2009 年 05 月 21 日

ベクトル三重積の公式の証明について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

ベクトル解析の教科書には、次のようなベクトル三重積の公式がある。

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1}$$

これは、それなりに幾何学的な意味も持った公式であるが、この公式の証明は、手近な本ではほとんどが成分計算による確認に留まっている ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [9], [11])。[8], [10] は、証明は成分計算で行っているものの、筆者が物理学者や工学者であるためか、幾何学的な意味の補足をつけ加えている。

しかし以前から、

> 「成分計算による証明は確実であるが『確認』にしかなっておらず、なぜこのような公式 (1) が成り立つのかという説明にはなっていない」

と感じていた。しかし、[8], [10] で触れているような幾何学的な補足を証明にしようとすると、「なぜ成り立つか」は分かりやすくなるが、逆に証明する上での難点が一つあり、必ずしも易しくはない。

本稿では、これらの証明に加え他の証明も検討し、考察してみることにする。

2 成分計算による証明

まずは、単純な成分計算による証明を紹介する。以下、成分を $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ のように書くことにする。

証明 1

$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$ とすると、(1) の左辺は、

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{D} = (A_yD_z - A_zD_y, A_zD_x - A_xD_z, A_xD_y - A_yD_x) \\
&= (A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z), \\
&\quad A_z(B_yC_z - B_zC_y) - A_x(B_xC_y - B_yC_x), \\
&\quad A_x(B_zC_x - B_xC_z) - A_y(B_yC_z - B_zC_y)) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

となる。一方、(1) の右辺は、

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \\
&= ((\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})B_x - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})C_x, (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})B_y - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})C_y, (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})B_z - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})C_z) \\
&= ((A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)B_x - (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)C_x, \\
&\quad (A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)B_y - (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)C_y, \\
&\quad (A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)B_z - (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)C_z) \\
&= (A_y(B_xC_y - B_yC_x) + A_z(B_xC_z - B_zC_x), \\
&\quad A_x(B_yC_x - B_xC_y) + A_z(B_yC_z - B_zC_y), \\
&\quad A_x(B_zC_x - B_xC_z) + A_y(B_zC_y - B_yC_z)) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となるので、確かに (2) と (3) は等しい。■

見てわかる通り、この証明は左辺と右辺が等しいことの確認にはなっているが、なぜ (1) が成り立つか、つまりどのようにして (1) の左辺から (1) の右辺のような式が得られるのか、ということを示すことにはなっていない。かろうじて、右辺から左辺なら導けそうな気がする程度である。

3 座標軸をとりかえた成分計算による証明

次に、[1], [4] で行われている、ほぼ成分計算ではあるが、座標軸のとりかえによるやや易しい計算による証明を紹介する。

証明 2

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ の場合には (1) の両辺がともに $\boldsymbol{0}$ となって成立するから、$\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ の場合を考える。

今、$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}/|\boldsymbol{B}|$ ($\boldsymbol{B}$ 方向の単位ベクトル) とし、$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ が含まれる平面上で $\boldsymbol{B}$ に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{Q}$ とする ($\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ が平行な場合は、$\boldsymbol{B}$ に垂直な任意の単位ベクトル

とする) と、

$$\boldsymbol{B} = a\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{C} = m\boldsymbol{P} + n\boldsymbol{Q}$$

のように表すことができる。さらに、$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}$ とすると、$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ は右手系の互いに直交する単位ベクトルとなる。これを使って

$$\boldsymbol{A} = s\boldsymbol{P} + t\boldsymbol{Q} + u\boldsymbol{R}$$

と表すと、

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = a\boldsymbol{P} \times (m\boldsymbol{P} + n\boldsymbol{Q}) = an\boldsymbol{R}$$

となるので、(1) の左辺は

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (s\boldsymbol{P} + t\boldsymbol{Q} + u\boldsymbol{R}) \times (an\boldsymbol{R}) = -ans\boldsymbol{Q} + ant\boldsymbol{P} \tag{4}$$

となる。一方、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (s\boldsymbol{P} + t\boldsymbol{Q} + u\boldsymbol{R}) \cdot (a\boldsymbol{P}) = as, \\ \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} &= (s\boldsymbol{P} + t\boldsymbol{Q} + u\boldsymbol{R}) \cdot (m\boldsymbol{P} + n\boldsymbol{Q}) = ms + nt \end{aligned}$$

となるので、(1) の右辺は、

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = (ms + nt)a\boldsymbol{P} - as(m\boldsymbol{P} + n\boldsymbol{Q}) = ant\boldsymbol{P} - ans\boldsymbol{Q}$$

となり (4) に等しくなるので、(1) の両辺が一致することになる。■

この証明は、2 節の成分計算に比べて多少計算は楽であり、また多少幾何学的な考察が含まれてはいるが、やはり (1) の両辺の確認をしているだけである。(4) の右辺から (1) の右辺を導くことは以下のようにすればできなくはない。

$$\begin{aligned} -ans\boldsymbol{Q} + ant\boldsymbol{P} &= -as(\boldsymbol{C} - m\boldsymbol{P}) + ant\boldsymbol{P} = -as\boldsymbol{C} + (ms + nt)a\boldsymbol{P} \\ &= (ms + nt)\boldsymbol{B} - as\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \end{aligned}$$

しかし、最後の等号の部分は (1) の右辺を知らなければこのようになると見抜くことは難しく、なぜ (1) の右辺の形が導かれるのかという説明にはあまりなっていないように思う。

4 幾何学的な証明

次に、ある程度公式の意味を説明する幾何学的な証明を紹介する。それは、[8], [10] に補足として書いてあるように、(1) の左辺の図形的な意味を考えて、それが (1) の右辺のように $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ で表されることを示す方法である。

ただし、最後のところに難点があり、以下の「証明」は厳密には証明になっていないことに注意する。

証明 3

Step 1.

$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$ の場合は、(1) が成り立つことは容易にわかる。実際、この場合は左辺は $\boldsymbol{0}$ となるし、このときは $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ は平行であるから、$\boldsymbol{B} = k_1\boldsymbol{C}$ と書けるか、または $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$ となるが、そのどちらを (1) の右辺に代入しても容易に $\boldsymbol{0}$ となることがわかる。

よって、以後 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{0}$ の場合を考える。

Step 2.

この場合、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ は平行ではないから、その 2 つのベクトルが乗る平面 ($=\pi$ とする) は一つに決まり、$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ はこの π に垂直なベクトルとなる。

今、$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ とすると、これは $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ に垂直なベクトルなので、π に乗るベクトルとなるが、$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ は π 上の一次独立なベクトルであるから、$\boldsymbol{E}$ は

$$\boldsymbol{E} = \alpha\boldsymbol{B} + \beta\boldsymbol{C} \tag{5}$$

と表されることになる。さらに $\boldsymbol{E}$ は $\boldsymbol{A}$ とも垂直なので、$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ となり、よって (5) より、

$$\alpha(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) + \beta(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) = 0 \tag{6}$$

が成り立つ。

Step 3.

この (6) より、あるスカラー k_2 によって α, β は

$$\alpha = k_2(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}), \quad \beta = -k_2(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{7}$$

と書けることになる。

実際、$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\neq 0$ のときは、

$$k_2=-\frac{\beta}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}$$

とすれば、(6) より (7) が得られる。

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$ で $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\neq 0$ のときは、(6) より $\beta=0$ となるので、

$$k_2=\frac{\alpha}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}}$$

とすれば、この場合も (7) が成り立つことがわかる。

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=0$ のときは、$\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ の両方に垂直なので、$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ に平行となり、よって $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ となるから、(5) の α, β はともに 0 となる。すなわちこの場合も (7) は、例えば $k_2=1$ に対して成り立つことになる。

結局、この (7) はすべての場合に成り立つので、これを (5) に代入して、

$$\boldsymbol{E}=k_2\{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\} \tag{8}$$

が得られることになる。

Step 4.

あとは、(8) の k_2 が 1 となることを示せばよい。実はこの k_2 は、$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ にはよらない定数であるので、例えば $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{i}, \boldsymbol{C}=\boldsymbol{j}$ とすると ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の単位ベクトルとする)、

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},\\&(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{i}-(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

となり、よって $k_2=1$ であることがわかる。■

この証明のメインの部分は Step 2., Step 3. であるが、ここを見るだけでも (1) のような式 (実際には (8)) が出てくる理由がわかると思う。しかし、最後の $k_2=1$ であることを決定するのが実は結構面倒で、上の Step 4. では

「k_2 が $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ には無関係である」

ということを用いて、特殊な $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に対して k_2 を決定したが、実はその無関係性は自明ではない (少なくとも私には容易に示すことはできない)。だから、この Step 4.

は、単に特別な $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対してのみ $k_2 = 1$ を示したに過ぎず、他の $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対しては、それが 1 である保証は得られていないことになる。

それに、[8], [10] には Step 1. や Step 3. のような細かい話は書かれていないが、それなりに証明にしようとするとこのようなあまり本質的ではない細かい議論も必要になってしまい、逆にそれによって本質的な部分がややぼけてしまうという欠点もある。

ただ、この、Step 4. を含む証明 3 の方法の本質的な部分は、「証明」としてではなく、公式 (1) を忘れたときに思い出すには便利な方法だろうから、全く意味がないわけではないと思う。

5 多重線形性

他にも、(1) の両辺の多重線形性を利用する証明もある。

一般に、N 個の L 次元ベクトル $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_N$ の、スカラー値、またはベクトル値の写像 $f(\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_N)$ が、各 $\boldsymbol{A}_j$ に対して線形、すなわち、

$$
\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_j+\boldsymbol{B}_j,\ldots,\boldsymbol{A}_N)\\
&\quad = \quad f(\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_j,\ldots,\boldsymbol{A}_N)+f(\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{B}_j,\ldots,\boldsymbol{A}_N),\\
&f(\boldsymbol{A}_1,\ldots,c\boldsymbol{A}_j,\ldots,\boldsymbol{A}_N)=cf(\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_j,\ldots,\boldsymbol{A}_N)\\
&(j=1,2,\ldots,N)
\end{aligned}
$$

を満たしているとき、f は多重線形 (multi-linear) であるという。外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$、内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ に対して多重線形 (このように $N=2$ の場合は、特に 双線型 (bilinear) とも呼ばれる) であるので、容易に (1) の両辺は $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対して多重線形であることがわかる。

今、L 次元の基本ベクトルを $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_L$ とすると、各 $\boldsymbol{A}_j$ は

$$\boldsymbol{A}_j = A_j^1\boldsymbol{e}_1+\cdots+A_j^L\boldsymbol{e}_L$$

と一意に表されるから、多重線形写像 f の値は、

$$
\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_N)\\
&\quad = \quad f(\sum_{m_1=1}^{L}A_1^{m_1}\boldsymbol{e}_{m_1},\boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_N)=\sum_{m_1=1}^{L}A_1^{m_1}f(\boldsymbol{e}_{m_1},\boldsymbol{A}_2,\ldots,\boldsymbol{A}_N)=\cdots\\
&\quad = \quad \sum_{m_1=1}^{L}\sum_{m_2=1}^{L}\cdots\sum_{m_N=1}^{L}A_1^{m_1}A_2^{m_2}\cdots A_N^{m_N}f(\boldsymbol{e}_{m_1},\boldsymbol{e}_{m_2},\ldots,\boldsymbol{e}_{m_N})
\end{aligned}
$$

のように、基本ベクトルに対する f の値のスカラー倍の和で表されることになる。例えば $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ が 3 次元ベクトルの場合は、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) &= f(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}, B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}) \\ &= A_xB_xf(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i})+A_xB_yf(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})+A_xB_zf(\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}) \\ &\quad +A_yB_xf(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i})+A_yB_yf(\boldsymbol{j},\boldsymbol{j})+A_yB_zf(\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) \\ &\quad +A_zB_xf(\boldsymbol{k},\boldsymbol{i})+A_zB_yf(\boldsymbol{k},\boldsymbol{j})+A_zB_zf(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

といった具合である。

よって、(1) のように、両辺がいずれも多重線形である場合は、その等式を示すには、各ベクトルが基本ベクトルである場合についてのみ示せばよいことになる。この方針で考える。

証明 4

(1) の場合は、$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ が基本ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ である場合についてのみ示せばよい。

そのような組は、$3\times3\times3=27$ 通りあるが、$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ の場合は (1) の両辺とも明らかに $\boldsymbol{0}$ となって成立するので、それら ($3\times3=9$ 通り) は調べなくてよい。

また、$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の全部異なるものになる場合 ($3!=6$ 通り) は、$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ が $\boldsymbol{A}$ と平行になるので (1) の左辺は $\boldsymbol{0}$ であり、またこの場合は $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=0$ なので (1) の右辺も $\boldsymbol{0}$ となり、よってこれも調べなくてよい。

これで残るのは、以下の 12 通りとなる。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) &= (\boldsymbol{i},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}),\ (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}),\ (\boldsymbol{i},\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}),\ (\boldsymbol{i},\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}),\ (\boldsymbol{j},\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}),\ (\boldsymbol{j},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}), \\ &\quad (\boldsymbol{j},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}),\ (\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}),\ (\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}),\ (\boldsymbol{k},\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}),\ (\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}),\ (\boldsymbol{k},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

しかし、(1) で $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ を交換すると、両辺とも (-1) 倍になるだけなので、そのような交換に関しても一方だけを調べればよいから、結局上の半分の、以下の 6 通りのみ調べればよいことがわかる。

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}),\ (\boldsymbol{i},\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}),\ (\boldsymbol{j},\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}),\ (\boldsymbol{j},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}),\ (\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\boldsymbol{i}),\ (\boldsymbol{k},\boldsymbol{k},\boldsymbol{j})$$

これらの場合は、いずれも $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=1$, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=0$ なので、(1) の右辺は $-\boldsymbol{C}$ となる。(1) の左辺は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}) &= \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{i}\times(-\boldsymbol{j})=-\boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}) &= \boldsymbol{j}\times(-\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{i},\\
\boldsymbol{j}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}) &= \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}) &= \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i},\\
\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}) &= \boldsymbol{k}\times(-\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

となり、確かにいずれも $-\boldsymbol{C}$ になっているので (1) は成り立つ。∎

この証明 4 も、成分計算同様、(1) を確認しているだけなので、左辺から右辺が導かれる理由がわかるものではない。

6 積み上げ型の幾何学的な証明

本節では、もう一つ別な形の幾何学的な証明を紹介する。これは、まず $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ の場合の (1) を示し、その次にそれを用いて一般の場合を示す、という方法である。

証明 5

Step 1.

証明 3 の Step 1. と同じ議論により $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ の場合は成り立つので、$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{0}$ の場合のみを考える。

Step 2.

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ の場合の (1)、すなわち、

$$\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - |\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{C} \tag{9}$$

を示す。

$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{0}$ ではなく平行でもないから、$\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{B}$ に平行な方向と $\boldsymbol{B}$ に垂直な方向の 2 つのベクトルの和に分けて

$$\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{B}+\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{B}\perp\boldsymbol{F} \tag{10}$$

とすると、

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\cdot(a\boldsymbol{B}+\boldsymbol{F}) = a|\boldsymbol{B}|^2$$

より、

$$a = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{B}|^2} \tag{11}$$

となる。また、

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\times(a\boldsymbol{B}+\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{F}$$

となるので、これを $\boldsymbol{G}$ とすると、$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ は右手系の互いに直交するベクトルで、よって、

$$\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{G} = -k_3\boldsymbol{F} \quad (k_3>0) \tag{12}$$

と書けることになる。この両辺の大きさを考えると、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{G}| &= |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{G}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{B}|^2|\boldsymbol{F}|, \\ |k_3\boldsymbol{F}| &= k_3|\boldsymbol{F}| \end{aligned}$$

なので $k_3 = |\boldsymbol{B}|^2$ となり、よって (12) より、

$$\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{F}) = -|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{F} \tag{13}$$

が言える。これに $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C} - a\boldsymbol{B}$ を代入すれば、

$$-|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{F} = -|\boldsymbol{B}|^2(\boldsymbol{C}-a\boldsymbol{B}) = -|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{C} + a|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{B} = -|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{C} + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}$$

となって、よって (13) より (9) が言えたことになる。
さらに、(9) の $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ を交換すれば、

$$\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{C} - |\boldsymbol{C}|^2\boldsymbol{B} \tag{14}$$

が成り立つこともわかる。

Step 3.

$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ が平行でない場合は、$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ が一次独立となるので、任意の 3 次元のベクトルはこの 3 つのベクトルのスカラー倍の和で表現できる。よって、

$$\boldsymbol{A} = p\boldsymbol{B} + q\boldsymbol{C} + r(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$$

と書くことができるので、

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\\ &= \{p\boldsymbol{B}+q\boldsymbol{C}+r(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = p\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+q\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\\ &= p\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})-q\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

となり、(9), (14) を用いると、

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\\ &= p\{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{C}\}-q\{(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{C}-|\boldsymbol{C}|^2\boldsymbol{B}\}\\ &= \{p(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})+q|\boldsymbol{C}|^2\}\boldsymbol{B}-\{p|\boldsymbol{B}|^2+q(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\}\boldsymbol{C}\\ &= \{(p\boldsymbol{B}+q\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{C}\}\boldsymbol{B}-\{(p\boldsymbol{B}+q\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B}\}\boldsymbol{C}\end{aligned}$$

となるが、$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ に垂直なので、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (p\boldsymbol{B}+q\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} = (p\boldsymbol{B}+q\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{C}$$

となるので、結局

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

となることがわかる。■

この証明 5 は、4 節の幾何学的な証明 3 とは違って k_2 のようなものが出てこないので厳密な証明となっているが、少し遠回りになっているので、証明 3 より (1) の意味は直観的にはわかりにくい。しかし、成分計算による証明 1 よりはましで、また軸をとりかえた成分による証明 2 には似たところはあるものの、こちらの方が最後の形が見えやすいように思う。

7 垂直な場合に帰着させる証明

もう一つ幾何学的な証明を紹介する。これは、証明 5 と似ているが、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ が垂直な場合に帰着させる、という点が異なる。

証明 6

Step 1.

証明 5 の Step 1. と同じで $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{0}$ の場合のみを考える。

Step 2.

証明 5 の Step 2. と同様に、$\boldsymbol{C}$ を (10) のように分けると、$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}$ で、$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}$ は右手系の直交系で、(13) と同様にして

$$\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}) = -|\boldsymbol{B}|^2 \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{F} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}) = |\boldsymbol{F}|^2 \boldsymbol{B} \tag{15}$$

が得られる。

Step 3.

$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}$ は 1 次独立なので、

$$\boldsymbol{A} = p\boldsymbol{B} + q\boldsymbol{F} + r(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}) \tag{16}$$

とすると、(15), (16) より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}) \\ &= \{p\boldsymbol{B} + q\boldsymbol{F} + r(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F})\} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}) \\ &= p\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}) + q\boldsymbol{F} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}) \\ &= -p|\boldsymbol{B}|^2 \boldsymbol{F} + q|\boldsymbol{F}|^2 \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{17}$$

となる。一方、(16) より $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = p|\boldsymbol{B}|^2$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{F} = q|\boldsymbol{F}|^2$ となるので、これらを (17) に代入すれば

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{F}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{F} \tag{18}$$

となることがわかる。この右辺に $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C} - a\boldsymbol{B}$ を代入すれば、

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{F} \\ &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - a(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} + a(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{B} \\ &= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \end{aligned}$$

となるので、これと (18) により (1) が得られたことになる。∎

この証明 6 は、本質的には証明 2、証明 5 などとそれほど違いはないが、(18) をみてわかる通り実質的には $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ が垂直な場合に帰着させている。

なお、「垂直な場合に帰着」というなら、むしろ (1) の両辺に $\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}$ を代入することで先に (1) を (18) に帰着できることを示してから、(15), (16) を用いてそれを

示す、という順の方が筋かもしれないが、それだと (1) の右辺も使ってしまうことになるので、ここでは (1) の左辺から右辺を導くということにこだわってあえてこのようにしてみた。その点では、証明 5 は (1) の右辺を先に使ってしまっていることになるので、この証明 6 の方がいいかもしれない。

8 最後に

本稿では、ベクトル三重積の公式 (1) の証明を 6 種類紹介した。

公式の証明は正しいことを確認するのがもちろん原則であるが、公式を忘れたときのために、できれば右辺の形を知らなくても左辺から右辺が導きだせるような証明の方が都合がよい。

その点では、この 6 種類の中では幾何学的な証明 3 が最も適切だろうが、証明に難点があるので教科書の証明として使うには問題がある。証明 5、証明 6 は幾何学的でかつ証明はちゃんとしているが、遠回りなため忘れたときにこの方法で導くのは容易ではないだろう。

証明 2 も、3 節の最後で述べたように左辺から右辺を導けないわけではないが、やや難しいと思うし、証明 1、証明 4 は左辺から右辺を導くのはほぼ無理だろう。

一方で、「証明の易しさ」という点では、逆に証明 1 が最も易しく、次は多重線形性さえ理解すれば証明 4 が易しい。次は多分証明 2 で、証明 5、証明 6 はやや面倒、証明 3 は証明として完結すらしていない、という感じである。

だから、多分ほとんどの教科書では、証明の易しさを考慮して証明 1 を、あるいは「多重線形性」のような準備が不要でかつ易しいという点で証明 2 を採用しているのだろうと思う。それはもちろん筋ではあるが、もし公式 (1) がそれなりに必要な公式なのであれば、[8], [10] のように補足としてでも証明 3 の本質部分のような説明をすることは意味があるように思う。

参考文献

[1] 岩堀長慶「数学選書 2: ベクトル解析」裳華房 (1960)

[2] 安達忠次「ベクトル解析 改訂版」培風館 (1961)

[3] 石原繁「ベクトル解析」裳華房 (1985)

[4] E. クライツィグ (堀素夫訳)「技術者のための高等数学 2: 線形代数とベクトル解析」培風館 (1987)

[5] 山内正敏「詳説演習 ベクトル解析」培風館 (1988)

[6] 戸田盛和「理工系の数学入門コース 3: ベクトル解析」岩波書店 (1989)

[7] 北原晴夫、松田博男「数理情報科学シリーズ 3: ベクトル解析」牧野書店 (1994)

[8] 阿部龍蔵「新物理学ライブラリ 9: ベクトル解析入門」サイエンス社 (2002)

[9] 谷口雅彦「なっとくするベクトル解析」講談社 (2006)

[10] 丸山武男、石井望「要点がわかるベクトル解析」コロナ社 (2007)

[11] 垣田高夫、柴田良弘「ベクトル解析から流体へ」日本評論社 (2007)