cases} x \tan\alpha & (0 \leq x < R\cos\alpha) \\ \sqrt{R^2 - x^2} & (R\cos\alpha \leq x \leq R) \end{cases}$$

の回転体と見て計算することでも計算できる。 $h_c(x)$  の  $x \geq R\cos\alpha$  の部分は  $h_a(x)$  であり、その積分はすでに計算してあるので、あとは  $x < R\cos\alpha$  の部分

のみ計算すればよい。

$$\int_0^{R \cos \alpha} h_c(x)^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \tan^2 \alpha \right]_0^{R \cos \alpha} = \frac{R^3}{3} \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

$$\int_0^{R \cos \alpha} x h_c(x)^2 dx = \left[ \frac{x^4}{4} \tan^2 \alpha \right]_0^{R \cos \alpha} = \frac{R^4}{4} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

となるので、

$$\begin{aligned} \int_0^R h_c(x)^2 dx &= \int_0^{R \cos \alpha} h_c(x)^2 dx + \int_{R \cos \alpha}^R h_a(x)^2 dx \\ &= \frac{R^3}{3} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \frac{R^3}{3} (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha) \\ &= \frac{R^3}{3} (1 - \cos \alpha) (1 + \cos \alpha) \cos \alpha + \frac{R^3}{3} (1 - \cos \alpha) (2 - \cos \alpha - \cos^2 \alpha) \\ &= \frac{2R^3}{3} (1 - \cos \alpha), \\ \int_0^R x h_c(x)^2 dx &= \int_0^{R \cos \alpha} x h_c(x)^2 dx + \int_{R \cos \alpha}^R x h_a(x)^2 dx \\ &= \frac{R^4}{4} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \frac{R^4}{4} (1 - \cos^2 \alpha)^2 = \frac{R^4}{4} \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{R^4}{4} \sin^2 \alpha = \frac{R^4}{4} (1 - \cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

となる。よって、(c) の重心の  $x$  座標  $g_c$  は、

$$g_c = \frac{R^4(1 - \cos^2 \alpha)/4}{2R^3(1 - \cos \alpha)/3} = \frac{3R}{8}(1 + \cos \alpha) \quad \left( = \frac{3}{4} g_a \right) \quad (24)$$

となる。

例えば、半球 ( $\alpha = \pi/2$ ) の場合は (20), (22), (24) より  $g_a = R/2$ ,  $g_b = g_c = 3R/8$  となる。球面よりも内部がつまっている球の方が赤道に近い部分が重い分、重心が中心に近くなる。また (20) より、 $g_a$  は常に  $x$  座標の両端  $R$ ,  $R \cos \alpha$  の真ん中になるが、これは 7 節で述べる写像の正積性とも関係する。

(a),(b),(c) との比較の意味も込めて、次はそれらの平面版である図形の重心を計算する。すなわち、 $g_d$  は  $y = h_a(x)$  のグラフと  $y = -h_a(x)$  のグラフをつなげた図形の重心の  $x$  座標、 $g_e$  は  $y = h_a(x)$  のグラフから  $y = -h_a(x)$  軸までの領域の重心の  $x$  座標、 $g_f$  は  $y = h_c(x)$  のグラフから  $y = -h_c(x)$  軸までの領域の重心の

$x$  座標とする。こちら密度はすべて一定とする。このとき、 $g_d$  は、(15) より

$$g_d = \frac{\int_{R \cos \alpha}^R x \sqrt{1 + (h'_a(x))^2} dx}{\int_{R \cos \alpha}^R \sqrt{1 + (h'_a(x))^2} dx} \quad (25)$$

となるが、

$$\sqrt{1 + (h'_a(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

なので、 $0 \leq \alpha \leq \pi$  より、

$$\begin{aligned} \int_{R \cos \alpha}^R \sqrt{1 + (h'_a(x))^2} dx &= \int_{R \cos \alpha}^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \int_{\cos \alpha}^1 \frac{R dt}{\sqrt{1 - t^2}} \\ &= \left[ -R \arccos t \right]_{\cos \alpha}^1 = R(\arccos(\cos \alpha) - \arccos 1) \\ &= R\alpha, \\ \int_{R \cos \alpha}^R x \sqrt{1 + (h'_a(x))^2} dx &= \int_{R \cos \alpha}^R \frac{Rx}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \left[ -R\sqrt{R^2 - x^2} \right]_{R \cos \alpha}^R \\ &= R^2 \sin \alpha \end{aligned}$$

となり、よって、

$$g_d = \frac{R^2 \sin \alpha}{R\alpha} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (26)$$

となる。

$g_e$  は、(17) より、

$$g_e = \frac{\int_{R \cos \alpha}^R x h_a(x) dx}{\int_{R \cos \alpha}^R h_a(x) dx} \quad (27)$$

となるが、部分積分により、

$$\int_{R \cos \alpha}^R h_a(x) dx = \int_{R \cos \alpha}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ x\sqrt{R^2 - x^2} \right]_{R \cos \alpha}^R - \int_{R \cos \alpha}^R \frac{-x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\
&= 0 - R^2 \cos \alpha \sin \alpha + \int_{R \cos \alpha}^R \left( \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \sqrt{R^2 - x^2} \right) dx \\
&= R^2(\alpha - \cos \alpha \sin \alpha) - \int_{R \cos \alpha}^R h_a(x) dx
\end{aligned}$$

となるので、

$$\int_{R \cos \alpha}^R h_a(x) dx = \frac{R^2}{2}(\alpha - \cos \alpha \sin \alpha)$$

となる。一方、

$$\begin{aligned}
\int_{R \cos \alpha}^R x h_a(x) dx &= \int_{R \cos \alpha}^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left[ -\frac{1}{2} \frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_{R \cos \alpha}^R \\
&= \frac{R^3}{3} \sin^3 \alpha
\end{aligned}$$

となるので、

$$g_e = \frac{R^3(\sin^3 \alpha)/3}{R^2(\alpha - \cos \alpha \sin \alpha)/2} = \frac{2R}{3} \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \cos \alpha \sin \alpha} \quad (28)$$

となる。

最後に  $g_f$  は、(17) より、

$$g_f = \frac{\int_0^R x h_c(x) dx}{\int_0^R h_c(x) dx} = \frac{\int_0^{R \cos \alpha} x h_c(x) dx + \int_{R \cos \alpha}^R x h_a(x) dx}{\int_0^{R \cos \alpha} h_c(x) dx + \int_{R \cos \alpha}^R h_a(x) dx} \quad (29)$$

であり、

$$\begin{aligned}
\int_0^{R \cos \alpha} h_c(x) dx &= \int_0^{R \cos \alpha} x \tan \alpha dx = \frac{R^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha, \\
\int_0^{R \cos \alpha} x h_c(x) dx &= \int_0^{R \cos \alpha} x^2 \tan \alpha dx = \frac{R^3}{3} \sin \alpha \cos^2 \alpha
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\int_0^R h_c(x) dx &= \frac{R^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{R^2}{2} (\alpha - \cos \alpha \sin \alpha) = \frac{R^2}{2} \alpha, \\ \int_0^R x h_c(x) dx &= \frac{R^3}{3} \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{R^3}{3} \sin^3 \alpha = \frac{R^3}{3} \sin \alpha\end{aligned}$$

より、

$$g_f = \frac{R^3(\sin \alpha)/3}{R^2 \alpha/2} = \frac{2R}{3} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad \left( = \frac{2}{3} g_d \right) \quad (30)$$

となる。なお、 $g_f$  は  $g_c$  同様、(8) に戻って極座標で計算してもそれほど難しくはない。

例えば半円 ( $\alpha = \pi/2$ ) の場合、 $g_d = 2R/\pi (= 0.64R)$ ,  $g_e = g_f = 4R/(3\pi) (= 0.42R)$  となる。 $g_d, g_e, g_f$  はいずれも分母に  $\alpha$  自身が残るため  $g_a, g_b, g_c$  とはやや異なる。平面と立体でこのような違いが現れるのは少し興味深い。

## 7 球面、球体の等積図形

本稿では、まず6節の計算に出てきた(19)の式に関連する球面の等積性の性質や、球体の等積性の話を紹介し、それに基づく重心計算についても説明する。

(10)、および(19)より、 $h_a(x)$  の回転体である球面の  $a \leq x \leq b$  の範囲の帯状領域の面積  $S$  は、

$$S = 2\pi \int_a^b h_a(x) \sqrt{1 + (h'_a(x))^2} dx = 2\pi \int_a^b R dx = 2\pi R(b-a) \quad (31)$$

となる。つまり、この帯状の部分の面積は、半径  $R$  の円筒上の、幅  $(b-a)$  の帯の面積に等しい(図2)。当然、球の帯の方が長さは短いのであるが、斜めになっているために円筒の帯よりも幅は広くなっていて、それが丁度釣り合うことで面積が一致している。

なお、ここから、球の表面積は、その球と同じ半径で同じ高さの円筒の面積  $2R \times 2\pi R = 4\pi R^2$  と等しくなることもわかる。

この球からこの円筒、すなわち球に外接する同じ高さの円筒への、中心軸から水平方向の射影

$$(r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, r \sin \theta) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi, r \sin \theta)$$

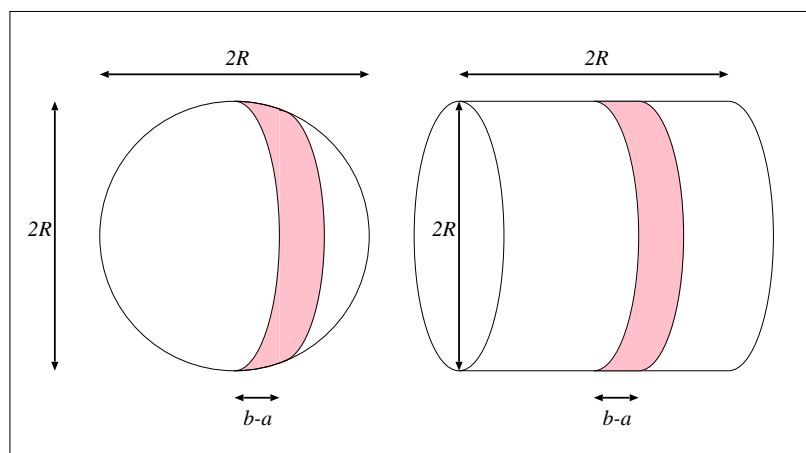


図 2: 球の帯と円筒の帯

は、帯の面積を等しくするだけでなく、それを帯の垂直方向に分割すれば、どの場所でも局所的な面積を変えない写像であることがわかる。これを利用すると、地球表面上の地図を、面積を変えない形で円筒の上に写像することができ、それを展開して平面図にすることができる。それがいわゆる「ランベルト正積円筒図法」である。ランベルト正積円筒図法は、高緯度地域は緯線の間隔が狭くなるので、その付近ではあまり実用的ではないが、赤道に近いところでは見易くて面積も正しいシンプルな地図を与える。

6 節で、 $g_a$  は  $x$  の範囲の中心になっていたが、これも、球面から円筒への射影が面積を変えないことからいえる。つまり、この面積の不変性が、図 2 の帯同士の重心の不変性も導き、円筒上の帯の重心は当然  $x$  の範囲の中心になるからである。

ついでに、(31) のように、曲線  $y = h(x)$  の  $x$  軸に関する回転面  $S$  の、横幅  $\Delta x$  に対する帯状部分の面積が、場所によらずに  $\Delta x$  の定数倍になるための条件を考えてみよう。 $\Delta x \approx 0$  であるとする、それに対する曲線  $y = h(x)$  上の部分の長さ  $\Delta \ell$  は、 $\Delta \ell \approx \sqrt{1 + (h'(x))^2} \Delta x$  であり、よって、その帯状部分の面積  $\Delta S$  は、

$$\Delta S \approx 2\pi h(x) \Delta \ell \approx 2\pi h(x) \sqrt{1 + (h'(x))^2} \Delta x$$

となる。よって、その面積が  $\Delta x$  の定数倍となる条件は、

$$h(x) \sqrt{1 + (h'(x))^2} = \text{定数} \quad (32)$$

となる。この定数を  $R$  とすると、

$$(h'(x))^2 = \frac{R^2}{h(x)^2} - 1$$

より、

$$h'(x) = \pm \frac{\sqrt{R^2 - h(x)^2}}{h(x)} \quad (33)$$

となる。これが、その条件を満たす曲線の微分方程式となる。

条件 (32) を図形的に解釈すると、 $h'(x)$  はグラフの接線の傾きで、その仰角を  $\theta$  とすると ( $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ )、 $h'(x) = \tan \theta$  なので、

$$\sqrt{1 + (h'(x))^2} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

となり、よって (32) の左辺は  $h(x)/\cos \theta$  となる。これは、グラフ上の点  $P(x, h(x))$  での法線と  $x$  軸との交点を  $Q$  としたときの、 $PQ$  の長さに等しい (図 3)。すな

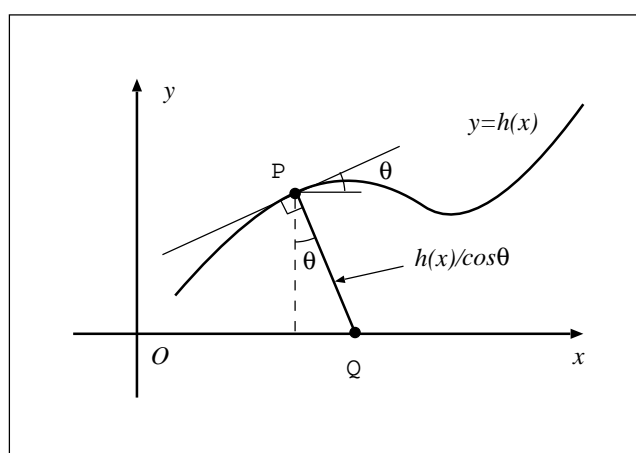


図 3: 法線方向の  $x$  軸までの距離

わち、円のように、 $x$  軸に関する回転面の面積が  $x$  幅の定数倍になる曲線は、その法線方向の  $x$  軸までの距離が一定 ( $= R$ ) であるような曲線となる。

微分方程式 (33) を解いてみればわかるが、それは  $x$  軸上に中心があり、半径  $R$  の円周のみとなる ( $y = \sqrt{R^2 - (x+C)^2}$ )。そのような円周の場合は、曲線上の点の法線は、 $x$  軸上の中心で  $x$  軸と交わるので、その距離は確かに常に半径

$R$  に一致し一定となる。逆にそうなる曲線はそのような円のみだということになる。

なお、ついでに言えば、(33) を少し発展させ、法線方向の  $x$  軸までの長さが与えられた関数  $r(x)$  になるような微分方程式

$$y' = \pm \frac{\sqrt{r(x)^2 - y^2}}{y}$$

を一般に解くのは難しそう、求積法で解けるのかどうかは私にはわからない。

ここまでは、球面から円筒への射影の等積性を見てきたが、良く知られているように、球の体積にも円柱に関する簡単な等積図形がある。(b) で考察したような  $x$  軸のある範囲、地球で言えばある緯度からある緯度までの球の体積は、図 4 のような三角形  $D$  を  $x$  軸のまわりに回転させた図形、すなわち球と同じ半径、同じ幅の円柱 (図 2 右) から、半径  $R$  高さ  $R$  の円錐を 2 つ取り除いた図形の同じ幅の体積に一致する。

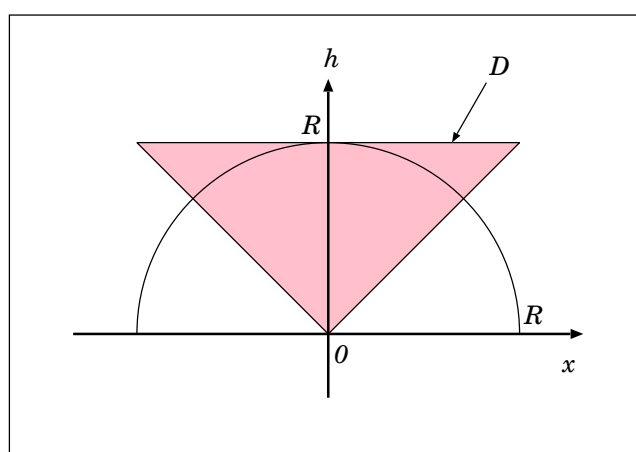


図 4: 球と等積な図形を作る三角形

それは、 $x$  軸に垂直な面での両者の立体図形の断面積を比べればわかるが、球の方の  $x$  での断面積は

$$\pi h_a(x)^2 = \pi(R^2 - x^2) = \pi R^2 - \pi x^2$$

であり、これは、半径  $R$  の円から半径  $x$  の円を取り除いた円環図の面積、すなわち  $D$  の回転図形の  $x$  での断面積に一致し、よって  $x$  の同じ幅に対する両者の体積は一致する。



これにより、球面の場合と同様に、球のある  $x$  幅の重心は、 $D$  の回転体の同じ幅の重心に一致するので、そちらで置き換えて求めることもできる。試しに、 $g_b$  をその考え方で計算してみよう。

まず、 $\beta = \cos \alpha$  とし、 $0 \leq x \leq R\beta$  の範囲での  $D$  の回転体の重心の  $x$  座標  $g_1$  を考える。これを、同じ範囲での半径  $R$ 、高さ  $R\beta$  の円柱から、半径  $R\beta$ 、高さ  $R\beta$  の円錐を取り除いたものと考え、円柱の重心の  $x$  座標  $g_2$  と円錐の重心の  $x$  座標  $g_3$  で表せば、

$$g_2 \pi R^3 \beta = g_3 \frac{\pi}{3} R^3 \beta^3 + g_1 \left( \pi R^3 \beta - \frac{\pi}{3} R^3 \beta^3 \right)$$

と書けるが、 $g_2 = R\beta/2$  で、 $g_3$  は [1] の命題 2 より  $g_3 = 3R\beta/4$  となり、よって

$$g_1 = \frac{3g_2 - g_3 \beta^2}{3 - \beta^2} = \frac{3R}{4} \frac{\beta(2 - \beta^2)}{3 - \beta^2}$$

となる。

一方、半球に対応する  $0 \leq x \leq R$  の範囲での  $D$  の回転体は、 $\beta = \cos \alpha$  が 1 の場合に対応するので、その重心の  $x$  座標  $g_4$  は

$$g_4 = \frac{3R}{8}$$

となる。 $g_b$  は、 $0 \leq x \leq R$  の  $g_4$  に対応する図形から、 $0 \leq x \leq R\beta$  の  $g_1$  に対応する図形を取り除いたものであるから、

$$g_4 \frac{2\pi R^3}{3} = g_1 \frac{\pi R^3}{3} \beta(3 - \beta^2) + g_b \left( \frac{2\pi R^3}{3} - \frac{\pi R^3}{3} \beta(3 - \beta^2) \right)$$

となる。この  $g_b$  の係数は、

$$\frac{2\pi R^3}{3} - \frac{\pi R^3}{3} \beta(3 - \beta^2) = \frac{\pi R^3}{3} (2 - 3\beta + \beta^3) = \frac{\pi R^3}{3} (1 - \beta)^2 (2 + \beta)$$

であり、また、

$$g_4 \frac{2\pi R^3}{3} - g_1 \frac{\pi R^3}{3} \beta(3 - \beta^2) = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi R^4}{4} \beta^2 (2 - \beta^2) = \frac{\pi R^4}{4} (1 - \beta^2)^2$$

なので、よって

$$g_b = \frac{\pi R^4(1-\beta^2)^2/4}{\pi R^3(1-\beta)^2(2+\beta)/3} = \frac{3R}{4} \frac{(1+\beta)^2}{2+\beta}$$

となり、積分計算なしで (22) が得られることがわかる。

## 8 最後に

本稿では、[1] に続いて軸対称の曲面と立体の重心の計算について考察した。特に新しい知見があるわけではないが、円、球に関する例の場合、2次元図形と3次元図形で式に違いがあることに少し興味を感じた。

これは、実は次元に由来していて、例えば  $g_c$  は、一般の  $N$  次元では、

$$g_c = \frac{NR}{N^2-1} \frac{\sin^{N-1} \alpha}{\int_0^\alpha \sin^{N-2} \theta d\theta}$$

となる。この分母の積分は、部分積分すればわかるが、 $N$  が偶数か奇数かによって結果が変わり、偶数の場合には  $\alpha$  が直接現れ、奇数次元の場合は  $\cos \alpha$  のみで表される式となる。

## 参考文献

- [1] 竹野茂治、「重心について」(2010)、<http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#gravity1>