2010 年 04 月 23 日

重心について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

平面図形の重心は、基本的には二重積分の計算で求められるが、具体的な問題ではその計算は大変であり、通常は容易に重心の求まる簡単な図形 (対称な図形、円、三角形等) に分割して統合する、という方法を取るのだと思う。

また、三角形の重心は、面としての重心と頂点としての重心が一致することが、二重積分の計算によっても確かめられるのであるが、それが成り立つことの簡単な説明はないか、より一般の図形でも同様のことは成り立つのか、なども考えてみた。

これら、重心について少し考えてみたことを、ここにまとめておく。

2 物理的な重心の定義

重心とは、質量を持った物体 (の集まり) に対して、その 1 次モーメントがつり合う点を指す。ここで、点 P に質量 m があるとき、その質点の点 A に対する **1** 次モーメント とは、ベクトル $m\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のことであるとする。

まず、「点」(質点系) に対する重心を考える。3 次元空間内の n 個の点 P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ に質量 m_j があるとき、その重心 G は

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{\mathrm{GP}_j} = \mathbf{0} \tag{1}$$

が成り立つ点となる。これら質点の総質量 $\sum_{j=1}^{n} m_j$ を M とすると、(1) の左辺は

$$\sum_{j=1}^{n} m_j (\overrightarrow{\mathrm{OP}_j} - \overrightarrow{\mathrm{OG}}) = \sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{\mathrm{OP}_j} - M\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

となるので、重心 G の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{\mathrm{OP}_j} \tag{2}$$

と表すことができる。特に、各点の質量 m_j がすべて等しいときは

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{\mathrm{OP}_j} \tag{3}$$

の形となる。

次に、「線」に対する重心を考える。例えば針金のように、3 次元空間内の質量を持つ曲線 C を考える。C 上の点を $\mathrm{P}(t)$ $(a \leq t \leq b)$ で表し、$\mathrm{P}(t)$ での針金の線密度、すなわち単位長さ当たりの質量を $\rho(\mathrm{P}(t))$ とする。

このとき、t の範囲 $a \leq t \leq b$ を n 等分し、この針金を細かく分割する:

$$\Delta t = \frac{b-a}{n}, \quad t_j = a + j\Delta t \ (j = 0, 1, 2, \ldots, n), \quad \mathrm{P}_j = \mathrm{P}(t_j)$$

n を十分大きくとれば、各 j に対し P_{j-1} から P_j までの弧の長さ Δs_j は十分小さく、それぞれの重心は P_j に近いので、この針金の重心 G に対しては (1) より

$$\sum_{j=1}^{n} \rho(\mathrm{P}_j)\Delta s_j \, \overrightarrow{\mathrm{GP}_j} \approx \mathbf{0}$$

が成り立ち、この式で $n \to \infty$ とすれば左辺は線積分に、両辺の誤差は 0 に収束し、重心 G の満たす条件式

$$\int_C \rho(\mathrm{P})\, \overrightarrow{\mathrm{GP}}\, ds = \mathbf{0} \tag{4}$$

が得られる。ここで、針金の総質量 $\displaystyle\int_C \rho(\mathrm{P})\, ds$ を M とすれば、(2) と同様に G の位置ベクトルの表現式

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{M}\int_C \rho(\mathrm{P})\, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\, ds \tag{5}$$

が得られ、$\rho(\mathrm{P})$ が一定ならば、L を曲線 C の長さとして

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{L}\int_C \overrightarrow{\mathrm{OP}}\, ds \tag{6}$$

が得られる。

同様に、「面」としての重心は、曲面 S の点 P での面密度 (単位面積当たりの質量) を $\rho(\mathrm{P})$ とすれば、重心 G の条件は面積分により、

$$\int_S \rho(\mathrm{P})\,\overrightarrow{\mathrm{GP}}\,dS = \mathbf{0} \tag{7}$$

と表わされ、よって総質量 $\int_S \rho(\mathrm{P})\,dS$ を M とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{M}\int_S \rho(\mathrm{P})\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,dS \tag{8}$$

と表され、$\rho(\mathrm{P})$ が一定ならば、A を曲面 S の面積として

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{A}\int_S \overrightarrow{\mathrm{OP}}\,dS \tag{9}$$

が得られる。また、「立体」としての重心は、立体 V の点 P での体積密度 (単位体積当たりの質量) を $\rho(\mathrm{P})$ とすれば、重心 G の条件は体積分により

$$\int_V \rho(\mathrm{P})\,\overrightarrow{\mathrm{GP}}\,dv = \mathbf{0} \tag{10}$$

と表わされ、よって総質量 $\int_V \rho(\mathrm{P})\,dv$ を M とすれば $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{M}\int_V \rho(\mathrm{P})\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,dv \tag{11}$$

と表され、$\rho(\mathrm{P})$ が一定ならば、X を曲面 V の体積として

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{X}\int_V \overrightarrow{\mathrm{OP}}\,dv \tag{12}$$

が得られる。

(1), (4), (7), (10) からわかるが、いずれの場合も重心では、任意の重力方向 $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ は単位ベクトル) に対して重心への回転モーメント $\overrightarrow{\mathrm{GP}} \times (mg\boldsymbol{n})$ の和や積分が $\mathbf{0}$ となるので、この点で物体を支えればそれは静止する。

また、(2), (5), (8), (11) からわかるが、任意の点 A に対するこれらの物体による 1 次モーメントは、いずれも重心に総質量が集中していると考えた場合の 1 次モーメント $M\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ に等しくなる。例えば、質点系の場合は、(2) より

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{\mathrm{AP}_j} = \sum_{j=1}^{n} m_j \overrightarrow{\mathrm{OP}_j} - M\overrightarrow{\mathrm{OA}} = M\overrightarrow{\mathrm{OG}} - M\overrightarrow{\mathrm{OA}} = M\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$

となるからである。線、面、立体の場合も同様である。

3 重心の分割と統合

重心の計算では、物体を次のように分割して考えることができる。

命題 1

質量 M の物体 A を、質量 M_j の物体 A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ に分けて考え、各 A_j の重心を G_j とすれば、A の重心 G は、G_j にそれぞれの質量 M_j が集中していると考えた質点系の重心の公式

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} M_j \overrightarrow{\mathrm{OG}_j} \tag{13}$$

により求めることができる。

証明

これも、点、線、面、立体のいずれでも同様であるから、立体について示す。V を V_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ に分割する。このとき、(11) より、各 V_j の重心 G_j は

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}_j} = \frac{1}{M_j} \int_{V_j} \rho(\mathrm{P})\, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\, dv \tag{14}$$

と表される。一方 (11) より、$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ も同様の体積分で書けることになるが、それを V_j に分割すると、(14) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{M} \int_{V} \rho(\mathrm{P})\, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\, dv = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} \int_{V_j} \rho(\mathrm{P})\, \overrightarrow{\mathrm{OP}}\, dv = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} M_j \overrightarrow{\mathrm{OG}_j}$$

となり、(13) が得られる。■

この命題 1 により、簡単な図形ならば基本的な図形に分割して重心を求めることができる。例えば対称ではない一様な面密度の四角形 ABCD の重心を求める場合は、これを △ABC と △ACD の 2 つに分け、それぞれの重心 G_1, G_2 を中線の交点によって求め、それぞれの面積 S_1, S_2 を求めれば、(13) により四角形 ABCD の重心 G は

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{S_1\overrightarrow{\mathrm{OG}_1} + S_2\overrightarrow{\mathrm{OG}_2}}{S_1 + S_2}$$

と求まることがわかる。なお、この式は、G が線分 $\mathrm{G}_1\mathrm{G}_2$ を $S_2 : S_1$ に内分する点であることを示している。

4 三角形の重心について

3 節の最後に三角形の重心の話を書いたが、一様な面密度の三角形 ABC の面としての重心 G_2 が、各頂点に同じ質量を持つ質点系の点としての重心 G_0 に等しいことはよく知られている。本節では、なぜそれが成り立つのかを、面積分の計算式 (8) を用いずに説明してみる。そして、ついでに △ABC が、一様な線密度の針金で作られている場合の線としての重心 G_1 についても合わせて考えてみる。

まず、△ABC の 3 頂点が同じ質量を持つ質点系の点としての重心 G_0 は、(3) より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}_0} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \tag{15}$$

により与えられるが、良く知られているように、これは数学でいう △ABC の「五心」の一つとしての「重心」、すなわち各頂点からの中線の交点に一致する。

次に、一様な面密度の △ABC の面としての重心 G_2 を、3 節の分割・統合の原理を用いて考えてみる。

まず、△ABC を辺 BC に平行な線で細かく分割する (図 1)。すると、それぞれの細長い部分の重心は、ほぼその中心に来るから、それらはすべて、A から BC の中点 M への中線 AM 上にほぼ乗ることになる。

この分割をさらに細かくしていけば、それぞれの重心はより中線 AM に近づいて行くので、その極限を考えれば、△ABC の重心 G_2 はその中線 AM に、A から M に向

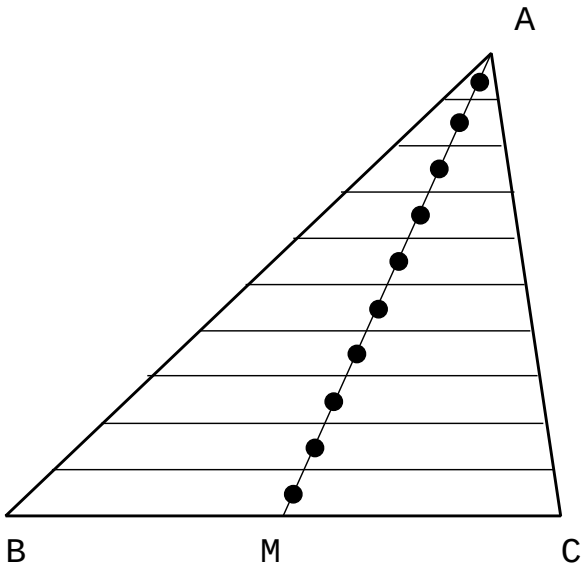

図 1: 三角形 ABC の辺 BC に平行な線による分割

かって比例して大きくなる線密度を与えた、線としての重心に等しくなり、よって G_2 は少なくともこの中線 AM 上にあることがわかる。

この考察を、辺 BC の代わりに辺 AC に対して行えば、重心 G_2 は B から AC の中点 N への中線 BN 上にあることになるので、よって中線 AM と BN の交点 G_0 が面としての重心 G_2 に一致することになる。

しかし、これは三角形にたまたま成り立つ性質だろうと思われる。それは、例えば一様な面密度の四角形には、このような性質は成り立たないし、周囲が針金である線としての $\triangle$ABC の重心 G_1 は、点としての重心 G_0 $(=\mathrm{G}_2)$ には一致しないからである。これらを以下に説明しよう。

まずは四角形の方であるが、一様な面密度の四角形 ABCD の重心を G_3 とし、各頂点が同じ質量を持つ質点系としての重心を G_4 とすると、G_4 は (3) により

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}_4} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}) \tag{16}$$

を満たすが、この四角形を変形して D を段々 C に近づけていけば、面としての重心 G_3 は当然三角形 ABC の面としての重心 G_2 $(=\mathrm{G}_0)$ に近づいていくことになるが、G_4 の方は (16) より、中線 AM の中点の位置ベクトルである

$$\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

に近づいていくので、その極限は G_2 とは異なる。よって、一般には G_3 と G_4 が異なる点であることがわかる。

また、針金で作った $\triangle\mathrm{ABC}$ の線としての重心 G_1 であるが、これは各辺に分割して考えれば、各辺の重心はその中点であり、それぞれの辺の質量は辺の長さに比例するので、命題 1 により G_1 の位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}_1} &= \frac{c\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}+a\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}+b\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}}{a+b+c}\\ &= \frac{(b+c)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(c+a)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(a+b)\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2(a+b+c)}\\ &\quad (a=BC,\quad b=CA,\quad c=AB)\end{aligned} \tag{17}$$

となることがわかる。この G_1 が G_0 に一致するのはどのような場合かを考えてみよう。(15), (17) において O を A として、$\overrightarrow{\mathrm{AG}_1}-\overrightarrow{\mathrm{AG}_0}$ を考えると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AG}_1}-\overrightarrow{\mathrm{AG}_0} &= \frac{(c+a)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(a+b)\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2(a+b+c)}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}\\ &= \frac{(a+c-2b)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(a+b-2c)\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6(a+b+c)}\end{aligned}$$

となり、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とは平行ではないので、この差が **0** となるのは

$$a+c-2b=a+b-2c=0$$

のときとなり、これは $a=b=c$ を意味する。よって G_1 と G_0 が一致するのは $\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形のときのみ、ということになり、やはり一般には異なることがわかる。

5 錐の重心

3 節の分割・統合の原理で、多くの一様な密度を持つ平面図形の重心を求めることができることがわかるが、空間の立体図形で同じことをするには、平面の三角形と同様に空間の四面体の重心を知る必要がある。それは、より一般の錐体の重心に対して成り立つ次の命題から求められる。

命題 2

底面が S、頂点が A の、密度が一様な錐体に対して、S の面としての重心を M とするとき、この錐体の重心 G は線分 AM を 3:1 に内分する点となる。

証明

体積分 (12) の計算により示すこともできるが、4 節と同様の方法を用いて、簡単な積分に帰着させることを考える。

4 節の三角形の場合と同様に、この錐体を底面と平行な面で細かく切り分けると、それぞれの薄い分割部分は、底面が S と相似で高さが十分低い (薄い) 柱体とほぼ等しく、よってその重心は S の重心 M とほぼ相似な位置にあり、すなわちほぼ線分 AM 上にあることになる。

各分割部分の質量はその断面積にほぼ比例し、それは S に相似であるから、それは結局 AM 上の A からの距離の 2 乗に比例することになる。

よって、その分割の極限を考えれば、この錐体の重心 G は、AM 上に A からの距離の 2 乗に比例する線密度を持つ、線としての重心と等しいことがわかる。

あとは、AM を x 軸上にのせて、A を原点、M の位置を x 軸上の $h\ (>0)$ とし、線密度 $\rho(x)$ を $\rho(x)=ax^2\ (a>0)$ として (6) の計算をすればよい。

G の座標を g とすれば、(6) より、

$$g=\frac{\displaystyle\int_0^h ax^2\cdot x\,dx}{\displaystyle\int_0^h ax^2\,dx}=\frac{ah^4/4}{ah^3/3}=\frac{3}{4}\,h$$

となり、G は AM を 3:1 に内分する点であることがわかる。∎

例えば四面体 ABCD の場合は、△ABC の重心 M は

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

であるから、四面体 ABCD の立体としての重心 G は、命題 2 より

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}+3\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{4}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})$$

となり、これは三角形の場合と同様に、4 頂点 A,B,C,D が同じ質量を持つ場合の質点系の重心に一致することがわかる。

6 最後に

本稿では、三角形の面としての重心と頂点系の点としての重心が一致する理由を初等的に考察し、ついでにそれが枠線の線としての重心とも一致するかどうかも考察した。

前者については、一応納得できる説明を考えることができたが、後者が一致しないことは今まで特に考えたことはなかったので、それが確認できたのは個人的には良かった。

また、学生向けには本来ならば、扇形の重心のような、少し面倒な積分計算も紹介すればいいのかもしれないが、本稿の内容とはやや方向が違うので、それらについてはまた気が向いたときにでも書いてみようと思う。