2017 年 03 月 22 日

死ぬフィボナッチ数列と人口分布の方程式

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

フィボナッチ数列とは、よく知られているように次の漸化式で定義されるものを指す。

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 2), \\ F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

これは元々は、1 組のうさぎのつがいからその子孫が生まれる場合の、その n 世代目のつがいの総数を表すものとして考えられたそうである ([3])。

しかし、そこでは「うさぎの死」は考慮されておらず、最初のうさぎも永遠に生き続け、そして永遠に子孫を産み続けるものとして計算されているのであるが、本稿では一定期間後にうさぎが死ぬと考えた場合に、その数列がどうなるかを考えてみる。

また、ついでに離散的な数列から連続的な人口分布モデルに拡張するとどうなるかについても簡単に紹介する。

2 フィボナッチ数列

まず、フィボナッチ数列とうさぎの話を紹介する。元々の問題は以下のようである。

> うさぎのつがいが 1 組あると、それが毎月 2 匹のうさぎを産み、その子がまたつがいとなり、2 ヶ月後からは親と同じように毎月 1 つがいのうさぎを産むようになる。n ヶ月後には何つがいのうさぎがいることになるか。

この問題の設定は、生物学的には不自然なところもかなりあるのであろうが、繁殖力の強い動物の増え方の近似的な様子を見るには、それなりに役に立つのだろう。

この問題を、産まれたばかりの 1 つがいのうさぎから考えることとし、n ヶ月後に産まれたばかりのつがいの数を α_n、生後 1 ヶ月経ったつがいの数を β_n、生後 2 ヶ月以降の親つがいの数を γ_n とすると、開始時は

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0 \tag{2}$$

であり、1 ヶ月後には

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = 0 \tag{3}$$

となり、2 ヶ月後にはその最初のつがいは親つがいとなり、子を産むので、

$$\alpha_2 = 1,\quad \beta_2 = 0,\quad \gamma_2 = 1 \tag{4}$$

となる。以下、親つがいは毎月子を産むので、

$$\begin{aligned}
&\alpha_3 = 1,\quad \beta_3 = 1,\quad \gamma_3 = 1,\\
&\alpha_4 = 2,\quad \beta_4 = 1,\quad \gamma_4 = 2,\\
&\alpha_5 = 3,\quad \beta_5 = 2,\quad \gamma_5 = 3,
\end{aligned}$$

のように推移していく。つがいの総数を $N_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$ とすると、

$$N_0 = 1,\quad N_1 = 1,\quad N_2 = 2,\quad N_3 = 3,\quad N_4 = 5,\quad N_5 = 8,$$

のように確かにフィボナッチ数列となりそうだが ($N_n = F_{n+1}$)、実際に N_n に (1) のような漸化式が成り立つことを確認する。

上の定義と考察により、$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ には次の関係が成り立つことがわかる。

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} + \beta_{n-1} \quad (n \geq 1), \tag{5}$$

$$\beta_n = \alpha_{n-1} \quad (n \geq 1), \tag{6}$$

$$\alpha_n = \gamma_n \quad (n \geq 1) \tag{7}$$

(5) は親つがいの数 γ_n で、それは 1 ヶ月前に既に親だったつがいの数 γ_{n-1} と、1 ヶ月前に生後 1 ヶ月だったつがいの数 β_{n-1} の和に等しい。

(6) は生後 1 ヶ月のつがいの数 β_n で、それは 1 ヶ月前には産まれたばかりのつがいの数 α_{n-1} に等しい。

(7) は産まれたばかりのつがいの数 α_n で、それは現在の親つがいの数 γ_n に等しい。

ここから、γ_n の漸化式を作ってみる。どの n に対して成り立つかも注意しながら見てみると、(5), (6), (7) より、

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \gamma_{n-1} + \beta_{n-1} \quad (n \geq 1)\\
&= \gamma_{n-1} + \alpha_{n-2} \quad (n \geq 2)\\
&= \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} \quad (n \geq 3)
\end{aligned}$$

となるので、γ_n は $n \geq 3$ ではフィボナッチ数列 (1) の漸化式を満たすことがわかるが、$(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = (0, 0, 1)$ なので、$n = 2$ ではその漸化式は満たさず、$\gamma_2 = \gamma_1 + \gamma_0 + 1$ となっている。

同様に、α_n は、

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \gamma_n \quad (n \geq 1)\\
&= \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} \quad (n \geq 3)\\
&= \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \quad (n \geq 3)
\end{aligned}$$

より、α_n も $n \geq 3$ で同じ漸化式を満たすが、$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = (1, 0, 1)$ なので、この漸化式は $n = 2$ でも成り立つ。β_n は、

$$\begin{aligned}\beta_n &= \alpha_{n-1} \quad (n \geq 1)\\ &= \alpha_{n-2} + \alpha_{n-3} \quad (n \geq 3)\\ &= \beta_{n-1} + \beta_{n-2} \quad (n \geq 3)\end{aligned}$$

となり、やはり $n \geq 3$ で (1) の漸化式を満たし、$(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = (0, 1, 0)$ より、$n = 2$ では $\beta_2 = \beta_1 + \beta_0 - 1$ となっている。結局、$n \geq 2$ で以下が成り立つ。

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} + \delta_{n,2}, \quad \beta_n = \beta_{n-1} + \beta_{n-2} - \delta_{n,2}, \quad \alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \tag{8}$$

ここで $\delta_{i,j} = 0$ $(i \neq j)$, $\delta_{i,i} = 1$ とする。よって、これらの和により

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{9}$$

となることがわかる。

さらに $N_0 = N_1 = 1$ なので、よって $N_n = F_{n+1}$ $(n \geq 0)$ となる。なお、同様に、

$$\alpha_n = F_{n-1} \quad (n \geq 2), \quad \beta_n = F_{n-2} \quad (n \geq 3), \quad \gamma_n = F_{n-1} \quad (n \geq 2) \tag{10}$$

もいえる。すなわち、α_n, β_n, γ_n, N_n はいずれもフィボナッチ数列の漸化式を満たし、実際に部分的にはフィボナッチ数列に一致する。

さて、本節の最後にフィボナッチ数列の一般項を求めておく。[1] で示したように、定数係数線形の漸化式は、特性方程式を解けばその一般項が求まる。フィボナッチ数列 $\{F_n\}_n$ の特性方程式は、

$$\lambda^2 = \lambda + 1 \tag{11}$$

であり、この 2 次方程式の解は

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

であるから、$F_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ となるが、ここに $n = 1, n = 2$ を代入して (1) を用いると、

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1, \quad c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2 = 1$$

となるから、

$$c_1 = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{-\lambda_1}{\sqrt{5}\,\lambda_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}\,\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となるので、よって、

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\lambda_1^n + \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \tag{12}$$

が得られる。なお、高校では [1] に書いたような理論を教えるわけではないので、3 項漸化式などをこのようには解かない。

3 死を考慮したフィボナッチ数列

本節では、2 節で考察した問題を、「有限期間で死ぬ」などを考慮したものに変えて考えてみる。

- **設定 1.** うさぎは、生後 c ヶ月後に死ぬものとする
  (c は 1 以上の整数、通常のフィボナッチ数列では $c = \infty$)
- **設定 2.** うさぎのつがいは生後 k ヶ月目から $(k+1)$ ヶ月目までの間、すなわち月齢 k 月の間に b_k つがいのうさぎを産むとする $(k \geq 0)$
  (通常のフィボナッチ数列では、$b_0 = 0$、$j \geq 1$ に対し $b_j = 1$)

今、通常のフィボナッチ数列と同様に最初は産まれたての 1 つがいから始めて、開始から n ヶ月後に月齢 k 月 $(0 \leq k \leq n)$ のつがいの数を $\alpha_n^{(k)}$ と書くことにすると、上記の設定により次が成り立つ。

$$\alpha_n^{(k)} = 0 \quad (k \geq c) \tag{13}$$

$$\alpha_n^{(k)} = \alpha_{n-1}^{(k-1)} \quad (1 \leq k < c,\ n \geq 1) \tag{14}$$

$$\alpha_n^{(0)} = \sum_{k=0}^{c-1} b_k \alpha_{n-1}^{(k)} = b_0\alpha_{n-1}^{(0)} + b_1\alpha_{n-1}^{(1)} + \cdots + b_{c-1}\alpha_{n-1}^{(c-1)} \quad (n \geq 1) \tag{15}$$

$$\alpha_0^{(0)} = 1, \quad \alpha_0^{(k)} = 0 \quad (1 \leq k < c) \tag{16}$$

n ヶ月後のつがいの総数 N_n は、

$$N_n = \sum_{k=1}^{c-1} \alpha_n^{(k)} = \alpha_n^{(0)} + \alpha_n^{(1)} + \cdots + \alpha_n^{(c-1)} \tag{17}$$

であるが、それが満たす漸化式を考えてみる。

まず、(14) を用いると、$k \leq n$ の場合の $\alpha_n^{(k)}$ は $\alpha_{n-k}^{(0)}$ に等しく、2 重添字を必要としない $\{\alpha_j^{(0)}\}_j$ で表せる。また、(14), (16) を用いて $\alpha_j^{(0)}$ を $j < 0$ に対しても拡張すると、

$$\alpha_{-1}^{(0)} = \alpha_0^{(1)} = 0, \quad \alpha_{-2}^{(0)} = \alpha_0^{(2)} = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_{-c+1}^{(0)} = \alpha_0^{(c-1)} = 0$$

より、結局

$$\alpha_0^{(0)} = 1, \quad \alpha_j^{(0)} = 0 \quad (-c < j < 0) \tag{18}$$

と定めればよいことになる。そしてこれにより、上の関係式はすべて $\{\alpha_j^{(0)}\}_j$ で表せることになる。例えば、(15) は、

$$\alpha_n^{(0)} = \sum_{k=0}^{c-1} b_k \alpha_{n-k-1}^{(0)} = b_0 \alpha_{n-1}^{(0)} + b_1 \alpha_{n-2}^{(0)} + \cdots + b_{c-1} \alpha_{n-c}^{(0)} \quad (n \geq 1) \tag{19}$$

となり、(17) の総数 N_n は、

$$N_n = \sum_{k=1}^{c-1} \alpha_{n-k}^{(0)} = \alpha_n^{(0)} + \alpha_{n-1}^{(0)} + \cdots + \alpha_{n-c+1}^{(0)} \quad (n \geq 0) \tag{20}$$

となる。

これにより、数列 $\{\alpha_n^{(0)}\}_n$ は、c 個の値 (18) を初期値とし、$(c+1)$ 階の線形漸化式 (19) によって決まる数列、と見ることができる。

なお、(14) より $\alpha_n^{(0)} = \alpha_{n+1}^{(1)}$ であるから、(19) より $\{\alpha_n^{(1)}\}_n$ に関する漸化式

$$\alpha_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{c-1} b_k \alpha_{n-k-1}^{(1)} = b_0 \alpha_{n-1}^{(1)} + b_1 \alpha_{n-2}^{(1)} + \cdots + b_{c-1} \alpha_{n-c}^{(1)} \quad (n \geq 2) \tag{21}$$

が成り立つことがわかる。これは、(19) と同形の漸化式であるが、$n \geq 2$ である必要がある。同様にして、$\{\alpha_n^{(k)}\}_n$ $(0 \leq k < c)$ は、$n \geq k+1$ に対して、同形の漸化式を満たすこともわかる。

さらに、(20) の右辺のすべての項に (19) を代入して、各 b_j でまとめると、

$$\begin{aligned} N_n &= b_0 \alpha_{n-1}^{(0)} + b_1 \alpha_{n-2}^{(0)} + \cdots + b_{c-1} \alpha_{n-c}^{(0)} \\ &\quad + b_0 \alpha_{n-2}^{(0)} + b_1 \alpha_{n-3}^{(0)} + \cdots + b_{c-1} \alpha_{n-c-1}^{(0)} \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + b_0 \alpha_{n-c}^{(0)} + b_1 \alpha_{n-c-1}^{(0)} + \cdots + b_{c-1} \alpha_{n-2c+1}^{(0)} \\ &= b_0 N_{n-1} + b_1 N_{n-2} + \cdots + b_{c-1} N_{n-c} \end{aligned} \tag{22}$$

となり、$\{N_n\}$ も同形の漸化式を満たすことがわかる。なお、(22) が成立する n は、(19) が $n \geq 1$ で成り立ち、(20) が $n \geq 0$ で成り立つので、(22) は $n - c + 1 \geq 1$、すなわち $n \geq c$ で成り立つことになる。これが、死を考慮したフィボナッチ数列となる。

今、例えば $c = 3$, $b_0 = 0$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ としたものを考えてみる。この場合、漸化式 (22) は

$$N_n = b_0 N_{n-1} + b_1 N_{n-2} + b_2 N_{n-3} = 2N_{n-2} + N_{n-3} \quad (n \geq 3) \tag{23}$$

となる。初期値は、$\alpha_0^{(0)} = 1$, $\alpha_k^{(0)} = 0\ (k < 0)$ で、(19) より

$$\alpha_1^{(0)} = b_0\alpha_0^{(0)} + b_1\alpha_{-1}^{(0)} + b_2\alpha_{-2}^{(0)} = 0, \quad \alpha_2^{(0)} = b_0\alpha_1^{(0)} + b_1\alpha_0^{(0)} + b_2\alpha_{-1}^{(0)} = 2$$

なので、(20) より

$$\begin{cases} N_0 &= \alpha_0^{(0)} + \alpha_{-1}^{(0)} + \alpha_{-2}^{(0)} &= 1, \\ N_1 &= \alpha_1^{(0)} + \alpha_0^{(0)} + \alpha_{-1}^{(0)} &= 1, \\ N_2 &= \alpha_2^{(0)} + \alpha_1^{(0)} + \alpha_0^{(0)} &= 3 \end{cases} \tag{24}$$

となる。この (23), (24) より N_n が決定する。

(23) の特性方程式とその解は、

$$\lambda^3 = 2\lambda + 1, \quad (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0, \quad \lambda = -1, \lambda_1, \lambda_2$$

となるので、N_n は、

$$N_n = c_1(-1)^n + c_2\lambda_1^n + c_3\lambda_2^n \tag{25}$$

となる。後半 2 項は、フィボナッチ数列の一般解になっている。実は、$N_{n+1} + N_n$ は、(23) より

$$N_{n+1} + N_n = (2N_{n-1} + N_{n-2}) + N_n = (N_n + N_{n-1}) + (N_{n-1} + N_{n-2})$$

となるからフィボナッチ数列と同じ漸化式を満たし、

$$N_1 + N_0 = 2 = 2F_2, \quad N_2 + N_1 = 4 = 2F_3$$

より $N_{n+1} + N_n = 2F_{n+2}$ となることがわかる。

さて、(25) の c_1, c_2, c_3 は、初期値 (24) を元に連立方程式を解くと $c_1 = 1$, $c_2 = -2/\sqrt{5}$, $c_3 = 2/\sqrt{5}$ と求まる。よって、N_n の一般項は

$$N_n = (-1)^n + \frac{2}{\sqrt{5}}(\lambda_2^n - \lambda_1^n) = (-1)^n + 2F_n \tag{26}$$

となることがわかる。

または、上で示した $N_{n+1} + N_n = 2F_{n+2}$ より (26) を導くこともできる。それも紹介しよう。まずこの関係式より、$(-1)^n N_n$ の階差数列が

$$(-1)^n N_n - (-1)^{n-1} N_{n-1} = (-1)^n (N_n + N_{n-1}) = 2(-1)^n F_{n+1}$$

となり、よって、

$$\begin{aligned}(-1)^n N_n &= (-1)^0 N_0 + \sum_{k=1}^{n} 2(-1)^k F_{k+1} = 1 - 2\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k F_k - 2F_1 \\ &= -2\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k F_k - 1 \end{aligned} \tag{27}$$

がわかる。一方、フィボナッチ数列の漸化式 (1) を上と同様に $(-1)^k F_k$ の階差数列の形に変形して、

$$(-1)^k F_k = (-1)^k F_{k-1} + (-1)^k F_{k-2} = -\{(-1)^{k-1}F_{k-1} - (-1)^{k-2}F_{k-2}\}$$

とすれば、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k F_k &= \sum_{k=3}^{n}(-1)^k F_k - F_2 + F_1 = -\sum_{k=3}^{n}\{(-1)^{k-1}F_{k-1} - (-1)^{k-2}F_{k-2}\} \\ &= (-1)^n F_{n-1} - F_1 = (-1)^n F_{n-1} - 1 \end{aligned} \tag{28}$$

がわかる。なお、上の計算は $n \geq 3$ で成り立つが、結果は $n = 2$ でも成り立つことに注意する。よって、(27), (28) より、

$$(-1)^n N_n = 2(-1)^n F_n + 2 - 1 = 2(-1)^n F_n + 1$$

となり、この両辺を $(-1)^n$ で割れば (26) が得られる。

さて、(26) より結果的にこの N_n は、フィボナッチ数列の 2 倍と 1 しか違わない値で、死を考慮に入れたモデルでも増え方はそれほど変わっていないことになる。c や b_k の設定を変えれば数列は変わるが、(22) は定数係数線形の漸化式なので、その一般解は基本的には特性方程式の解の巾乗の和のようなもので表され、やはりこの例と似た形になる。

しかし、特性方程式の解は c や b_k などの値によって絶対値が 1 より小さくなる場合もあるし、虚数解を持つ場合もありうる。そのような 1 例を紹介する。なお、元の問題の設定では b_j は 0 以上の整数を考えるのが自然かもしれないが、元の個体数が多く、産む数を「1 つがい当たりの平均値」と考えれば、b_j の値は必ずしも整数である必要はない。

例えば、$c = 3$, $b_0 = b_1 = 0$, $b_2 = p^3$ $(p > 0)$ とすると、

$$N_n = p^3 N_{n-3} \tag{29}$$

で、これは生まれて 2 月目までは何も産まず、3 ヶ月目に死ぬ直前にまとめて p^3 つがい産む、というモデルで、13 年ゼミ、17 年ゼミのように長い間地中でさなぎとして過ごす生物の生態に近い。

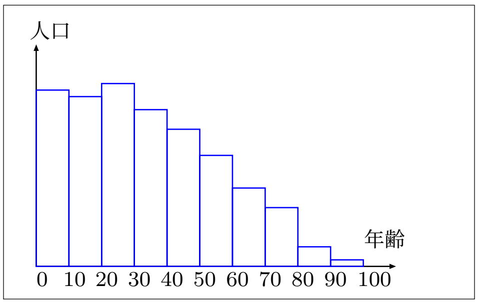

図 1: 年齢別人口分布 (棒グラフ)

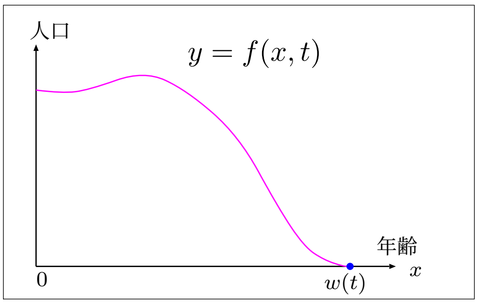

図 2: 人口分布密度 $f(x,t)$

この場合特性方程式は $\lambda^3 = p^3$ であるから、

$$\lambda = p, pe^{2\pi i/3}, pe^{-2\pi i/3}$$

であり、よって一般項は

$$N_n = c_1 p^n + c_2 p^n e^{2n\pi i/3} + c_3 p^n e^{-2n\pi i/3} = p^n \left(c_1 + c_4 \cos\frac{2n\pi}{3} + c_5 \sin\frac{2n\pi}{3} \right)$$

となる。$n \to \infty$ のとき、この N_n は $p > 1$ なら発散し、$0 < p < 1$ なら 0 に収束する (絶滅)。$p = 1$、すなわち 1 つがいから平均的に 1 つがい分しか生まれない場合は

$$N_n = c_1 + c_4 \cos\frac{2n\pi}{3} + c_5 \sin\frac{2n\pi}{3} \qquad \left(c_1 \geq \sqrt{c_4^2 + c_5^2} \right)$$

なので、周期的な増減を繰り返す (周期は 3)。

4 人口分布のモデル方程式

本節では、3 節で考察した離散的な個体の年齢 (月齢) 分布モデルを、連続的に拡張したものを紹介する。

通常年齢別の人口分布は、図 1 にあるようなグラフで示される。これは 10 歳毎に区切った棒グラフであるが、この階級幅を 5 歳毎、1 歳毎のように短くしていけば、徐々に滑らかなグラフになっていく (図 2)。ただし、単純に幅を減らすとそれに応じてその範囲の人数も減ってしまって高さが 0 になってしまう。よって、それを横幅で割って 1 歳幅 (10 歳でもよい) あたりの人数に直した「分布密度」として考える。これは、ちょうど連続的確率分布の密度関数と似た考え方である。

今、時刻 t の単位を年として、整数値ではなく連続的な実数値を考え、$N(a,b,t)$ を t 年のときの、年齢 a 歳以上 b 歳未満の人口とし、t 年の x 歳の人口分布密度 $f(x,t)$ を

$$f(x,t) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{N(x, x+\Delta x, t)}{\Delta x} \tag{30}$$

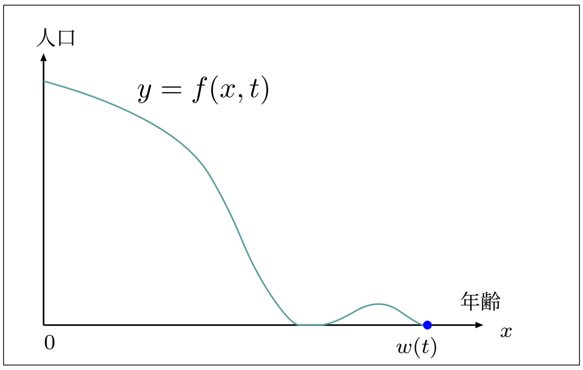

図 3: 島を持つ人口分布

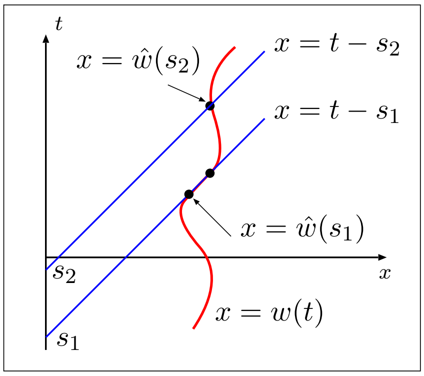

図 4: $\hat{w}(s)$

と定める。

$N(a,b,t)$ はいわば図 1 の棒グラフ 1 本の人数のようなもので、$f(x,t)$ は図 2 のグラフの高さで、1 歳幅あたりに直した x 歳人口と見ることができる。この $f(x,t)$ が 3 節の $\alpha_n^{(k)}$ に対応する (t は n に、x は k に対応)。

実際の年齢別人口分布では、飢饉や台風などの自然現象、戦争などの社会的要因などにより $N(a,b,t)$ は必ずしも a, b, t に関して滑らかでなかったり不連続であることもあるし、さらに本来人数 N は整数値しか取らないので (30) の極限も厳密には存在しないが、ここではとりあえず $N(a,b,t)$ は a, b, t に関して十分滑らかであり、(30) の極限も常に存在し、$f(x,t)$ も滑らかであるとして考えることにする。また、人口は流入も流出もない閉鎖空間を考え、増減は生死のみで起こるとする。

t 年のときの最高齢、すなわち $f(x,t) > 0$ であるような x の上限を $w(t)$ とすると、$x \geq w(t)$ に対して $f(x,t) = 0$ となる。なお、人口分布によっては $0 < x < w(t)$ の範囲で $f(x,t)$ が 0 になって島状になる場合もありうる (図 3)。しかし、今回はこのような事例も考えないこととし、$0 \leq x < w(t)$ では $f(x,t) > 0$ であるとする。また、t 年のとき $w(t)$ 歳以上の人口は 0 だから δ 年後にはもちろん $w(t)+\delta$ 歳以上の人はいないので、よって

$$w(t+\delta) \leq w(t) + \delta \quad (\delta > 0) \tag{31}$$

を満たすことがわかる。$w(t)$ が滑らかであれば、これは

$$w'(t) \leq 1 \tag{32}$$

と言いかえることもできる。

(30) より、$\Delta x \ll 1$ に対して $N(x, x+\Delta x, t) \fallingdotseq f(x,t)\Delta x$ なので、十分大きな n に対し $\Delta x = (b-a)/n$, $x_k = a + k\Delta x$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ とすれば

$$N(a,b,t) = \sum_{k=1}^{n} N(x_{k-1}, x_k, t) \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}, t)\Delta x$$

となり、この極限を取れば

$$N(a,b,t)=\int_a^b f(x,t)dx \tag{33}$$

が成り立つことがわかる。また、この式から、

$$f(x,t)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{N(x-\Delta x,x,t)}{\Delta x} \tag{34}$$

も言える。

$\beta(x,t)$ を、時刻 t での x 歳人口の 1 年あたりの死亡率とし、次で定義する。

$$\beta(x,t)=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{f(x,t)-f(x+\Delta t,t+\Delta t)}{f(x,t)\Delta t}\quad(0<x<w(t)) \tag{35}$$

(35) の右辺の分子は、t 年のときの x 歳人口が、Δt 年後にどれだけ減ったかという数、すなわち死亡者数を意味し、それを元の人数 $f(x,t)$ で割ることで 1 人あたりの死亡割合、すなわち死亡率に直していて、さらにそれを Δt で割ることで 1 年あたりの死亡率にしている。

なお、単純な死亡率 $(f(x,t)-f(x+\Delta t,t+\Delta t))/f(x,t)$ は 0 以上 1 以下の値であるが、β はそれをさらに Δt で割った極限なので 1 を越える値になりうることに注意する。

$f(x,t)$ は滑らかなので、合成関数の微分により、

$$\begin{aligned}\beta(x,t) &= -\frac{1}{f(x,t)}\lim_{\Delta t\to+0}\frac{f(x+\Delta t,t+\Delta t)-f(x,t)}{\Delta t}\\ &= -\frac{1}{f(x,t)}\frac{d}{ds}f(x+s,t+s)\bigg|_{s=0} = -\frac{f_x(x,t)+f_t(x,t)}{f(x,t)}\end{aligned} \tag{36}$$

となる。この式 (36) より、f の満たす偏微分方程式

$$f_t(x,t)+f_x(x,t)=-\beta(x,t)f(x,t)\quad(0<x<w(t)) \tag{37}$$

が得られる。これは、3 節の (14) に対応する。

なお、ここでは t を固定したときに $f(x,t)$ が x 歳の人口分布を与えるよう考えているが、

$$\hat{f}(z,s)=f(z,z+s) \tag{38}$$

により s 年生まれの z 歳の人の密度関数 $\hat{f}(z,s)$ を考えると、合成関数の微分により

$$\hat{f}_s(z,s)=f_t(z,z+s),\quad \hat{f}_z(z,s)=f_x(z,z+s)+f_t(z,z+s)$$

であるから、(37) は $\hat{f}$ では

$$\hat{f}_z(z,s) = -\hat{\beta}(z,s)\hat{f}(z,s) \quad (0 < z < \hat{w}(s)) \tag{39}$$

となる。ここで、$\hat{\beta}(z,s) = \beta(z,z+s)$ は s 年生まれの人の z 歳での 1 年あたりの死亡率、$\hat{w}(s)$ は s 年生まれの最高齢であり、$z = \hat{w}(s)$ は $z = w(z+s)$ となる z の下限になる。(31) より、$x = w(t)$ と $x = t-s$ は一点で交わるか、または 1 つの線分を共有するかのいずれかになるが、その x の最小値が $\hat{w}(s)$ となる (図 4)。

微分方程式 (37) の $x = 0$ での境界値 $f(0,t)$ は 0 歳人口であり、それは $f(x,t)$ の分布によって決まる。今、$\gamma(x,t)$ を、t 年のときの x 歳夫婦からの、x 歳人口 1 人あたりの出生率とする。すなわち、$M(a,b,t)$ を、a 歳以上 b 歳未満の集団から t 年のときの 1 年あたりの子供の出生数とするとき、$\gamma(x,t)$ を

$$\gamma(x,t) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{M(x, x+\Delta x, t)}{f(x,t)\Delta x} \tag{40}$$

として定義する。

なお、本来は夫婦の男女の年齢は同じとは限らず、よって男女それぞれの年齢に応じて出生率を決めるべきであるが、そうすると人口分布も男女に分けて考えなければならない (連立方程式となる) ので、ここでは簡単のためほぼ同年の夫婦から子供が生まれるとする。

十分大きな n に対し $\Delta x = w(t)/n$, $x_k = a + k\Delta x$ とすると、

$$f(0,t) = M(0, w(t), t) = \sum_{k=1}^{n} M(x_{k-1}, x_k, t) \doteqdot \gamma(x_{k-1}, t) f(x_{k-1}, t)\Delta x$$

であるから、この極限により

$$f(0,t) = \int_0^{w(t)} \gamma(x,t) f(x,t)dx \tag{41}$$

となることがわかる。(41) は、3 節の (15) に対応し、b_j が $\gamma(x,t)$ に対応する。

初期人口密度分布 $f(x,0) = f_0(x)$ と、死亡率 $\beta(x,t)$, 出生率 $\gamma(x,t)$ が与えられたときに方程式 (37), (41) を解けば、人口密度分布 $f(x,t)$ の推移がわかることになる。

なお、方程式 (37) の方はさほど難しくはなく、(39) を用いれば、これは実質的に z に関する常微分方程式なので、$f(x,t)$ を $f(x,0) = f_0(x)$ と $f(0,t)$, β で表すことができる。しかし、境界値である出生数 $f(0,t)$ は (41) を満たさないといけないので、この右辺にその $f(x,t)$ を代入すると、$f(0,t)$ に関する

$$f(0,t) = \int_0^{\min\{t, w(t)\}} \eta(x,t) f(0, t-x)dx + \xi(t) \tag{42}$$

の形の積分方程式が得られる。ここで、$\eta(x,t)$, $\xi(t)$ は $f_0(x)$, $\beta(x,t)$, $\gamma(x,t)$ で表される既知の関数である。

(42) を解いて初めて出生数 $f(0,t)$ が求まり、そこからようやく $f(x,t)$ が求まることになる。よって、$\beta(x,t)$, $\gamma(x,t)$, $f_0(x)$ から方程式 (37), (41) を満たす $f(x,t)$ が決まると思われるが、$f(x,t)$ を β, γ, f_0 の簡単な式で表わすことはできない。

また、人口分布密度をさらに男女に分けて $f_1(x,t)$, $f_2(y,t)$ として、男女のそれぞれの年齢に対する出生率 $\gamma(x,y,t)$ (x は男性の年齢、y は女性の年齢) を定めてその方程式を作れば、

$$\begin{aligned}(f_1)_t+(f_1)_x &= -\beta_1 f_1 \quad (0<x<w_1(t)),\\ (f_2)_t+(f_2)_y &= -\beta_2 f_2 \quad (0<y<w_2(t))\end{aligned}$$

のような形になり、また、 (41) の出生数は

$$f_1(0,t)=f_2(0,t)=\frac{1}{2}\int_0^{w_1(t)}dx\int_0^{w_2(t)}\gamma(x,y,t)f_1(x,t)f_2(y,t)dy$$

のような 2 重積分の形になり、出生数を求める積分方程式は (42) よりさらに複雑になるだろう。

これらの方程式については、例えば [2] などを参照のこと。

5 最後に

本稿では、通常のフィボナッチ数列の拡張として、死を考慮したもの、および連続的な変数への拡張を紹介した。

4 節では連続的な方程式が微分方程式と積分方程式によって解かれるという話をしたが、「微分方程式」は、大学の授業科目になることも多いため新しい本も定期的に出版されるが、「積分方程式」は単独の授業科目になることはほとんどなく、私が知らないだけかもしらないが、新しい「積分方程式」の本を目にすることはほとんどない。「積分方程式」に関しては、例えばやや古いが比較的目にしやすい [4]、[5]、あるいは割と新しい [6] などを参照するといいだろう。

また、私はこの手の分野の専門家ではないので (特に 4 節)、用いた用語は適切でないものもあるかもしれない。それについては、本稿で用いている用語を信じずに、その分野のちゃんとした成書で確認して頂きたい。

参考文献

[1] 竹野茂治、「数列の定数係数線形漸化式について」、
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#series2 (2009)

[2] 稲葉寿、「人口と伝染病の数理」、数理解析研究所講究録、**1083** (1999) 75–104

[3] Wikipedia、「フィボナッチ数」、
https://ja.wikipedia.org/wiki/フィボナッチ数

[4] 寺沢寛一、「自然科学者のための数学概論 (増訂版)」(1983)、岩波書店

[5] クーラン、ヒルベルト (齋藤利弥 監訳、丸山滋弥 訳)、「数理物理学の方法 1」(1959)、東京図書

[6] 上村豊、「積分方程式 – 逆問題の視点から」(2001)、共立出版