2009 年 07 月 27 日

ゲーム差の平均について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

プロ野球の順位表には、たいてい勝率とゲーム差というものが表示されている。シーズン中盤になるとゲーム差にはだいぶばらつきがでてきて、かなり大きく離されてしまっているものを見るとなんとなくかなりの実力差があるように見えてしまう。しかし、それは本当にそうなのか、ここでは単純なモデルに対して「ゲーム差」の平均について考えてみることにする。

2 ゲーム差とは

まず、ゲーム差とは何かを説明する。

ある 2 チームのゲーム差が 1 というのは、(勝数)−(負数) (=「貯金」と呼ばれる) が、1 回直接対戦することで同じになる可能性がある状態を指す。例えば、5 勝 2 敗 (貯金 3) のチーム A と 3 勝 2 敗 (貯金 1) のチーム B は、直接対戦して B が A に勝てば 5 勝 3 敗と 4 勝 2 敗となり、どちらのチームも貯金 2 となって並ぶから、この状態をゲーム差 1 と見るわけである。

すなわち A と B のゲーム差は、

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{(\text{A の貯金}) - (\text{B の貯金})\}\\ &= \frac{1}{2}\{((\text{A の勝数}) - (\text{A の負数})) - ((\text{B の勝数}) - (\text{B の負数}))\}\end{aligned} \tag{1}$$

によって定義される (ゲーム差の最小単位は 0.5)。

ゲーム差は、勝率上位チームの貯金から勝率下位チームの貯金を引いて計算することが通常で、負のゲーム差を考えることはないようである。しかし、よく考えてみればわかるように、3 チーム以上のリーグ戦の場合は、勝率による順位でゲーム差を計算すると負のゲーム差、すなわち勝率と貯金の順位が逆点することが起こりうる。それが起こる条件をまず考えてみよう。

今、A の勝数、負数をそれぞれ x_A, y_A、B の勝数、負数をそれぞれ x_B, y_B とし、引き分けはないとする。3 チーム以上のリーグ戦の場合、$x_A + y_A = x_B = y_B$ である保証はないことに注意する。

このとき、A, B の勝率は、それぞれ

$$\frac{x_A}{x_A + y_A}, \quad \frac{x_B}{x_B + y_B}$$

だから、A の方が勝率が高いとすれば

$$\frac{x_A}{x_A + y_A} > \frac{x_B}{x_B + y_B}$$

であり、これを変形すれば

$$x_A(x_B + y_B) > x_B(x_A + y_A)$$

であるから、これは

$$x_A y_B > x_B y_A \tag{2}$$

を意味する。一方、B の貯金が A の貯金を上回るのは、

$$x_B - y_B > x_A - y_A$$

だから、これは

$$x_A + y_B < x_B + y_A \tag{3}$$

となる。この (2) と (3) が同時に満たされる場合に逆転が起こることになる。

和が一定の 2 正数の積は、その 2 数が等しいときに最大となるから、(2) は x_A と y_B が近く、x_B と y_A が離れていると起こりやすくなる。よって例えば、$x_A = y_B = 3$, $x_B = 7$, $y_A = 1$ とすると (2), (3) は同時に満たされる。実際、

$$\text{A の勝率} = \frac{3}{3+1} = 0.75, \quad \text{B の勝率} = \frac{7}{7+3} = 0.7$$

であるが、A の貯金 $= 3 - 1 = 2$, B の貯金 $= 7 - 3 = 4$ なので貯金は B の方が上位 (ゲーム差 1) と逆転することになる。

3 ゲーム差の平均

次に、ゲーム差の平均について考察する。

プロ野球のように、6 チームのリーグ戦だと考察が難しいので、ここでは単純なモデルとして A,B 2 チームのみの試合を考えて、その n 試合後のゲーム差の平均を考えることにする。

A が B に勝つ確率を p $(0 \leq p \leq 1)$ とし、独立に n 試合をすると考えると、A の勝数は 2 項分布 $B(n,p)$ に従う。よって A の勝数が k である確率は

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k q^{n-k} \quad (q = 1 - p)$$

であり、またこのとき、A の貯金は $k-(n-k) = 2k-n$、B の貯金は $(n-k)-k = n-2k$ なので、A を上位と考えたゲーム差は $2k - n$ となる。

ここでは、2 種類の平均を考えてみることにする。

1. 符号つきのゲーム差 $2k - n$ の平均 E_n
2. 符号なしのゲーム差 $|2k - n|$ の平均 F_n

通常の勝敗表には負のゲーム差というものは表示されないので、その勝敗表に現われるゲーム差の平均という場合は多分 F_n の方が適当であろうと思われるが、計算は E_n の方が易しく F_n の方が難しい。本節では、まず E_n を考えてみる。

$2k - n$ の平均、すなわち期待値は、

$$E_n = E_n(p) = \sum_{k=0}^{n} (2k - n) \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k q^{n-k} \tag{4}$$

となる。これを易しい式に変形するには、次の二項定理を用いる。

$$(a + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k a^{n-k} \tag{5}$$

この (5) を x で微分すると、

$$n(a + x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) k x^{k-1} a^{n-k}$$

となるから、

$$n(a+x)^{n-1}x = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} kx^k a^{n-k}$$

が得られる。これらを用いれば、(4) は、

$$E_n = 2\sum_{k=1}^{n} k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} - n\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} = 2n(q+p)^{n-1}p - n(p+q)^n$$

となるが、$q = 1 - p$ だから結局

$$E_n = n(2p-1)$$

となることがわかる。

$p = 1/2$、すなわち A と B の戦力が互角であれば、$E_n = 0$ となるが、これは自然であろう。だからこの平均が正の値になるのは $p > 1/2$ のように互角でない場合である。例えば、100 試合後にこの平均が 10 となるのは $100(2p-1) = 10$ より

$$p = \frac{1}{2} + \frac{10}{100} = 0.6$$

の場合となる。

4 互角の場合の符号無しゲーム差の平均

次に F_n の方を考える。こちらは E_n に比べてかなり厄介である。(4) と同様に、

$$F_n = F_n(p) = \sum_{k=0}^{n} |2k-n| \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \tag{6}$$

であるが、絶対値を外すために、n が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えることにする。まず、$n = 2m$ の場合は、

$$\begin{aligned} F_{2m} &= \sum_{k=0}^{2m} |2k-2m| \begin{pmatrix} 2m \\ k \end{pmatrix} p^k q^{2m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (2m-2k) \begin{pmatrix} 2m \\ k \end{pmatrix} p^k q^{2m-k} + \sum_{k=m+1}^{2m} (2k-2m) \begin{pmatrix} 2m \\ k \end{pmatrix} p^k q^{2m-k} \end{aligned}$$

となるが、この後ろの和で $2m-k=j$ とすると

$$2k-2m=2(2m-j)-2m=2m-2j, \quad \binom{2m}{k}=\binom{2m}{2m-j}=\binom{2m}{j}$$

なので、

$$\begin{aligned} F_{2m} &= \sum_{k=0}^{m-1}(2m-2k)\binom{2m}{k}p^kq^{2m-k}+\sum_{j=0}^{m-1}(2m-2j)\binom{2m}{j}p^{2m-j}q^j \\ &= \sum_{k=0}^{m-1}(2m-2k)\binom{2m}{k}(p^kq^{2m-k}+p^{2m-k}q^k) \end{aligned} \tag{7}$$

同様に、$n=2m+1$ の場合は、

$$\begin{aligned} F_{2m+1} &= \sum_{k=0}^{2m+1}|2k-2m-1|\binom{2m+1}{k}p^kq^{2m+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{m}+\sum_{k=m+1}^{2m+1}=\sum_{k=0}^{m}+\sum_{j=0}^{m} \quad (2m+1-k=j) \\ &= \sum_{k=0}^{m}(2m+1-2k)\binom{2m+1}{k}(p^kq^{2m+1-k}+p^{2m+1-k}q^k) \end{aligned} \tag{8}$$

となる。例えば、$p=1/2$ のときは、

$$F_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(2m-2k)\binom{2m}{k}, \tag{9}$$

$$F_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}(2m+1-2k)\binom{2m+1}{k} \tag{10}$$

となるが、いくつか計算してみると、

$$\begin{aligned} F_1\left(\frac{1}{2}\right) &= 1, \\ F_2\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\cdot 2=1, \\ F_3\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4}\left\{3\binom{3}{0}+\binom{3}{1}\right\}=\frac{3}{2}, \\ F_4\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8}\left\{4\binom{4}{0}+2\binom{4}{1}\right\}=\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_5\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{16}\left\{5\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\right\}=\frac{15}{8},\\ F_6\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{32}\left\{6\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}\right\}=\frac{15}{8}\end{aligned}$$

のようになることがわかる。実は一般に次が言える。

$$F_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) = F_{2m-1}\left(\frac{1}{2}\right), \tag{11}$$

$$F_{2m+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2m+1}{2m}F_{2m}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{12}$$

(12) は、5 節でより一般のものを示すから、ここでは (11) を示そう。そのために、二項係数に成り立つ次の関係式を用いる。

$$\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n-1\\k-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n-1\\k\end{pmatrix}\quad(0\le k\le n) \tag{13}$$

ただし、$k<0$ および $k>n$ のときは $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=0$ とする。これは、二項係数に関するパスカルの三角形の元となる関係式である。

(9) にこの (13) を用いると、

$$\begin{aligned} &F_{2m}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(2m-2k)\left\{\begin{pmatrix}2m-1\\k-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2m-1\\k\end{pmatrix}\right\}\\ &= \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=1}^{m}(2m-2k)\begin{pmatrix}2m-1\\k-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(2m-2k)\begin{pmatrix}2m-1\\k\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=0}^{m-1}(2m-2j-2)\begin{pmatrix}2m-1\\j\end{pmatrix}+\frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(2m-2k)\begin{pmatrix}2m-1\\k\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(4m-4k-2)\begin{pmatrix}2m-1\\k\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{k=0}^{m-1}(2m-1-2k)\begin{pmatrix}2m-1\\k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり、これは (10) により $F_{2m-1}(1/2)$ に等しいから (11) が言えたことになる。

5 一般の場合

次に、一般の p の場合の F_n について考える。これも、最初のいくつかを計算してみよう。

$$\begin{aligned}
F_1(p) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (q+p) = 1, \\
F_2(p) &= 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} (q^2+p^2) = 2\{p^2+(1-p)^2\} = 2(1-2p+2p^2), \\
F_3(p) &= 3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} (q^3+p^3) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (pq^2+p^2q) \\
&= 3(1-3p+3p^2-p^3+p^3)+3(p-2p^2+p^3+p^2-p^3) \\
&= 3(1-2p+2p^2), \\
F_4(p) &= 4\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} (q^4+p^4) + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} (pq^3+p^3q) \\
&= 4(1-4p+6p^2-4p^3+p^4+p^4)+8(p-3p^2+3p^3-p^4+p^3-p^4) \\
&= 4(1-2p+4p^3-2p^4), \\
F_5(p) &= 5\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} (q^5+p^5) + 3\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} (pq^4+p^4q) + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} (p^2q^3+p^3q^2) \\
&= 5(1-5p+10p^2-10p^3+5p^4-p^5+p^5) \\
&\quad +15(p-4p^2+6p^3-4p^4+p^5+p^4-p^5) \\
&\quad +10(p^2-3p^3+3p^4-p^5+p^3-2p^4+p^5) \\
&= 5(1-2p+4p^3-2p^4)
\end{aligned}$$

ここから、(12) を拡張した、

$$\frac{F_{2m+1}(p)}{2m+1} = \frac{F_{2m}(p)}{2m} \tag{14}$$

が成り立つことが予想される。本節ではこれを示す。

(7), (8) に共通の係数の部分は、

$$(n-2k)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = (n-k)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

と分けると、

$$\begin{aligned}(n-k)\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot(n-k)=n\binom{n-1}{k},\\ k\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)!}\cdot k=n\binom{n-1}{k-1}\end{aligned}$$

と変形できるから、

$$(n-2k)\binom{n}{k}=n\left\{\binom{n-1}{k}-\binom{n-1}{k-1}\right\}$$

となり、よって、(7), (8) は

$$\begin{aligned}\frac{F_{2m}(p)}{2m} &= \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}(p^kq^{2m-k}+p^{2m-k}q^k), &(15)\\ \frac{F_{2m+1}(p)}{2m+1} &= \sum_{k=0}^{m}\left\{\binom{2m}{k}-\binom{2m}{k-1}\right\}(p^kq^{2m+1-k}+p^{2m+1-k}q^k) &(16)\end{aligned}$$

となる。この両者の右辺が等しくなることを示す。

まず、

$$f(n,k)=p^kq^{n-k}+p^{n-k}q^k\quad(0\le k\le n) \tag{17}$$

と書くことにすると、(16) の和の中の $f(2m+1,k)$ の p の最高次の項は、

$$p^k(-1)^{2m+1-k}p^{2m+1-k}+p^{2m+1-k}(-1)^kp^k=p^{2m+1}(-1)^k(-1+1)=0$$

となって、実際には次数が 1 つ下がることになる。よって、これを $f(2m,j)$ で表すことを考えてみる。$p=1-q$, $q=1-p$ なので、

$$\begin{aligned}f(2m+1,k) &= p^kq^{2m+1-k}+p^{2m+1-k}q^k=p^kq^{2m-k}(1-p)+p^{2m-k}(1-q)q^k\\ &= p^kq^{2m-k}+p^{2m-k}q^k-(p^{k+1}q^{2m-k}+p^{2m-k}q^{k+1})\end{aligned}$$

となるので、

$$f(2m+1,k)=f(2m,k)-f(2m+1,k+1)$$

が成り立つことになる。これを繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}&f(2m+1,k)\\&= f(2m,k)-f(2m,k+1)+f(2m+1,k+2)=\cdots\\&= \sum_{j=0}^{m-k-1}(-1)^j f(2m,k+j)+(-1)^{m-k}f(2m+1,m)\quad (0\le k\le m-1)\end{aligned}$$

となるので、これを (16) に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{F_{2m+1}(p)}{2m+1} &= \sum_{k=0}^{m}\left\{\binom{2m}{k}-\binom{2m}{k-1}\right\}f(2m+1,k)\\&= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-k-1}\left\{\binom{2m}{k}-\binom{2m}{k-1}\right\}(-1)^j f(2m,k+j) \qquad (18)\\&\quad +\sum_{k=0}^{m}\left\{\binom{2m}{k}-\binom{2m}{k-1}\right\}(-1)^{m-k}f(2m+1,m) \qquad (19)\end{aligned}$$

となる。ここで二重和が出てきたが、以下では二重和の交換定理

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}A(k,j)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}A(k,j) \qquad (20)$$

を何度か用いる。

今、(19) の二重和の項の方で $k+j=i$ とすると、(20) より

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=k}^{m-1}\left\{\binom{2m}{k}-\binom{2m}{k-1}\right\}(-1)^{i-k}f(2m,i)\\&= \sum_{i=0}^{m-1}f(2m,i)\sum_{k=0}^{i}\left\{\binom{2m}{k}-\binom{2m}{k-1}\right\}(-1)^{i-k}\end{aligned}$$

となるので、$F_{2m+1}(p)/(2m+1)$ は、

$$\begin{aligned}\frac{F_{2m+1}(p)}{2m+1} &= \sum_{i=0}^{m-1}f(2m,i)\sum_{k=0}^{i}\left\{\binom{2m}{k}-\binom{2m}{k-1}\right\}(-1)^{i-k}\\&\quad +f(2m+1,m)\sum_{k=0}^{m}\left\{\binom{2m}{k}-\binom{2m}{k-1}\right\}(-1)^{m-k} \qquad (21)\end{aligned}$$

と書けることになる。よってあとはこの係数部分の

$$a_{m,i} = \sum_{k=0}^{i} \left\{ \binom{2m}{k} - \binom{2m}{k-1} \right\} (-1)^{i-k} \quad (0 \le i \le m) \tag{22}$$

を考えればよい。これに (13) を用いると、

$$\begin{aligned} a_{m,i} & \\ =& \sum_{k=0}^{i} \left\{ \binom{2m-1}{k-1} + \binom{2m-1}{k} - \binom{2m-1}{k-2} - \binom{2m-1}{k-1} \right\} (-1)^{i-k} \\ =& \sum_{k=0}^{i} \left\{ \binom{2m-1}{k} - \binom{2m-1}{k-2} \right\} (-1)^{i-k} \\ =& \sum_{k=0}^{i} \left\{ \binom{2m-1}{k} (-1)^{i-k} - \binom{2m-1}{k-2} (-1)^{i-(k-2)} \right\} \\ =& \binom{2m-1}{i} (-1)^0 + \binom{2m-1}{i-1} (-1)^1 = \binom{2m-1}{i} - \binom{2m-1}{i-1} \end{aligned}$$

となることがわかる。特に、$i = m$ の場合は、

$$a_{m,m} = \binom{2m-1}{m} - \binom{2m-1}{m-1} = \binom{2m-1}{m} - \binom{2m-1}{m} = 0$$

となるので、結局 (21) は、

$$\frac{F_{2m+1}(p)}{2m+1} = \sum_{i=0}^{m-1} f(2m,i) \left\{ \binom{2m-1}{i} - \binom{2m-1}{i-1} \right\}$$

となり、(15) よりこれは $F_{2m}(p)/(2m)$ に等しいことがわかる。

6 展開式への変形

5 節では、最初にいくつかの F_n を p の式として展開したが、考察は p, q の式のままでの計算を行った。この節では、その p の式としての展開式の計算を行ってみることにする。

5 節では、F_5 まで計算したが、実際には (14) より偶数次の方のみを考えればよい。$F_6/6$ の展開を (15) により行ってみると、

$$\begin{aligned}
&\frac{F_6(p)}{6}\\
&= q^6+p^6+\left\{\binom{5}{1}-\binom{5}{0}\right\}(pq^5+p^5q)+\left\{\binom{5}{2}-\binom{5}{1}\right\}(p^2q^4+p^4q^2)\\
&= (1-6p+15p^2-20p^3+15p^4-6p^5+p^6+p^6)\\
&\quad +4(p-5p^2+10p^3-10p^4+5p^5-p^6+p^5-p^6)\\
&\quad +5(p^2-4p^3+6p^4-4p^5+p^6+p^4-2p^5+p^6)\\
&= 1-2p+10p^4-12p^5+4p^6
\end{aligned}$$

のようになる。5 節の F_2, F_4 とこの F_6 を見ると、$F_{2m}/(2m)$ はいずれも、$1-2p$ で始まり、p の 2 次から m 次までの項がすべて消えている。これが一般に言えるかどうかを考えてみよう。

(15) に $q=1-p$ を代入して二項定理 (5) で展開すると、

$$\begin{aligned}
\frac{F_{2m}(p)}{2m} &= \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}p^k\sum_{j=0}^{2m-k}\binom{2m-k}{j}(-1)^jp^j\\
&\quad +\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}p^{2m-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^jp^j \qquad (23)
\end{aligned}$$

となる。この前半の和に対して $2m-k=t$ とすると、その和は

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=m+1}^{2m}\left\{\binom{2m-1}{2m-t}-\binom{2m-1}{2m-t-1}\right\}\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}(-1)^jp^{2m-t+j}\\
&= \sum_{k=m+1}^{2m}\left\{\binom{2m-1}{k-1}-\binom{2m-1}{k}\right\}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^jp^{2m-k+j}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\binom{2m-1}{k-1}-\binom{2m-1}{k}$$

が $k\geq m+1$ では正、$k\leq m-1$ では負、$k=m$ では 0 となることを考えると、(23) は結局

$$\frac{F_{2m}(p)}{2m}=\sum_{k=0}^{2m}\left|\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^jp^{2m-k+j}$$

と書けることがわかる。この式で $k-j=i$ とし、和の順序交換を行えば、

$$\begin{aligned}\frac{F_{2m}(p)}{2m} &= \sum_{k=0}^{2m}\left|\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right|\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{k-i}(-1)^{k-i}p^{2m-i}\\ &= \sum_{i=0}^{2m}(-1)^i p^{2m-i}\sum_{k=i}^{2m}\left|\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right|\binom{k}{i}(-1)^k \qquad (24)\end{aligned}$$

となる。この内側の和を $b_{m,i}$ とおく:

$$b_{m,i}=\sum_{k=i}^{2m}\left|\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right|\binom{k}{i}(-1)^k \quad (0\le i\le 2m) \qquad (25)$$

まず、$i\ge m$ の場合を考えると、それはこの節最初の例による考察から、

$$b_{m,i}=0\ (m\le i\le 2m-2),\quad b_{m,2m-1}=2,\quad b_{m,2m}=1 \qquad (26)$$

であることが予想される。

$i\ge m$ の場合は、

$$b_{m,i}=\sum_{k=i}^{2m}\left\{\binom{2m-1}{k-1}-\binom{2m-1}{k}\right\}\binom{k}{i}(-1)^k$$

であるが、今、x^k の i 階微分を考えると

$$(x^k)^{(i)}=k(k-1)\cdots(k-i+1)x^{k-i}=\binom{k}{i}i!\,x^{k-i}$$

より

$$\binom{k}{i}=\frac{1}{i!}(x^k)^{(i)}\Big|_{x=1}$$

と見ることができるので、

$$B_{m,i}(x)=\sum_{k=0}^{2m}\left\{\binom{2m-1}{k-1}-\binom{2m-1}{k}\right\}(-1)^k\frac{x^k}{i!} \qquad (27)$$

とすると $b_{m,i} = B_{m,i}^{(i)}(1)$ となることがわかる ($(i-1)$ 次以下の項の i 階微分は 0 となる)。

一方で、$B_{m,i}(x)$ は、

$$\begin{aligned} B_{m,i}(x) &= \sum_{k=1}^{2m} \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k-1 \end{pmatrix} (-1)^k \frac{x^k}{i!} - \sum_{k=0}^{2m-1} \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k \end{pmatrix} (-1)^k \frac{x^k}{i!} \\ &= \sum_{j=0}^{2m-1} \begin{pmatrix} 2m-1 \\ j \end{pmatrix} \frac{(-x)^{j+1}}{i!} - \sum_{k=0}^{2m-1} \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k \end{pmatrix} \frac{(-x)^k}{i!} \\ &= -\frac{x}{i!}(1-x)^{2m-1} - \frac{1}{i!}(1-x)^{2m-1} = -\frac{(1+x)(1-x)^{2m-1}}{i!} \end{aligned}$$

であるから、$i \leq 2m-2$ であれば $B_{m,i}$ の i 階微分には必ず $(1-x)$ がすべての項に残るので、$b_{m,i} = B_{m,i}^{(i)}(1) = 0$ となることがわかる。

$i = 2m-1$ のときは、

$$b_{m,2m-1} = B_{m,2m-1}^{(2m-1)}(1) = -\left.\frac{(1+x)(2m-1)!(-1)^{2m-1}}{(2m-1)!}\right|_{x=1} = 2$$

$i = 2m$ のときは、

$$b_{m,2m} = B_{m,2m}^{(2m)}(1) = -\begin{pmatrix} 2m \\ 1 \end{pmatrix} \left.\frac{(2m-1)!(-1)^{2m-1}}{(2m)!}\right|_{x=1} = 1$$

となって、(26) が確かに言えたことになる。

次に、$0 \leq i \leq m-1$ の場合を考える。この場合は、

$$\left| \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k \end{pmatrix} \right| = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k-1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k \end{pmatrix} & (k \geq m+1), \\ 0 & (k = m), \\ \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k-1 \end{pmatrix} & (k \leq m-1) \end{cases}$$

であるから、

$$b_{m,i} = \sum_{k=i}^{m-1} \left\{ \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2m-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} (-1)^k$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=m+1}^{2m}\left\{\binom{2m-1}{k-1}-\binom{2m-1}{k}\right\}\binom{k}{i}(-1)^k \\
=\ & 2\sum_{k=i}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}\binom{k}{i}(-1)^k \\
&+\sum_{k=i}^{2m}\left\{\binom{2m-1}{k-1}-\binom{2m-1}{k}\right\}\binom{k}{i}(-1)^k \\
=\ & 2\sum_{k=i}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}\binom{k}{i}(-1)^k+B_{m,i}^{(i)}(1)
\end{aligned}
$$

となり、この最後の項は $i \geq m$ の場合と同様に 0 となるから結局

$$
b_{m,i}=2\sum_{k=i}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}\binom{k}{i}(-1)^k \quad (0 \leq i \leq m-1)
$$

となる。これと (26) を (24) に代入すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{F_{2m}(p)}{2m} &= 1-2p \\
&+2\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i p^{2m-i}\sum_{k=i}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}\binom{k}{i}(-1)^k
\end{aligned}
\tag{28}
$$

となる。この式の二重和の順序を入れかえると、その和の部分は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{k}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}\binom{k}{i}(-1)^{i+k}p^{2m-i} \\
=\ & \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}p^{2m-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}p^{k-i} \\
=\ & p^{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}p^{m-1-k}(1-p)^k
\end{aligned}
$$

となり、結局、

$$
\frac{F_{2m}(p)}{2m}=1-2p+2p^{m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}p^{m-1-k}q^k \tag{29}
$$

のように書けることになる。

例えば、$F_6(p)/6$ は、この式を使えば、

$$\begin{aligned}\frac{F_6(p)}{6} &= 1-2p+2p^4\left[p^2+\left\{\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\right\}pq+\left\{\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\right\}q^2\right]\\ &= 1-2p+2p^4\{p^2+4(p-p^2)+5(1-2p+p^2)\}\\ &= 1-2p+2p^4(5-6p+2p^2)=1-2p+10p^4-12p^5+4p^6\end{aligned}$$

となり、この節の最初の計算よりだいぶ楽であることがわかる。

7 対称性

F_n は、A, B のどちらが上であるかを考えないゲーム差の平均値であるから、互角のところ ($p=1/2$) で対称になっていて、またその互角のところではゲーム差が 0 に近いことが期待されるので、$p=1/2$ で最小値を取ることが予想される。この節ではそれを考えてみる。すなわち、以下の 2 つを示す。

1. $F_n(p)$ は $p=1/2$ に関して対称、すなわち $F_n(r+1/2)$ は r に関して偶関数となる
2. $F_n(p)$ は $0\le p\le 1/2$ では減少、$1/2\le p\le 1$ では増加する。よって $p=1/2$ で最小値を取り、$p=0,1$ で最大値 n を取る

最後の最大値 n は、A が必ず勝つのであれば当然ゲーム差は n となるだろう。

5 節の (14) より、これはいずれも F_{2m} について考えればよいことがわかる。ここでは (15) を用いて考えることにする。

$p=r+1/2$ とすると $q=1-p=1/2-r$ であるから、

$$\begin{aligned}&p^kq^{2m-k}+p^{2m-k}q^k\\ &= p^kq^k(q^{2m-2k}+p^{2m-2k})=\left(\frac{1}{4}-r^2\right)^k\left\{\left(\frac{1}{2}-r\right)^{2m-2k}+\left(\frac{1}{2}+r\right)^{2m-2k}\right\}\end{aligned}$$

となるので、これは明らかに r の偶関数となる (r の代わりに $-r$ を代入しても不変)。よって (15) より $F_{2m}(r+1/2)$ は確かに r の偶関数となる。

次に (15) を p の式とみて p で微分する。$q=1-p$ より

$$\begin{aligned}&(p^kq^{2m-k}+p^{2m-k}q^k)'\\ &= k(p^{k-1}q^{2m-k}-q^{k-1}p^{2m-k})+(2m-k)(p^{2m-k-1}q^k-p^kq^{2m-k-1})\end{aligned}$$

となるが、今 $g(n,k)=p^{n-k}q^k-p^kq^{n-k}$ と書くことにすると、これは

$$(p^kq^{2m-k}+p^{2m-k}q^k)'=-kg(2m-1,k-1)+(2m-k)g(2m-1,k)$$

と書ける。よって、(15) より、

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{F_{2m}}{2m}\right)' \\
&= \sum_{k=1}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}(-k)g(2m-1,k-1) \\
&\quad +\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}(2m-k)g(2m-1,k) \\
&= -\sum_{j=0}^{m-2}\left\{\binom{2m-1}{j+1}-\binom{2m-1}{j}\right\}(j+1)g(2m-1,j) \\
&\quad +\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}(2m-k)g(2m-1,k) \\
&= \sum_{k=0}^{m-2}c_{m,k}g(2m-1,k) \\
&\quad +(m+1)\left\{\binom{2m-1}{m-1}-\binom{2m-1}{m-2}\right\}g(2m-1,m-1)
\end{aligned}$$

と変形すると、$g(2m-1,k)$ の係数 $c_{m,k}$ は 5 節と同様の変形により、

$$\begin{aligned}
&c_{m,k} \\
&= -\left\{\binom{2m-1}{k+1}-\binom{2m-1}{k}\right\}(k+1) \\
&\quad +\left\{\binom{2m-1}{k}-\binom{2m-1}{k-1}\right\}(2m-k) \\
&= -(k+1)\binom{2m-1}{k+1}+(2m+1)\binom{2m-1}{k}-(2m-k)\binom{2m-1}{k-1} \\
&= -(2m-k-1)\binom{2m-1}{k}+(2m+1)\binom{2m-1}{k}-k\binom{2m-1}{k} \\
&= 2\binom{2m-1}{k}
\end{aligned}$$

と書き直せる。同様に、

$$\begin{aligned}
&(m+1)\left\{\binom{2m-1}{m-1}-\binom{2m-1}{m-2}\right\} \\
&= (m+1)\binom{2m-1}{m-1}-(m-1)\binom{2m-1}{m-1}=2\binom{2m-1}{m-1}
\end{aligned}$$

となるので、結局

$$\left(\frac{F_{2m}}{2m}\right)'=\sum_{k=0}^{m-1}2\binom{2m-1}{k}g(2m-1,k)$$

となる。ここで、$g(2m-1,k)$ は $0\le k\le m-1$ に対し、

$$\begin{aligned}
g(2m-1,k) &= p^{2m-k-1}q^k-p^kq^{2m-k-1}=p^kq^k(p^{2m-2k-1}-q^{2m-2k-1}) \\
&= (p-q)p^kq^k\sum_{j=0}^{2m-2k-2}p^{2m-2k-2-j}q^j
\end{aligned}$$

と因数分解され、$(p-q)$ 以外の部分は $0<p<1$ では正であり、$p-q=2p-1$ は $p>1/2$ で正、$p<1/2$ で負なので、この節最初の主張の 2. の増減の部分が言えたことになる。

$F_n(1)$ の値は、例えば (6) に $p=1$, $q=0$ を代入すれば

$$F_n(1)=n\binom{n}{n}=n$$

となる。

8 最後に

最後に、いくつか具体的な F_n の値を紹介しておく。A と B が互角 $(p=1/2)$ の場合、4 節の (11), (12) より、

$$F_{2m+2}=F_{2m+1}=\frac{2m+1}{2m}\,\frac{2m-1}{2m-2}\cdots\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{(2m+1)!}{(2^m\,m!)^2}=\binom{2m}{m}\frac{2m+1}{2^{2m}} \tag{30}$$

となることがわかる。よって、いくつか計算してみると、

$$
\begin{aligned}
F_4 &= F_3 = \frac{3}{2} = 1.5, & F_6 &= F_5 = \binom{4}{2}\frac{5}{2^4} = \frac{15}{8} = 1.875, \\
F_{10} &= \binom{8}{4}\frac{9}{2^8} = 2.46, & F_{20} &= \binom{18}{9}\frac{19}{2^{18}} = 3.52, \\
F_{50} &= \binom{48}{24}\frac{49}{2^{48}} = 5.61, & F_{100} &= \binom{98}{49}\frac{99}{2^{98}} = 7.96, \\
F_{130} &= \binom{128}{64}\frac{129}{2^{128}} = 9.08
\end{aligned}
$$

のようになる。

つまり、全く互角であったとしても、20 試合もすればゲーム差は平均的には 3.5 位開き、100 試合後には 8 ゲーム、130 試合後には 9 ゲーム差位がついて自然だということになる。

もちろんこれが 6 チームのリーグ戦になると状況はだいぶ変わるが、上の考察によって 130 試合後に 10 ゲーム位の差がついていたとしても、それは戦力にかなり差がある、ということを意味はせず、「運」の誤差の範囲であると考えることもできそうで、とすればそれくらいのゲーム差がついたとしてもそれほど悲しむこともなく、(私も含めて) 下位チームのファンにとって慰めにならないだろうか。