2023 年 6 月 6 日

一方向の拡大が相似になる曲線

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

放物線は、すべて相似であることが知られている。すなわち、放物線を y 方向 (または x 方向) にのみ拡大しても、元の放物線と相似になる。

本稿では、そのような曲線が他にもないか考えてみる。

2 巾乗の相似性

まず、前節で述べた、放物線の相似性について説明する。

放物線は、形を変えずに平行移動するか上下反転することで、

$$y = ax^2\ \ (a > 0) \tag{1}$$

のグラフに変えることができる。この関数のグラフは、

$$y = x^2 \tag{2}$$

のグラフを y 方向に a 倍したものになっているが、$a \neq 1$ であってもこれが (2) と相似になる。それを以下に示す。まず、

$$f(x) = ax^2$$

とする。(1) と (2) のグラフが相似ということは、(1) のグラフを x 方向と y 方向に等しく k 倍 ($k > 0$) したものが (2) のグラフに一致するような k が存在する、ということになる。

$y = f(x)$ のグラフを x 方向と y 方向に k 倍すると、それは

$$y = kf\left(\frac{x}{k}\right) = ka\left(\frac{x}{k}\right)^2 = \frac{a}{k}\,x^2$$

のグラフになるので、$k = a$ とすれば、これは確かに (2) と一致する。

この性質は、放物線だけでなく、巾乗

$$f(x) = x^\alpha \ \ (x > 0,\ \alpha \neq 1) \tag{3}$$

(およびその定数倍) も同様の性質、すなわちグラフの y 方向への任意の拡大が、元のグラフに相似になるという性質を持つ。(3) のグラフを y 方向に A 倍 $(A > 0)$ して、x,y 方向に k 倍 $(k > 0)$ すると、

$$y = kAf\left(\frac{x}{k}\right) = Ak\left(\frac{x}{k}\right)^\alpha = Ak^{1-\alpha}x^\alpha$$

となるので、$Ak^{1-\alpha} = 1$, すなわち

$$k = (A^{-1})^{1/(1-\alpha)} = A^{1/(\alpha-1)}$$

とすれば、すべての $x > 0$ に対して

$$kAf\left(\frac{x}{k}\right) = f(x) \tag{4}$$

となり、y 方向の A 倍が元のグラフと相似になることがわかる。

なお、これは $\alpha = 1$、すなわち $y = x$ については言えず、$y = Ax$ は相似拡大しても $y = Ax$ のままなので、$y = x$ に相似にはならない。

本稿では、(4) の性質を持つ $f(x)$ が、x^α $(\alpha \neq 1)$ の定数倍以外にもあるかどうかについて考える。

3 問題設定と問題の変形

まず、問題を明確に設定する。

$x > 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ で、次の性質を持つものを求めることを目標とする:

> 「任意の正数 A に対して、『すべての $x > 0$ に対して (4) を満たす』ような
> 正数 k (A には依存するが x にはよらない) を取ることができる」

この『』の部分を「条件 I」と呼ぶことにする。

なお、当然 $f(x) \equiv 0$ は常に (4) を満たすが、ここではそれ以外の関数を考える。

この問題は、このままでも考察できるが、少し変形して考察しやすくする。まず、

$$f(x) = xg(x) \tag{5}$$

とすると、(4) は、

$$kA\frac{x}{k}g\left(\frac{x}{k}\right) = xg(x)$$

より、

$$Ag\left(\frac{x}{k}\right) = g(x) \tag{6}$$

となり、さらに $x > 0, k > 0$ より、

$$g(x) = h(\log_e x) \quad (h(y) = g(e^y)) \tag{7}$$

とすると、(6) は

$$Ag\left(\frac{x}{k}\right) = Ah\left(\log_e \frac{x}{k}\right) = Ah\left(\log_e x - \log_e k\right) = h(\log_e x)$$

となるので、$p = \log_e k, \log_e x - p = y$ とすれば、「条件 I」は、「すべての実数 y に対して

$$Ah(y) = h(y+p) \tag{8}$$

が成り立つこと」に変わる。この条件を「条件 II」と呼ぶことにし、以後しばらくこの条件 II の形で考える。すなわち、

> 「任意の正数 A に対して、条件 II を満たすような実数 p (A には依存するが y にはよらない) を取ることができる」

ような連続で恒等的には 0 ではない $h(y)$ は何か、を考えることにする。

4 条件 II を満たす関数

求めたいのは「任意の正数 A」に対して条件 II を満たすような関数であるが、この A の任意性を除けば、条件 II を満たす関数は比較的たくさんある。

まず、$A \neq 1$ ならば $p \neq 0$ であることに注意する。もし $p = 0$ だと、(8) は

$$Ah(y) = h(y)$$

となるので、$A \neq 1$ より $h(y) \equiv 0$ となるので、よって $p \neq 0$ である。

今、

$$h(y) = A^{y/p} u(y) \tag{9}$$

とすると、u は A, p に依存するが実数 y に関して連続で、(8) は、

$$AA^{y/p} u(y) = A^{(y+p)/p} u(y+p)$$

となり、よって

$$u(y) = u(y+p) \tag{10}$$

となるので、u は連続な周期関数で、周期 $|p|$ を持つ。逆に u が周期 $|p|$ を持つ周期関数であれば、(10) より (9) は条件 II を満たすことになる。よって条件 II を満たす関数は、周期関数の任意性の分だけたくさんある。

しかし元の問題は、h は任意の A に対して条件 II を満たす必要があるので、そこでかなり制約され、h が決定できるようになる。

5 補題

本節では、h を決定するのに使用する補題を紹介する。

補題 1

$T(x)$ を実数 x の小数部分 $(0 \le T(x) < 1)$ とするとき、任意の無理数 r に対し、

$$\{T(nr) \mid n \text{ は整数}\}$$

は、$0 \le x < 1$ の範囲で稠密となる。

「稠密」とは $0 \le x < 1$ 内に有理数のように隙間なく埋まる、ということであり、言いかえれば、$0 \le x < 1$ なる任意の実数 x に対して、

$$\lim_{j\to\infty} T(n_j r) = x \tag{11}$$

となるような自然数列 $\{n_j\}_j = n_1, n_2, \ldots$ が存在すること、となる。

この補題 1 は、「クロネッカーの稠密定理」(Kronecker's density theorem) と呼ばれることもあるようだが、古い数学辞典 [1](187 H.) では Jacobi の名前がついていて、クロネッカーが証明したのはこの補題の多次元版のものらしい ([2] 202 E.)。証明は省略するが、例えば [3] など、インターネットで「クロネッカーの稠密定理」で検索すればいくつか証明が見つかるだろう。

この補題を用いると、次のことが示される。

補題 2

$u = u(x)$ が連続な周期関数で、周期 $p(>0)$, $q(>0)$ を持つ、すなわちすべての x に対して

$$u(x) = u(x+p) = u(x+q) \tag{12}$$

を満たすとき、p/q が無理数ならば、$u(x)$ は定数である。

証明

$0 < p < q$ と仮定して構わない。$0 < y < q$ となる任意の y に対して、$u(y) = u(0)$ となることを示せばよい。補題 1 により、

$$\lim_{j\to\infty} T\left(n_j \frac{p}{q}\right) = \lim_{j\to\infty}\left(n_j \frac{p}{q} + m_j\right) = \frac{y}{q} \tag{13}$$

となる整数列 $\{n_j\}_j$, $\{m_j\}_j$ が存在することになる。このとき、

$$n_j p + m_j q \to y$$

であり、$u(x)$ は連続なので

$$u(n_j p + m_j q) \to u(y)$$

となるが、$u(x)$ は p, q を周期に持ち、n_j, m_j は整数なので

$$u(n_j p + m_j q) = u(0)$$

となり、よって $u(0) = u(y)$ となる。■

6 関数の決定

本節で、任意の正数 A に対して条件 II を満たす正数 p が存在するような関数 $h(y)$ を決定する。

まず、A の任意性から、1 ではない正数 A_1, A_2 に対して、0 でない実数 p_1, p_2 が存在して、任意の y に対して

$$h(y) = \frac{1}{A_1} h(y + p_1) = \frac{1}{A_2} h(y + p_2) \tag{14}$$

が成り立つ。よって、(9) より、

$$h(y) = A_1^{y/p_1} u_1(y) = A_2^{y/p_2} u_2(y) \tag{15}$$

と書け、u_1 は周期 p_1 を、u_2 は周期 p_2 を持つ連続な周期関数となる。 よって、

$$\left(A_1^{1/p_1} A_2^{-1/p_2}\right)^y u_1(y) = u_2(y) \tag{16}$$

となるが、u_1, u_2 は連続な周期関数なので有界で、

$$A_1^{1/p_1} A_2^{-1/p_2} > 1$$

ならば $y \to \infty$ を考えれば (16) は u_1, そして u_2 が恒等的に 0 でなければならず、よって $h(y) \equiv 0$ となってしまう。

$$0 < A_1^{1/p_1} A_2^{-1/p_2} < 1$$

の場合も $y \to -\infty$ を考えれば u_1, u_2 が恒等的に 0 となり $h(y) \equiv 0$ しかありえないので、よって

$$A_1^{1/p_1} A_2^{-1/p_2} = 1$$

すなわち

$$A_1^{1/p_1} = A_2^{1/p_2} \tag{17}$$

となり、そして (16) より任意の y に対し

$$u_1(y) = u_2(y) \tag{18}$$

が成り立つことになる。(17) より、

$$\frac{1}{p_1} \log_e A_1 = \frac{1}{p_2} \log_e A_2$$

よって

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\log_e A_2}{\log_e A_1} \tag{19}$$

となるので、A の任意性より、この右辺が無理数になるように A_1, A_2 を選ぶことができ、その場合 p_2/p_1 は無理数になり、(18) より u_1 は周期 p_1, p_2 を持つので、補題 2 より u_1 は定数となる。

よって、(15) より h は

$$h(y) = CA^{y/p} = CB^y \quad (B > 0,\ B \neq 1) \tag{20}$$

の形になることがわかる。

このとき $f(x)$ は、(5), (7) より、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= xh(\log_e x) = CxB^{\log_e x} = Cx^{\alpha}, && (21)\\
\alpha &= 1 + \log_e B \quad (\neq 1) && (22)
\end{aligned}
$$

となるので、結局、任意の正数 A に対して条件 I を満たす正数 k が存在するような関数は、2 節で紹介した巾乗 (の定数倍) しか存在しないことになる。

7 最後に

本稿では、y 方向の拡大が相似になる関数、すなわち (4) を満たす関数について考察したが、正確には、y 方向の拡大が元の関数と相似、という条件は、平行移動や回転も含まれなければいけない。

ただし、y 方向の平行移動は多分今回の話に含まれるだろうし、逆に x 方向の平行移動や回転も考察するとなると、$y = f(x)$ のような形での考察ではかなり不十分で、より一般の曲線に対する問題設定や考察が必要になり、ちょっと私には無理そうな気がする。

参考文献

[1] 日本数学会編、「岩波 数学辞典 第 3 版」(1985)、岩波書店

[2] 日本数学会編、「岩波 数学辞典 第 4 版」(2007)、岩波書店

[3] 高校数学の美しい物語「クロネッカーの稠密定理とその証明」
`https://manabitimes.jp/math/781+`