2022 年 01 月 27 日

デルタ関数と関数の積の微分について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

先日、デルタ関数とその導関数が出てくる式について質問された。その計算の途中で、デルタ関数と関数の積の微分について、ふと疑問に思った式があったので、ここに紹介する。

2 デルタ関数と問題

デルタ関数 $\delta(x)$ は通常の関数ではなく超関数で、通常は

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases},\quad \int\delta(x)dx=1 \tag{1}$$

のようにみなされ、連続関数 $f(x)$ に対し

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx=f(0) \tag{2}$$

のような性質を持つものとして知られている。当然、通常の実数値関数にはそういうものはなく、数学では $\mathcal{D}=C_0^\infty$ 上の汎関数 $(\mathcal{D}')$ として、

$$\langle\delta(x),\phi(x)\rangle=\phi(0)\quad(\phi\in\mathcal{D}) \tag{3}$$

を満たすものとして定義される。

一般に超関数 $T(x)\in\mathcal{D}'$ に C^∞ 関数 $\alpha(x)$ をかけた $\alpha(x)T(x)$ も $\mathcal{D}'$ 上に定義でき、それは

$$\langle\alpha(x)T(x),\phi(x)\rangle=\langle T(x),\alpha(x)\phi(x)\rangle \tag{4}$$

となる。そして、超関数 T の微分 T' は、

$$\langle T'(x),\phi(x)\rangle=-\langle T(x),\phi'(x)\rangle \tag{5}$$

の部分積分形で定義される。

さて気になった式というのは、デルタ関数 $\delta(x)$ に C^∞ 関数 $\alpha(x)$ をかけた $\alpha(x)\delta(x)$ の導関数であるが、当然積の微分から、

$$(\alpha(x)\delta(x))' = \alpha'(x)\delta(x) + \alpha(x)\delta'(x) \tag{6}$$

となるのであるが、デルタ関数の性質 (1) から、実は

$$\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x) \tag{7}$$

となることが知られている。ここからすると、積の微分 (6) は、

$$(\alpha(x)\delta(x))' = \alpha'(x)\delta(x) + \alpha(x)\delta'(x) = \alpha'(0)\delta(x) + \alpha(0)\delta'(x) \tag{8}$$

となるような気がするが、一方、微分の前に (7) を適用すると、

$$(\alpha(x)\delta(x))' = (\alpha(0)\delta(x))' = \alpha(0)\delta'(x) \tag{9}$$

となって、(8) と合わないような気がする。これは、果たしてどちらが正しいのだろうか、という話である。

3 解答

まず、超関数と C^∞ 関数の積に対して、積の微分が成り立つかどうかを見ておく。$(\alpha T)'$ と $\alpha' T + \alpha T'$ を比較すると、

$$\begin{aligned}
\langle(\alpha T)', \phi\rangle &= -\langle \alpha T, \phi'\rangle = -\langle T, \alpha\phi'\rangle, \\
\langle \alpha' T + \alpha T', \phi\rangle &= \langle T, \alpha'\phi\rangle + \langle T', \alpha\phi\rangle = \langle T, \alpha'\phi\rangle - \langle T, (\alpha\phi)'\rangle \\
&= \langle T, \alpha'\phi\rangle - \langle T, \alpha'\phi + \alpha\phi'\rangle = -\langle T, \alpha\phi'\rangle
\end{aligned}$$

となって、確かに両者は等しい。つまり αT に対する積の微分は成立する。

次に、(7) であるが、これも

$$\langle \alpha\delta, \phi\rangle = \langle \delta, \alpha\phi\rangle = \alpha(0)\phi(0), \quad \langle \alpha(0)\delta, \phi\rangle = \langle \delta, \alpha(0)\phi\rangle = \alpha(0)\phi(0)$$

となって両者は確かに等しい。

となれば、(8) と (9) で矛盾が起きているように思うかもしれないが、そこに一つ見落しやすい誤解がある。それは、(7) とは違い、$\delta'(x)$ に対しては

$$\alpha(x)\delta'(x) \neq \alpha(0)\delta'(x)$$

であることである。$\delta'(x)$ も $x = 0$ でしか値を持たないものなので、なんとなく $\alpha(x)\delta'(x) = \alpha(0)\delta'(x)$ は正しく感じるかもしれないが、実際には、

$$\begin{aligned}
\langle \alpha\delta', \phi \rangle &= \langle \delta', \alpha\phi \rangle = -\langle \delta, (\alpha\phi)' \rangle = -\langle \delta, \alpha'\phi + \alpha\phi' \rangle \\
&= -\alpha'(0)\phi(0) - \alpha(0)\phi'(0) = -\alpha'(0)\langle \delta, \phi \rangle - \alpha(0)\langle \delta, \phi' \rangle \\
&= -\alpha'(0)\langle \delta, \phi \rangle + \alpha(0)\langle \delta', \phi \rangle
\end{aligned}$$

なので、実は $\alpha(x)\delta'(x)$ は

$$\alpha(x)\delta'(x) = \alpha(0)\delta'(x) - \alpha'(0)\delta(x) \tag{10}$$

となるのである。

実際、これを (8) の 2 つ目の式に代入すれば、(9) が得られるので何も矛盾は起こらない。

4 最後に

実は、私自身が形式的に (8) で計算してしまい、計算が合わないことに気がつき、(9) で計算したら合っていたので、今回の (10) に気がついた次第である。

超関数については、それなりに詳しく勉強したはずであるが、まだまだ身についていないし、油断してはいけない、と今回反省した。その自戒も込めてここに残しておきたい。