2017 年 02 月 24 日

地中の最速降下線

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

以前、[1] で鉛直真下方向の重力に対する 2 点間の最速降下曲線について考察し、それがサイクロイドであることを説明した。その事実は割と有名で、最速降下曲線と変分法に関する資料はインターネット上にも多く公開されている。そして、その中にはその応用として、例えば地球上のかなり離れた 2 地点でも、地中にサイクロイドのトンネルを掘れば、摩擦や空気抵抗がなければ何百 km をエネルギーなしで数分という短い時間でたどりつく、という話を紹介しているものもある。

確かに、2 地点が数百 km 程度の距離であれば、地球全体から見ればそのトンネルはかなり地表近くなので、重力はその行程で平行に鉛直真下にかかると考えてよいだろうし、地中での重力の強さも一定と考えていいだろう。しかし、その 2 地点が地球の大きさに比べてかなり離れた場所で、そのトンネルがかなり深くなれば、重力の方向は地球の中心を向くためその行程で平行ではなくなり、深いトンネルでは重力の大きさも変わってくる。よって、その場合は最速降下曲線はサイクロイドとは別の曲線になりうる。

本稿では、そのような地中内部にトンネルを掘った場合の最速降下曲線について考察する。

2 設定

まず問題を以下のように設定する。

> 地球の半径を R とし、地表の $\mathrm{A}(R,0)$ から $\mathrm{B}(R\cos\phi_0, R\sin\phi_0)$ $(0<\phi_0<\pi)$ へ至るトンネルを考える (図 1)。このトンネルに A から B に玉を初速度 0 で滑らすとき、その時間 T が最も短くなるようなトンネルの曲線を求めよ。ただし、摩擦や空気抵抗は考えないものとする。

トンネルは、$r=f(\theta)$ の極座標形式で考えることにする。すなわち、$f(\theta)>0$ で、

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\sin\theta$$

とパラメータ表示される曲線である。仮定より、

$$0<f(\theta)\le R,\quad f(0)=f(\phi_0)=R$$

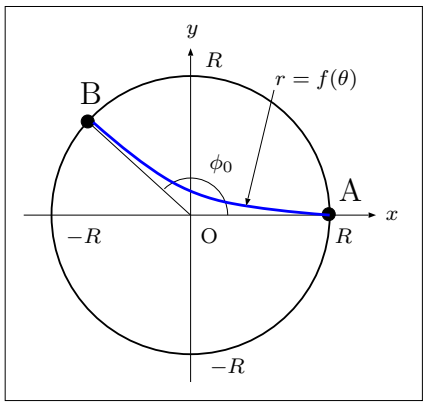

図 1: 設定

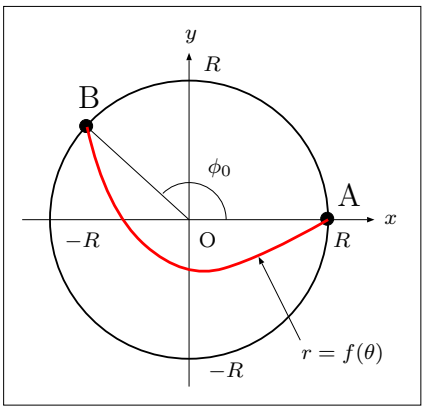

図 2: 反対回りの解 ?

となる。なお、今回まずは $0 \leq \theta \leq \phi_0$ のトンネル、すなわち反時計回りの角を進んで B に至るトンネルを考えるが、もしかすると、中心の反対側、すなわち時計回りに角を進んで、$0 \geq \theta \geq \phi_0 - 2\pi$ の負の角の方のトンネルが早くなる可能性もあるかもしれない (図 2)。それについてはまた後で考える。

地中内部の P 地点で質量 m の物体に働く重力 $\boldsymbol{F}$ は、地球の内部構造が同心球の層状であると仮定すれば、[2] にあるように

$$\boldsymbol{F} = -mg(|\mathrm{OP}|)\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\mathrm{OP}|}$$

となる。ここで、$g(r)$ は、$0 \leq r \leq R$ で定義される連続関数で、

$$g(r) > 0 \ (0 < r \leq R), \quad g(0) = 0, \ g(R) = g_0 \quad g(r) \text{ は } r \text{ の増加関数}, \tag{1}$$

となる (g_0 は地表での重力加速度)。具体的には、中心から r までの部分の球の質量による重力に比例するものになる ([2])。簡単のため本稿では $g(r)$ 微分可能であるとする。(1) より $g'(r) > 0 \ (0 < r < R)$ となる。特に、地球内部が均質であるとすれば、

$$g(r) = \frac{r}{R}g_0 \tag{2}$$

と r に比例する関数となる。

ドンネル内の動点 $P(x, y)$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $r = |\boldsymbol{r}|$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(0 \leq \theta \leq \phi_0)$, $r = f(\theta)$ とし、トンネルからの垂直抗力を $\boldsymbol{N}$ とすれば、運動方程式は以下のようになる。

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{N}, \boldsymbol{F} = -mg(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

ここで $\dot{} = d/dt$ とする。$\boldsymbol{N}$ はトンネルに垂直、すなわち $r = f(\theta)$ の接線方向に垂直になる。

トンネルは θ でパラメータ表示されるから、動点の位置を θ で表すことができ、よってそれを時間の未知関数 $\theta = \theta(t)$ として考えることができる。このとき、速度 $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\dot{\theta} \tag{3}$$

であり、$\boldsymbol{v}$ はトンネルの接線方向を向くベクトルになる。よって、$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{N}$ であるから、運動方程式と $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ との内積を考えれば、

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = -m\frac{g(r)}{r}\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$$

となるが、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r})^{\cdot} = \frac{1}{2}(|\boldsymbol{r}|^2)^{\cdot} = \frac{1}{2}(r^2)^{\cdot} = r\dot{r}, \\ \ddot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} &= \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})^{\cdot} = \frac{1}{2}(|\dot{\boldsymbol{r}}|^2)^{\cdot} = \frac{1}{2}(v^2)^{\cdot} \end{aligned}$$

となる $(v = |\boldsymbol{v}|)$。よって、

$$\left(\frac{v^2}{2}\right)^{\cdot} + g(r)\dot{r} = 0$$

となるので、

$$G(r) = \int_0^r g(u)du$$

とすれば

$$\left(\frac{v^2}{2} + G(r)\right)^{\cdot} = 0$$

となり、よって

$$\frac{v^2}{2} + G(r) = \text{定数} \tag{4}$$

が成り立つことになる。これは、エネルギー保存の式に対応する。

初速度は 0 であるから、(4) より

$$v^2 = 2(G(R) - G(r)) \tag{5}$$

となる。ここで (3) より

$$v = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\right| |\dot{\theta}| \tag{6}$$

であるが、

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta} = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta)' = f'(\theta)(\cos\theta, \sin\theta) + f(\theta)(-\sin\theta, \cos\theta)$$

であり、$(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(-\sin\theta, \cos\theta)$ は直交する単位ベクトルなので、よって

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}$$

となる。

玉は θ が増える方向にころがるので $\dot{\theta} \geq 0$ であり、よって (6) より

$$v = \sqrt{f^2 + (f')^2}\,\dot{\theta}$$

となり、(5), および $r = f(\theta)$ より、

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\sqrt{f^2 + (f')^2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{G(R) - G(f)}}{\sqrt{f^2 + (f')^2}}$$

となるので、この式の逆数を 0 から ϕ_0 まで積分すれば、A から B までの所用時間 T が

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\phi_0} \frac{\sqrt{f^2 + (f')^2}}{\sqrt{G_1(f)}}\, d\theta \tag{7}$$

と表されることになる。なお、以後 $G(R) - G(r) = G_1(r)$ と書くことにする。あとは、[1] と同様に、変分法によりこの T の式を最小にするような f を求めればよいことになる。

なお、地球の反対側を回るトンネルの場合も、今までの議論はほぼ同じで、$\dot{\theta} \leq 0$ のみが異なり、よって

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{v}{\sqrt{f^2 + (f')^2}} = -\frac{\sqrt{2G_1(f)}}{\sqrt{f^2 + (f')^2}}$$

となるから、この逆数を 0 から $\phi_0 - 2\pi$ まで積分すれば、

$$T = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\phi_0 - 2\pi} \frac{\sqrt{f^2 + (f')^2}}{\sqrt{G_1(f)}}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\phi_0 - 2\pi}^{0} \frac{\sqrt{f^2 + (f')^2}}{\sqrt{G_1(f)}}\, d\theta$$

が得られる。

3 変分法

次は (7) を最小にする関数 $f(\theta)$ を変分法を用いて求める。

(7) の被積分関数を $F(f, f')$ とすれば、そのオイラー方程式 ([1] 参照) は

$$\frac{d}{d\theta}F_{f'} = F_f$$

となる。F は $F(f, f')$ の形、すなわち陽には θ によらない形なので、

$$\frac{d}{d\theta}F \;=\; F_f f' + F_{f'} f'' \;=\; f'\frac{d}{d\theta}F_{f'} + F_{f'} f'' \;=\; \frac{d}{d\theta}(f' F_{f'})$$

となり、$F - f'F_{f'}$ は定数となる。

今の場合は、

$$\begin{aligned} F - f'F_{f'} &= \frac{\sqrt{f^2 + (f')^2}}{\sqrt{G_1(f)}} - f'\frac{1}{\sqrt{G_1(f)}} \times \frac{f'}{\sqrt{f^2 + (f')^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{G_1(f)}} \times \frac{f^2 + (f')^2 - (f')^2}{\sqrt{f^2 + (f')^2}} \;=\; \frac{f^2}{\sqrt{G_1(f)}\sqrt{f^2 + (f')^2}} \end{aligned}$$

となるので、よって $k_1 > 0$ を定数として

$$G_1(f)(f^2 + (f')^2) = k_1^2 f^4$$

となる。変形すると、

$$(f')^2 = \frac{k_1^2 f^4}{G_1(f)} - f^2 = \frac{f^2(k_1^2 f^2 - G_1(f))}{G_1(f)}$$

なので、1 階の微分方程式

$$f' = \pm f\sqrt{\frac{k_1^2 f^2 - G_1(f)}{G_1(f)}} \tag{8}$$

が得られる。良く知られているように、この微分方程式の解は、変数分離法により、関数

$$H(y) = \int_y^R \sqrt{\frac{G_1(f)}{k_1^2 f^2 - G_1(f)}}\,\frac{df}{f} \quad (0 < y \le R) \tag{9}$$

の逆関数のようなものとして得られる。

4 逆関数

次は、解の逆関数に関係する関数 (9) を少し簡単に見てみることにする。

まず、地球が均質である (2) の場合を考えると、

$$G(r)=\int_0^r g(u)du=\frac{r^2}{2R}g_0,\quad G_1(r)=G(R)-G(r)=\frac{g_0}{2R}(R^2-r^2)$$

であるから、この場合 (9) は

$$H(y)=\int_y^R\sqrt{\frac{G_1(f)}{k_1^2f^2-G_1(f)}}\,\frac{df}{f}=\int_y^R\sqrt{\frac{R^2-f^2}{k_2^2f^2-R^2}}\,\frac{df}{f}=\int_{y^2/R^2}^1\sqrt{\frac{1-u}{k_2^2u-1}}\,\frac{du}{2u}$$

となる。ここで、$k_2^2=1+2Rk_1^2/g_0\ (>1)$, $f=R\sqrt{u}$ とした。

この最後の式からわかるが、$r_1=R/k_2$ とすれば $H(y)$ はこの場合 $r_1<y<R$ に対して値を持ち、y に関して単調減少で、

$$H(R)=0,\quad H(r_1+0)<\infty$$

となる。この H は実際に積分できて、

$$\sqrt{\frac{1-u}{k_2^2u-1}}=s$$

とすると

$$\frac{1-u}{k_2^2u-1}=s^2,\quad 1-u=k_2^2s^2u-s^2,\quad u=\frac{1+s^2}{1+k_2^2s^2}$$

で、よって

$$du\ =\ \frac{2s(1+k_2^2s^2)-2k_2^2s(1+s^2)}{(1+k_2^2s^2)^2}\,ds\ =\ -\frac{2(k_2^2-1)s}{(1+k_2^2s^2)^2}\,ds$$

なので、

$$\begin{aligned}
H(y)\ &=\ \int_0^{\sqrt{(R^2-y^2)/(k_2^2y^2-R^2)}}s\cdot\frac{2(k_2^2-1)s}{(1+k_2^2s^2)^2}\times\frac{1+k_2^2s^2}{2(1+s^2)}\,ds\\
&=\ \int_0^{\sqrt{(R^2-y^2)/(k_2^2y^2-R^2)}}\frac{(k_2^2-1)s^2}{(1+k_2^2s^2)(1+s^2)}\,ds\\
&=\ \int_0^{\sqrt{(R^2-y^2)/(k_2^2y^2-R^2)}}\left(\frac{1}{1+s^2}-\frac{1}{1+k_2^2s^2}\right)ds\\
&=\ \left[\arctan s-\frac{1}{k_2}\arctan k_2s\right]_0^{\sqrt{(R^2-y^2)/(k_2^2y^2-R^2)}}\\
&=\ \arctan\sqrt{\frac{R^2-y^2}{k_2^2y^2-R^2}}-\frac{1}{k_2}\arctan k_2\sqrt{\frac{R^2-y^2}{k_2^2y^2-R^2}}
\end{aligned}\tag{10}$$

となる。よって、

$$H(r_1+0)=H\left(\frac{R}{k_1}+0\right)=\lim_{s\to\infty}\left\{\arctan s-\frac{1}{k_2}\arctan k_2 s\right\}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{k_2}\right) \quad (11)$$

となる。$H(y)$ の導関数はそのまま (9) の被積分関数の (-1) 倍なので、$H(y)$ は単調減少関数で、

$$H'(R-0)=0, \quad H'(r_1+0)=-\infty$$

であることがわかる。よって、$H(y)$ は $[r_1,R]$ から $[0,\pi(1-1/k_2)/2]$ への 1 対 1 の関数で、その逆関数が存在する。これによって、f が得られることになる。

一般の $g(r)$ の場合も、$g(r)$ は単調増加関数で $g(0)=0$ だから、$G(r)$ も $G(0)=0$ で単調増加な関数になっている。よって $k_1^2r^2-G_1(r)$ は r に関して増加関数で、$r=0$ では $-G(R)<0$、$r=R$ では $k_1^2R^2>0$ となるから、$0<r_1<R$ で

$$k_1^2r_1^2-G_1(r_1)=0 \quad (12)$$

となる $r_1=r_1(k_1)$ がただひとつ存在し、$H(y)$ は $r_1<y<R$ で存在することがわかる。なお、この r_1 は k_1 から決まるが、逆に (12) から

$$k_1=\frac{\sqrt{G_1(r_1)}}{r_1} \quad (13)$$

により、r_1 から k_1 が決まると考えることもできる。

(9) より $H'(r_1+0)=-\infty$ であるが、ロピタルの定理より、

$$\lim_{r\to r_1}\frac{k_1^2r^2-G_1(r)}{r-r_1}=2k_1r_1+g(r_1)>0$$

なので、(9) は $r\to r_1+0$ でも積分が収束し、$H(r_1+0)<\infty$ となることがわかる (図 3)。

$H(y)$ のさらなる性質はまた後で調べる。

5 オイラー方程式の解

さて、微分方程式 (8) に戻ると、変数分離により、

$$\int\sqrt{\frac{G_1(f)}{k_1^2f^2-G_1(f)}}\,\frac{df}{f}=\pm\int d\theta$$

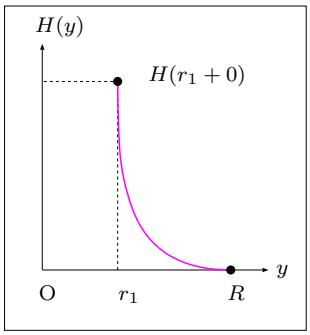

図 3: $H(y)$

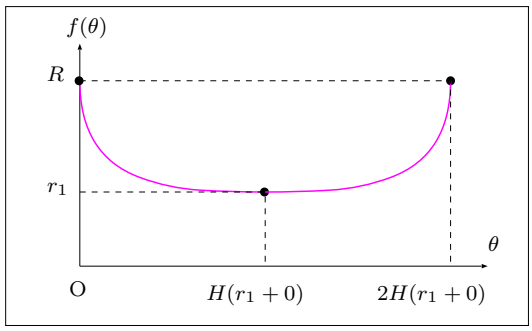

図 4: 解 $f(\theta)$

となるので、この解は $H(f(\theta)) = \pm\theta + C$、すなわち、

$$f(\theta) = H^{-1}(\pm\theta + C)$$

であることがわかる。よって、これにより $f(0) = f(\phi_0) = R$ となるような解を作るには、その 2 つのグラフをつながるようにつないで、

$$f(\theta) = \begin{cases} H^{-1}(\theta) & (0 \le \theta \le H(r_1+0)) \\ H^{-1}(2H(r_1+0) - \theta) & (H(r_1+0) \le \theta \le 2H(r_1+0)) \end{cases} \tag{14}$$

とすればよい (図 4)。

あとは、この右端の $2H(r_1+0)$ が ϕ_0 となるか、すなわち $0 < \phi_0 < \pi$ に対して、

$$H(r_1+0) = \frac{\phi_0}{2} \tag{15}$$

となるような定数 k_1 が常に一つ求まるかどうかを示せばよい。

例えば、均質な (2) の場合には、$H(r_1+0)$ は (11) であったから、確かに $0 < \phi_0 < \pi$ である任意の ϕ_0 に対して $H(r_1+0) = \phi_0/2$ となる k_2 (> 1) がただ一つ求まり、そこから $k_1 = \sqrt{g_0(k_2^2-1)/(2R)}$ により k_1 が求まってくれる。

一般の $g(r)$ の場合にも、次の命題 1 のように同様のことが成り立つことを示せる。

命題 1. (12) の解 $r_1 = r_1(k_1)$ に対し、

$$H(r_1+0) = \int_{r_1}^{R} \sqrt{\frac{G_1(f)}{k_1^2 f^2 - G_1(f)}}\,\frac{df}{f} \tag{16}$$

を k_1 の関数 $h(k_1)$ と見ると、$h(k_1)$ は k_1 に関して増加関数であり、

$$\lim_{k_1 \to +0} h(k_1) = 0, \tag{17}$$

$$\lim_{k_1 \to \infty} h(k_1) = \frac{\pi}{2} \tag{18}$$

となる。

この命題 1 の証明は 8 節で行うが、これにより $h(k_1) = H(r_1 + 0)$ が k_1 に関して $(0, \infty)$ から $(0, \pi/2)$ への 1 対 1 の関数であることになり、よって (15) を満たす k_1 が任意の ϕ_0 に対して一つだけ求まることになる。そしてそれによる (14) がオイラー方程式の解を与える。

6 グラフ

次は、解 (14) によるトンネルのグラフを紹介する。もちろん、一般の $g(r)$ ではグラフは書けないので、均質な地球の場合のグラフを示す。これは、

$$\begin{cases} x &= f(\theta)\cos\theta \\ y &= f(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (0 \le \theta \le \phi_0) \tag{19}$$

で、$f(\theta)$ は (14), (15) より

$$f(\theta) = \begin{cases} H^{-1}(\theta) & (0 \le \theta \le \phi_0/2) \\ H^{-1}(\phi_0 - \theta) & (\phi_0/2 \le \theta \le \phi_0) \end{cases} \tag{20}$$

であり、$H = H(Y)$ は、地球が均質な場合は (10) より

$$H(Y) = \arctan s - \frac{1}{k_2}\arctan k_2 s, \quad s = \sqrt{\frac{R^2 - Y^2}{k_2^2 Y^2 - R^2}} \quad (R/k_2 < Y < R)$$

であった。ここで、k_2 は (11), (15) より、

$$\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{k_2}\right) = \frac{\phi_0}{2}, \quad \frac{1}{k_2} = 1 - \frac{\phi_0}{\pi}$$

となるので、

$$k_2 = \frac{\pi}{\pi - \phi_0} \tag{21}$$

である。これで、ϕ_0 $(0 < \phi_0 < \pi)$ と R ですべて決定できることになる。ただし、(20) に H の逆関数が入っているためグラフ化はしにくいようにみえるかもしれないが、それはパラメータを θ から Y に変えれば済む。

例えば、$0 \le \theta \le \phi_2/2$ では $Y = f(\theta)$ とすると、(20) より $\theta = H(f(\theta)) = H(Y)$ なので、(19) を

$$\begin{cases} x &= Y\cos H(Y), \\ y &= Y\sin H(Y) \end{cases} \quad (R/k_2 \le Y \le R)$$

とすればよい $(H^{-1}(\phi_0/2) = r_1 = R/k_2)$。さらに、$\hat{Y} = Y/R$ とすると $1/k_2 \leq \hat{Y} \leq 1$ で、

$$s = \sqrt{\frac{R^2 - R^2\hat{Y}^2}{k_2^2 R^2 \hat{Y}^2 - R^2}} = \sqrt{\frac{1 - \hat{Y}^2}{k_2^2\hat{Y}^2 - 1}} \tag{22}$$

となり、H が R によらない式になる (それを $H = \hat{H}(\hat{Y})$ と書く)。これによりグラフは

$$\begin{cases} \dfrac{x}{R} &= \hat{Y}\cos\hat{H}(\hat{Y}), \\ \dfrac{y}{R} &= \hat{Y}\sin\hat{H}(\hat{Y}) \end{cases} \qquad (1/k_2 \leq \hat{Y} \leq 1) \tag{23}$$

となり、$R = 1$ の場合のグラフ全体をそのまま R 倍したものになっていることがわかる。よってグラフとしては $R = 1$ のもののみ考えればよいことになる。

これで、例えば gnuplot[1] の媒介変数モードを使えば、このグラフが書けるようになるのだが、複数の ϕ_0 に対するグラフを一緒に書く場合には、パラメータの範囲が一定でないのは問題があるし、関数に特異性が含まれている ($\hat{Y} = 1/k_2$ で (22) の分母が 0 になる) とそこがうまくつながらない場合があるので、それらを修正する。

まずパラメータの範囲を固定するために、$1/k_2 \leq \hat{Y} \leq 1$ を、

$$0 \leq 1 - \hat{Y} \leq 1 - \frac{1}{k_2} = 1 - \frac{\pi - \phi_0}{\pi} = \frac{\phi_0}{\pi}$$

より、$\tau_0 = \phi_0/\pi$ として、新たなパラメータ ξ を $\xi = (1 - \hat{Y})/\tau_0$ とれば ξ の範囲は $0 \leq \xi \leq 1$ に固定される。そして $(22), (23)$ に $\hat{Y} = 1 - \tau_0\xi$ を代入すれば ξ の式が得られる。

次は特異性の解消であるが、まず、

$$\arctan s = \arctan\sqrt{\frac{1 - \hat{Y}^2}{k_2^2\hat{Y}^2 - 1}} = \mu \quad (-\pi/2 < \mu < \pi/2)$$

とすると、

$$\tan\mu = \sqrt{\frac{1 - \hat{Y}^2}{k_2^2\hat{Y}^2 - 1}}, \quad \frac{1}{\cos^2\mu} = 1 + \tan^2\mu = \frac{(k_2^2 - 1)\hat{Y}^2}{k_2^2\hat{Y}^2 - 1},$$
$$\sin^2\mu = 1 - \cos^2\mu = 1 - \frac{k_2^2\hat{Y}^2 - 1}{(k_2^2 - 1)\hat{Y}^2} = \frac{1 - \hat{Y}^2}{(k_2^2 - 1)\hat{Y}^2}$$

[1] 良く知られたグラフを描画するフリーソフト。例えば [4] 参照。

となり、この最後の式の分母は $\hat{Y} \geq 1/k_2$ より 0 にはならない。よって、μ を特異性のない式

$$\mu = \arcsin \sqrt{\frac{1-\hat{Y}^2}{(k_2^2-1)\hat{Y}^2}} \tag{24}$$

に書き直すことができる。同様に、

$$\arctan k_2 s = \arctan k_2 \sqrt{\frac{1-\hat{Y}^2}{k_2^2\hat{Y}^2-1}} = \eta \quad (-\pi/2 < \eta < \pi/2)$$

とすると、

$$\tan\eta = \sqrt{\frac{k_2^2-k_2^2\hat{Y}^2}{k_2^2\hat{Y}^2-1}}, \quad \frac{1}{\cos^2\eta} = 1+\tan^2\eta = \frac{k_2^2-1}{k_2^2\hat{Y}^2-1},$$
$$\sin^2\eta = 1-\cos^2\eta = 1-\frac{k_2^2\hat{Y}^2-1}{k_2^2-1} = \frac{k_2^2(1-\hat{Y}^2)}{k_2^2-1}$$

となり、こちらも特異性のない

$$\eta = \arcsin \sqrt{\frac{k_2^2(1-\hat{Y}^2)}{k_2^2-1}} \tag{25}$$

と書き直せる。

この (24), (25) を、さらに τ_0, ξ で書き直す。$1-1/k_2 = \tau_0$ より $k_2 = 1/(1-\tau_0)$、および $\hat{Y} = 1-\tau_0\xi$ より、

$$\begin{aligned}
\frac{1-\hat{Y}^2}{(k_2^2-1)\hat{Y}^2} &= \frac{(1-\tau_0)^2\{1-(1-\tau_0\xi)^2)\}}{\{1-(1-\tau_0)^2\}(1-\tau_0\xi)^2} = \left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_0\xi}\right)^2 \frac{2\tau_0\xi-\tau_0^2\xi^2}{2\tau_0-\tau_0^2} \\
&= \left(\frac{1-\tau_0}{1-\tau_0\xi}\right)^2 \frac{\xi(2-\tau_0\xi)}{2-\tau_0}, \\
\frac{k_2^2(1-\hat{Y}^2)}{k_2^2-1} &= \frac{1-\hat{Y}^2}{1-1/k_2^2} = \frac{1-(1-\tau_0\xi)^2}{1-(1-\tau_0)^2} = \frac{\xi(2-\tau_0\xi)}{2-\tau_0}
\end{aligned}$$

となる。よって、H を ξ, τ_0 で書き表すと、

$$H = \bar{H}(\xi,\tau_0) = \arcsin\frac{1-\tau_0}{1-\tau_0\xi}\sqrt{\frac{\xi(2-\tau_0\xi)}{2-\tau_0}} - (1-\tau_0)\arcsin\sqrt{\frac{\xi(2-\tau_0\xi)}{2-\tau_0}} \tag{26}$$

となる $(0 \leq \xi \leq 1)$。

グラフのもう半分の $\phi_0/2 \le \theta \le \phi_0$ の方は、(20) より

$$\theta = \phi_0 - H(f(\theta)) = \tau_0\pi - \hat{H}(\hat{Y}) = \tau_0\pi - \bar{H}(\xi, \tau_0)$$

とすればよいので、結局 $0 \le \theta \le \phi_0/2$ の方は、(26) の $\bar{H}(\xi, \tau_0)$ を使って

$$\begin{cases} \dfrac{x}{R} &= (1 - \tau_0\xi)\cos\bar{H}(\xi, \tau_0), \\ \dfrac{y}{R} &= (1 - \tau_0\xi)\sin\bar{H}(\xi, \tau_0) \end{cases} \quad (0 \le \xi \le 1) \tag{27}$$

と表され、$\phi_0/2 \le \theta \le \phi_0$ の方は、

$$\begin{cases} \dfrac{x}{R} &= (1 - \tau_0\xi)\cos(\tau_0\pi - \bar{H}(\xi, \tau_0)), \\ \dfrac{y}{R} &= (1 - \tau_0\xi)\sin(\tau_0\pi - \bar{H}(\xi, \tau_0)) \end{cases} \quad (0 \le \xi \le 1) \tag{28}$$

と表されることになる。$0 < \tau_0 < 1$ よりこれらには特異性はなく、パラメータの範囲も固定されるので、グラフ化は難しくない。実際、$\tau_0 = 0.1, 0.2, \ldots, 1.0$、すなわち $\phi_0 = 0.1\pi, 0.2\pi, \ldots, \pi$ に対して gnuplot で書いたグラフが図 5 である。

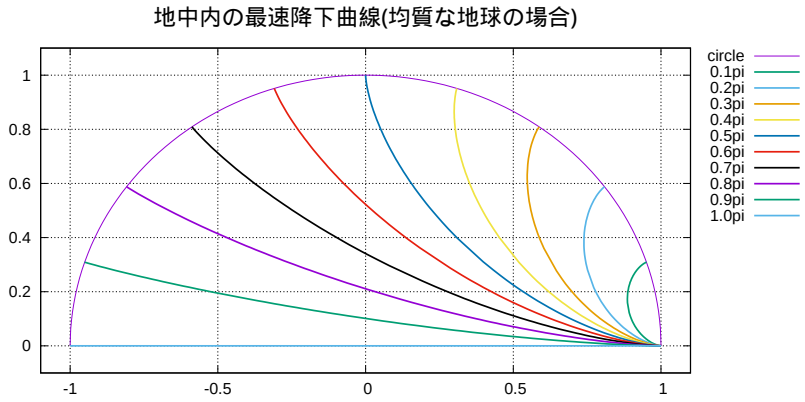

図 5: 均質な地球の場合の最速降下曲線

なお、最後の $\phi_0 = \pi$ に対して注意をしておく。この場合、$\tau_0 = 1$ だから $\bar{H}$ は 0 になり、よって (27) では $x = 1 - \xi$, $y = 0$、(28) では $x = -(1 - \xi)$, $y = 0$ となる。それが、円の直径になっているわけである。

実際に、一般の場合でも $r_1 \to +0$ $(\phi_0 \to \pi - 0)$ の場合に $H(y)$ がこのような直径を表すものに収束することを示しておく。

$r_1 < y < R$ である y を固定し、r_1 を $r_1 \to +0$ とする。このとき、(9) の被積分関数の分母は f に関して単調なので、

$$0 \le H(y) \le \frac{\sqrt{G(R)}}{\sqrt{k_1^2y^2 - G_1(y)}\,y}\int_y^R df = \frac{(R-y)}{y}\sqrt{\frac{G(R)}{k_1^2y^2 - G_1(y)}}$$

でおさえられ、よって $r_1 \to +0$ のとき $k_1 = G_1(r_1)/r_1^2 \to \infty$ より

$$\lim_{r_1 \to +0} H(y) = 0$$

となることがわかる。すなわち、図 3 の H のグラフは、r_1 を小さくすると横軸と鉛直線 $y = r_1$ に張り付いてきて、その極限は $0 < y \leq R$ では 0、$y = 0$ では $H(+0) = \pi/2$ (命題 1) に近づいていくことになる。その結果、解は 0 と π 方向以外の θ に対しては $f(\theta) = 0$ である直径に近づいていくことになる。

7 到達時間と負方向の解

次は、落ちて上がってくるまでの到達時間と、負方向の解を含めた解の決定について考える。

まず、(14) に従って落ちて上がってくるまでの到達時間 $T = T_1$ を求める。この解では、$0 \leq \theta \leq \phi_0/2$ の半分までと、残りの半分の $\phi_0/2 \leq \theta \leq \phi_0$ の部分は対称なので、(7) より

$$\frac{T_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\phi_0/2} \frac{\sqrt{f^2 + (f')^2}}{\sqrt{G_1(f)}}\, d\theta \tag{29}$$

となる。ここで、$0 \leq \theta \leq \phi_0/2$ では $f(\theta) = H^{-1}(\theta)$、すなわち $\theta = H(f)$ なので、これを用いて置換すると、$d\theta = H'(f)df$ で、$f'(\theta) = 1/H'(f)$ なので、

$$\frac{\sqrt{f^2 + (f')^2}}{\sqrt{G_1(f)}}\, d\theta = \frac{\sqrt{f^2 + 1/(H')^2}}{\sqrt{G_1(f)}}\, H'df = -\frac{\sqrt{f^2(H')^2 + 1}}{\sqrt{G_1(f)}}\, df$$

となる $(H' \leq 0)$。ここで、(9) より

$$H'(f) = -\sqrt{\frac{G_1(f)}{k_1^2 f^2 - G_1(f)}}\, \frac{1}{f}$$

なので、

$$f^2(H')^2 + 1 = \frac{k_1^2 f^2}{k_1^2 f^2 - G_1(f)}$$

となり、よって $f(0) = R,\ f(\phi_0/2) = r_1$ より (29) は

$$T_1 = \sqrt{2} \int_{r_1}^{R} \frac{k_1 f\, df}{\sqrt{G_1(f)(k_1^2 f^2 - G_1)}} \tag{30}$$

となる。

(30) の式は、当然 $g(r)$ が与えられなければ計算できないが、均質な地球の場合は計算可能である。その場合は、

$$G_1(f) = \frac{g_0}{2R}(R^2 - f^2), \quad r_1 = \frac{R}{k_2}, \quad k_2^2 = 1 + \frac{2R}{g_0}k_1^2$$

より、

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{2}\int_{R/k_2}^{R} \frac{2R}{g_0} \frac{k_1 f df}{\sqrt{(R^2 - f^2)(k_2^2 f^2 - R^2)}} \\ &= \frac{R}{g_0}\frac{k_1}{k_2}\sqrt{2}\int_{R/k_2}^{R} \frac{2f df}{\sqrt{(R^2 - f^2)(f^2 - R^2/k_2^2)}} \\ &= \frac{R}{g_0}\frac{k_1}{k_2}\sqrt{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} \quad (f^2 = R^2/k_2^2 + (R^2 - R^2/k_2^2)u) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \int_0^1 \frac{2du}{\sqrt{1-(1-2u)^2}} = [\arcsin(2u-1)]_0^1 = \pi$$

であり、また (21), $k_2^2 = 1 + 2Rk_1^2/g_0$ より

$$k_1 = \sqrt{\frac{g_0}{2R}(k_2^2 - 1)} = \sqrt{\frac{g_0}{2R}}\frac{\sqrt{\pi^2 - (\pi^2 - \phi_0)^2}}{\pi - \phi_0}$$

であるから、$\tau_0 = \phi_0/\pi$ を用いれば

$$\frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{g_0}{2R}}\frac{\sqrt{\pi^2 - (\pi^2 - \phi_0)^2}}{\pi} = \sqrt{\frac{g_0}{2R}}\sqrt{1 - (1 - \tau_0)^2}$$

となる。よって、均質な地球の場合の到達時間は

$$T_1 = \pi\sqrt{1 - (1 - \tau_0)^2}\sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

となる。$\phi_0 = \pi$ の場合は、$\tau_0 = 1$ より $T_1 = \pi\sqrt{R/g_0}$ となるが、これは地球の直径を玉が行ったりきたりする単振動の $1/2$ 周期を意味する。地球が均質なら、重力の大きさは (2) のように中心からの距離に比例するので、確かに単振動になる。

さて、微分方程式 (8) に戻ると、これは $f=$ 定数 $=r_1$ も解として持つことがわかる。よって、(14) 以外にも、(14) よりも少し浅いところまで降りて、一旦一定半径の円運動をして、そこからまた H^{-1} で地表まで戻るような滑らかな (8) の解

$$f(\theta)=\begin{cases} H^{-1}(\theta) & (0\le\theta\le\phi_1)\\ r_1 & (\phi_1\le\theta\le\phi_0-\phi_1)\\ H^{-1}(\phi_0-\theta) & (\phi_0-\phi_1\le\theta\le\phi_0)\end{cases} \tag{31}$$

があることがわかる (図 6)。ここで、ϕ_1 は $H(r_1+0)=\phi_1$ となるものであるが、r_1,

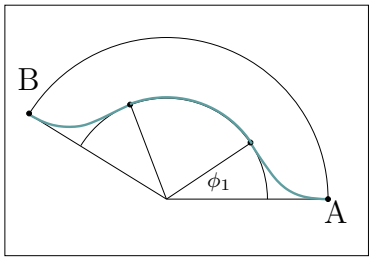

図 6: 途中の円運動を挟む解

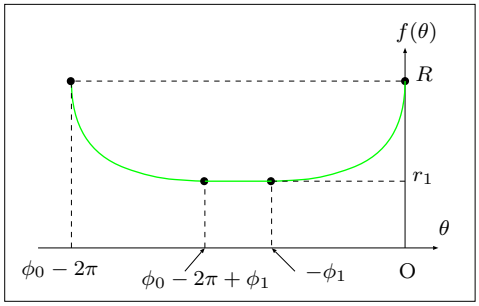

図 7: 反対を回る解の $f(\theta)$

k_1 は (14) のものとは異なる。紛らわしいので、(14) の r_1, k_1 を、以後 r_1^0, k_1^0 と書くことにする (h は命題 1 のもの):

$$k_1^0=\frac{\sqrt{G_1(r_1^0)}}{r_1^0},\quad h(k_1^0)=\frac{\phi_0}{2}$$

これに対し、$r_1^0<r_1<R$ の r_1 と $k_1=\sqrt{G_1(r_1)}/r_1$ $(<k_1^0)$ に対して $\phi_1=h(k_1)$ としたのが上の ϕ_1 であり、(31) の r_1, および H に現れる k_1 もこの r_1, k_1 である。

さらに、前に説明した負方向に回る解もこの形で実現できる (図 7):

$$f(\theta)=\begin{cases} H^{-1}(-\theta) & (0\ge\theta\ge-\phi_1)\\ r_1 & (-\phi_1\ge\theta\ge\phi_0-2\pi+\phi_1)\\ H^{-1}(\theta-\phi_0+2\pi) & (\phi_0-2\pi+\phi_1\ge\theta\ge\phi_0-2\pi)\end{cases} \tag{32}$$

この場合も $k_1=\sqrt{G_1(r_1)}/r_1$, $\phi_1=h(k_1)$ であるが、こちらは r_1 には r_1^0 のような下の制限はなく、$0<r_1\le R$ となる。ちなみに $r_1\to+0$ の極限は、A から中心への半径と、中心から B への半径をつないだ (滑らかではない) トンネルになる。

この (31) による解曲線での到達時間を T_2、この (32) による解曲線での到達時間を T_3 とすると、実際に $T_1<T_2$ かつ $T_1<T_3$ となることを 9 節で証明する。

これにより、(14) が最速降下曲線であることが「それなりに」保証されることになるが、それが最速であることを [1] の 9 節のように完全に証明するのは難しい。

8 命題の証明

本節では、命題 1 を証明する。

$h(k_1)$ は、

$$h(k_1) = \int_{r_1}^{R} \sqrt{\frac{G_1(f)}{k_1^2 f^2 - G_1(f)}}\,\frac{df}{f} \tag{33}$$

であり、$r_1 = r_1(k_1)$ は (12) により決まるが、逆に r_1 が k_1 から (13) により決まるとも見れるので、そう見ればこの $h(k_1)$ は r_1 の関数 $\hat{h}(r_1)$ と考えることもできる。それらは必要に応じて適宜使い分ける。なお、$k_1 \to +0$ は $r_1 \to R-0$ に対応し、$k_1 \to \infty$ は $r_1 \to +0$ に対応し、k_1 と r_1 の増加方向は逆であることに注意する。

まず k_1 を動かすと、(33) の特異性を持つ分母も動いてしまい、極限を考えにくいので、(33) を以下により置換する。

$$s = \frac{\sqrt{k_1^2 f^2 - G_1(f)}}{k_1} \tag{34}$$

これは、f に関して単調なので、$s = s(f, k_1)$ とも書けるが、逆に f を s, k_1 の関数と見ることもできる。それを $f = f_1(s, k_1)$ とすると、

$$\frac{ds}{df} = \frac{1}{2k_1}\,\frac{2k_1^2 f + g(f)}{\sqrt{k_1^2 f^2 - G_1(f)}}$$

で、$s(r_1, k_1) = 0$, $s(R, k_1) = R$ なので、

$$h(k_1) = \int_0^R \frac{2k_1\sqrt{G_1(f_1)}}{2k_1^2 f_1^2 + f_1 g(f_1)}\,ds \tag{35}$$

となる。

まず、$k_1 \to +0$、すなわち $r_1 \to R-0$ の極限を考える。s は f に関して増加、よって f_1 も s に関して増加であり、よって $0 < s < R$ に対して $r_1 < f_1(s, k_1) < R$ となっている。

今、$r_1 \to R-0$ であるから、$0 < k_1 \le \delta$ で $r_1 \ge R/2$ となるような δ (> 0) が取れる。このとき、$f_1(s, k_1) \ge r_1 \ge R/2$ であるから、

$$2k_1^2 f_1^2 + f_1 g(f_1) \ge \frac{R}{2} g\left(\frac{R}{2}\right), \quad \sqrt{G_1(f_1)} \le \sqrt{G(R)}$$

となり、よって (35) より

$$0 < h(k_1) \le \frac{2k_1\sqrt{G(R)}}{(R/2)g(R/2)} \int_0^R ds = \frac{4k_1\sqrt{G(R)}}{g(R/2)}$$

となり、右辺は $k_1 \to +0$ のとき 0 に収束するので、これで (17) が示されたことになる。

次は $k_1 \to \infty$、すなわち $r_1 \to +0$ の極限を考える。(35) をさらに $p = k_1 s$ と置換すると、

$$h(k_1) = \int_0^{k_1 R} \frac{2\sqrt{G_1(f_2)}}{2k_1^2 f_2^2 + f_2 g(f_2)}\, dp$$

となる。ここで f_2 は f_1 を p に書き換えたもの、すなわち $f_2(p, k_1) = f_1(p/k_1, k_1)$ である。(34) より

$$k_1^2 f_2^2 = k_1^2 s^2 + G_1(f_2) = p^2 + G_1(f_2)$$

なので、

$$h(k_1) = \int_0^{k_1 R} \frac{\sqrt{G_1(f_2)}}{p^2 + G_1(f_2) + f_2 g(f_2)/2}\, dp \tag{36}$$

となる。f_2 は、

$$f_2^2 = \frac{p^2 + G_1(f_2)}{k_1^2} \leq \frac{p^2}{k_1^2}$$

であるから、$k_1 \to \infty$ で 0 に収束する。よって、(36) の被積分関数は

$$\lim_{k_1 \to \infty} \frac{\sqrt{G_1(f_2)}}{p^2 + G_1(f_2) + f_2 g(f_2)/2} = \frac{\sqrt{G_1(0)}}{p^2 + G_1(0)} = \frac{\sqrt{G(R)}}{p^2 + G(R)} \tag{37}$$

に収束し、よって $h(k_1)$ は、

$$\lim_{k_1 \to \infty} h(k_1) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{G(R)}}{p^2 + G(R)}\, dp \tag{38}$$

となりそうである。これが成り立つことをちゃんと示すために、次のルベーグ収束定理を用いる。

定理 2. (ルベーグ収束定理)

$x > 0$ 上の関数 $f_n(x)$, $g(x)$ が、すべての x, n で $|f_n(x)| \leq g(x)$ を満たし、

$$\int_0^{\infty} g(x)dx < \infty, \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

であるとき、次が成り立つ。

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

この定理の証明は、ルベーグ積分の適当な成書 (例えば [3]) を参照。

今、

$$\chi_{k_1}(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < k_1 R) \\ 0 & (x > k_1 R) \end{cases}$$

とすると、(36) は

$$h(k_1) = \int_0^\infty \frac{\chi_{k_1}(x)\sqrt{G_1(f_2)}}{p^2 + G_1(f_2) + f_2 g(f_2)/2}\, dp \tag{39}$$

となるが、$k_1 \to \infty$ のとき $\chi_{k_1}(x) \to 1$ なので、(39) の被積分関数の極限も (37) の極限に等しい。一方、$g(r)$ は増加関数なので、

$$G(f_2) - f_2 g(f_2) = \int_0^{f_2} g(r)dr - f_2 g(f_2) = \int_0^{f_2} (g(r) - g(f_2))dr \le 0$$

であり、よって

$$G_1(f_2) + \frac{f_2 g(f_2)}{2} = \frac{G_1(f_2)}{2} + \frac{G(R)}{2} + \frac{1}{2}(f_2 g(f_2) - G(f_2)) \ge \frac{G(R)}{2}$$

となる。$G_1(f_2) \le G(R)$ より、(39) の被積分関数は

$$\frac{\chi_{k_1}(x)\sqrt{G_1(f_2)}}{p^2 + G_1(f_2) + f_2 g(f_2)/2} \le \frac{G(R)}{p^2 + G(R)/2}$$

とおさえられることがわかり、この右辺は k_1 によらず、

$$\int_0^\infty \frac{G(R)}{p^2 + G(R)/2}\, dp \le \int_0^1 \frac{G(R)}{G(R)/2}\, dp + \int_1^\infty \frac{G(R)}{p^2}\, dp = 2 + G(R) < \infty$$

となる。よって定理 2 が適用でき、確かに (38) が成り立つことがわかる。

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{G(R)}}{p^2 + G(R)}\, dp = \int_0^\infty \frac{du}{u^2 + 1} = [\arctan u]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

となるので、これで (18) も示された。

最後は、$h(k_1)$ の単調性であるが、それは (36) を用いる。(36) の分母には特異性はなく、

$$h(k_1) = \int_0^{k_1 R} F_1(f_2(p, k_1), p)dp, \quad F_1(f_2, p) = \frac{\sqrt{G_1(f_2)}}{p^2 + G_1(f_2) + f_2 g(f_2)/2}$$

の形である。よって、$k_1 > 0$ に対して $h(k_1)$ の微分は、

$$h'(k_1) = RF_1(f_2(k_1R, k_1), k_1R) + \int_0^{k_1R} \frac{\partial F_1}{\partial f_2} \frac{\partial f_2}{\partial k_1}\, dp \tag{40}$$

となる。ここで、F_1 の分母を F_2 とすると $\partial F_1/\partial f_2$ は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial f_2} &= \frac{\left(-g/(2\sqrt{G_1}\right) F_2 - \sqrt{G_1}\,(-g + g/2 + f_2 g'/2)}{F_2^2} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{G_1}F_2^2}\left(gp^2 + gG_1 + \frac{f_2 g^2}{2} - gG_1 + f_2 g' G_1\right) \\
&= -\frac{gp^2 + f_2 g^2/2 + f_2 g' G_1}{2\sqrt{G_1}F_2^2}
\end{aligned}$$

となるが、g は増加関数で $g > 0,\ 0 < f_2 < R,\ G_1 > 0$ より $\partial F_1/\partial f_2 < 0$ となる。また、

$$k_1 = \frac{\sqrt{p^2 + G_1(f_2)}}{f_2}$$

であるから k_1 は f_2 に関して減少、よって $\partial f_2/\partial k_1 < 0$ となるので、(40) から $h'(k_1) > 0$ がわかる。これで $h(k_1)$ の単調性も示され、命題 1 が示されたことになる。

9 到達時間の比較

この節では、7 節で最後に述べた、いくつかの解に対する到達時間 $T_1,\ T_2,\ T_3$ の比較を行う。まず $T_2,\ T_3$ の式を求める。

7 節でみたように、T_2 は $r_1^0 < r_1 < R,\ k_1 = k_1(r_1) = \sqrt{G_1(r_1)}/r_1$ に対し $\phi_1 = h(k_1)$ としたものに対する (31) の形の解の到達時間が T_2 であるが、$k_1^0 = k_1(r_1^0) > k_1(r_1) = k_1$ より、命題 1 により $\phi_1 = h(k_1) < h(k_1^0) = \phi_0/2$ となるので、確かに $\phi_1 < \phi_0 - \phi_1$ となっていることがわかる。

この $\phi_1 \le \theta \le \phi_0 - \phi_1$ の間では $f(\theta) = r_1$、すなわち円運動となるが、その間は向心力と垂直抗力のいずれも半径方向の力だけが働くので、等速円運動となる。実際、半径 r_1 の円運動の加速度は、

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\{r_1(\cos\theta, \sin\theta)\} &= \frac{d}{dt}\{r_1(-\sin\theta, \cos\theta)\dot{\theta}\} \\
&= -r_1(\cos\theta, \sin\theta)(\dot{\theta})^2 + r_1(-\sin\theta, \cos\theta)\ddot{\theta}
\end{aligned}$$

であるが、力は $(\cos\theta, \sin\theta)$ に平行にしか働かないので、$\ddot{\theta} = 0$ であり、よって角速度 $\dot{\theta} =$ 一定 の等速円運動となる。

$\theta \to \phi_1 - 0$ では、曲線は丁度半径 r_1 の円に接し、そのときの速度ベクトルも円に接する。よって、その到達時の速さが円運動の速さに一致する。その速さ v_1 は、エネルギー保存則 (4) から求めることができ、

$$G(R) = \frac{v_1^2}{2} + G(r_1)$$

より、

$$v_1 = \sqrt{2(G(R) - G(r_1))} = \sqrt{2G_1(r_1)}$$

となり、角速度 ω_1 は

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r_1} = \frac{\sqrt{2G_1(r_1)}}{r_1} = \sqrt{2}\, k_1$$

となる。よって $\phi_1 \le \theta \le \phi_0 - \phi_1$ でかかる時間は

$$\frac{\phi_0 - 2\phi_1}{\omega_1} = \frac{\phi_0 - 2h(k_1)}{\sqrt{2}\, k_1}$$

となる。今、$r_1 = r_1(k_1)$ に対して、

$$t_0(k_1) = \int_{r_1}^{R} \frac{k_1 f df}{\sqrt{G_1(f)\{k_1^2 f^2 - G_1(f)\}}} \tag{41}$$

と書くことにすれば、(31) の $0 < \theta < \phi_1$ までにかかる時間は (30) により $t_0(k_1)/\sqrt{2}$ であり、$\phi_0 - \phi_1 < \theta < \phi_0$ の部分も同じなので、結局 T_2 は、

$$T_2 = \sqrt{2}\, t_0(k_1) + \frac{\phi_0 - 2h(k_1)}{\sqrt{2}\, k_1} \tag{42}$$

となる。

同様に T_3 は、$0 < r_1 < R$ に対して $k_1 = k_1(r_1)$, $\phi_1 = h(k_1)$ に対する (32) による解がかかる時間であるから、上と同様にして

$$T_3 = \sqrt{2}\, t_0(k_1) + \frac{2\pi - \phi_0 - 2h(k_1)}{\sqrt{2}\, k_1}$$

となることがわかる。

T_1 は (30) と $\phi_0 = 2h(k_1^0)$ により $T_1 = \sqrt{2}\, t_0(k_1^0)$ であり、(42) で $k_1 \to k_1^0$ とすれば $r_1 \to r_1(k_1^0) = r_1^0$ となるので $T_2 \to T_1$ となる。T_2 では $r_1^0 < r_1 < R$ より $k_1 < k_1^0$ であるから、よって $T_2 > T_1 = T_2(k_1^0)$ を示すには、T_2 の k_1 に関する単調減少性を示せばよい

$t_0(k_1)$ を少し変形すると、

$$\begin{aligned} t_0(k_1) &= \int_{r_1}^{R} \frac{k_1^2 f^2}{\sqrt{G_1(k_1^2 f^2 - G_1)}} \frac{df}{k_1 f} \\ &= \int_{r_1}^{R} \sqrt{\frac{k_1^2 f^2 - G_1}{G_1}} \frac{df}{k_1 f} + \int_{r_1}^{R} \sqrt{\frac{G_1}{k_1^2 f^2 - G_1}} \frac{df}{k_1 f} \\ &= \frac{1}{k_1} \int_{r_1}^{R} \sqrt{\frac{k_1^2 f^2 - G_1}{G_1}} \frac{df}{f} + \frac{h(k_1)}{k_1} \end{aligned} \tag{43}$$

となる。この最後の式の最初の項を $t_1(k_1)$ と書くことにする。

$$t_1(k_1) = \frac{1}{k_1} \int_{r_1}^{R} \sqrt{\frac{k_1^2 f^2 - G_1}{G_1}} \frac{df}{f} = \int_{r_1}^{R} \sqrt{\frac{1}{G_1} - \frac{1}{k_1^2 f^2}}\, df \tag{44}$$

これにより、

$$T_1 = \sqrt{2}\, t_0(k_1^0) = \sqrt{2}\, t_1(k_1^0) + \frac{\sqrt{2}\, h(k_1^0)}{k_1^0}, \tag{45}$$

$$T_2 = \sqrt{2}\, t_0(k_1) + \frac{\phi_0 - 2h(k_1)}{\sqrt{2}\, k_1} = \sqrt{2}\, t_1(k_1) + \frac{\phi_0}{\sqrt{2}\, k_1}, \tag{46}$$

$$T_3 = \sqrt{2}\, t_0(k_1) + \frac{2\pi - \phi_0 - 2h(k_1)}{\sqrt{2}\, k_1} = \sqrt{2}\, t_1(k_1) + \frac{2\pi - \phi_0}{\sqrt{2}\, k_1} \tag{47}$$

となる。

さて、(44) より $t_1(k_1)$ は特異性を持たず、よって $t_1(k_1)$ を微分すると

$$t_1'(k_1) = -\sqrt{\frac{1}{G_1(r_1)} - \frac{1}{(k_1 r_1)^2}} \frac{dr_1}{dk_1} + \int_{r_1}^{R} \frac{1}{2\sqrt{1/G_1 - 1/(k_1 f)^2}} \frac{2}{k_1^3 f^2}\, df$$

となるが、この最初の項は (12) より 0 になるので、

$$t_1'(k_1) = \int_{r_1}^{R} \frac{k_1 f \sqrt{G_1}}{\sqrt{k_1^2 f^2 - G_1}} \frac{df}{k_1^3 f^2} = \frac{h(k_1)}{k_1^2} \tag{48}$$

となることがわかる。(46), (48), および $\phi_0 = 2h(k_1^0)$ より、T_2 を k_1 で微分すると

$$\frac{dT_2}{dk_1} = \left(\sqrt{2}\, t_1(k_1) + \frac{\phi_0}{\sqrt{2}\, k_1} \right)' = \sqrt{2}\, \frac{h(k_1)}{k_1^2} - \frac{\phi_0}{\sqrt{2}\, k_1^2} = \frac{\sqrt{2}}{k_1^2} (h(k_1) - h(k_1^0))$$

となるが、命題 1、および $k_1 < k_1^0$ より $h(k_1) < h(k_1^0)$ なので、よって $dT_2/dk_1 < 0$ であることがわかる。これで T_2 の減少性が言えて、$T_2 = T_2(k_1) > T_2(k_1^0) = T_1$ が言えたことになる。

次は T_3 と T_1 を比較する。T_2 の場合と違い T_3 では k_1 には制限はなく、$k_1 > 0$ であるが、(47), (48) より、

$$\frac{dT_3}{dk_1} = \left(\sqrt{2}\, t_1(k_1) + \frac{2\pi - \phi_0}{\sqrt{2}\, k_1}\right)' = \sqrt{2}\, \frac{h(k_1)}{k_1^2} - \frac{2\pi - \phi_0}{\sqrt{2}\, k_1^2} = \frac{2h(k_1) + \phi_0 - 2\pi}{\sqrt{2}\, k_1^2}$$

となる。ここで $\phi_0 < \pi$ で、命題 1 より $2h(k_1) < \pi$ なので、$dT_3/dk_1 < 0$ となる。よって、$k_1 > 0$ に対して、

$$T_3 > \lim_{k_1 \to \infty} T_3(k_1) \tag{49}$$

となる。ここで、(44)、及び $k_1 \to \infty$ のとき $r_1 \to +0$ により

$$\lim_{k_1 \to \infty} t_1(k_1) = \int_0^R \frac{df}{\sqrt{G_1(f)}} \tag{50}$$

が言える (厳密には定理 2 で証明できる)。よって、(47) より

$$\lim_{k_1 \to \infty} T_3(k_1) = \sqrt{2} \int_0^R \frac{df}{\sqrt{G_1}} \tag{51}$$

となる。なお、この右辺の積分は、$f = R$ で特異性を持つが、$G_1'(R) = -g(R) < 0$ より有限である。

一方、$k_1 > 0$ に対して、(48) より

$$t_0'(k_1) = \left(t_1(k_1) + \frac{h(k_1)}{k_1}\right)' = \frac{h(k_1)}{k_1^2} - \frac{h(k_1)}{k_1^2} + \frac{h'(k_1)}{k_1} = \frac{h'(k_1)}{k_1}$$

となるから、命題 1 より $t_0'(k_1) > 0$ で、よって

$$t_0(k_1) < \lim_{k_1 \to \infty} t_0(k_1) \tag{52}$$

となるが、命題 1、および (50) より

$$\lim_{k_1 \to \infty} t_0(k_1) = \lim_{k_1 \to \infty} t_1(k_1) = \int_0^R \frac{df}{\sqrt{G_1}} \tag{53}$$

がわかる。よって、(45), (49), (51), (52), (53) より、

$$T_1 = \sqrt{2}\, t_0(k_1^0) < \lim_{k_1 \to \infty} \sqrt{2}\, t_0(k_1) = \sqrt{2} \int_0^R \frac{df}{\sqrt{G_1}} = \lim_{k_1 \to \infty} T_3(k_1) < T_3(k_1)$$

が言えたことになり、これで任意の $k_1 > 0$ に対して $T_1 < T_3$ も示されたことになり、途中に円の一部をはさむもの T_2, T_3 よりも T_1 の方が速いことが示されたことになる。

10 軸方向路を含む解

最後に、T_1 ともう一つの解らしきものの到達時間 T_4 とを比較する。

本稿では、元々曲線を $r = f(\theta)$ の形のものと仮定しているが、これは θ に関して一意には r が決まらない左右に振れる解や、軸方向 (半径方向) に進む道を表しえない。すなわち、そういった道を解として認めていないことになる。

左右に振れる曲線路では最速にはならないことは容易に想像がつくが、半径方向の道は必ずしも遅くはなく、実際 $\phi_0 = \pi$ の場合にはそのようなものが最速を与えている。本節では、そのような道を含むような解を考えてみる。

例えば、A からある半径 R' $(< R)$ の位置 C までは井戸のように真下 (中心方向) に進み、その C、極座標で言えば $(r, \theta) = (R', 0)$ から D: $(r, \theta) = (R', \phi_0)$ までは今までの最速線のようなトンネルを通り、D から B まではまた真上 (中心の逆方向) に井戸を上がる、といった解が考えられる。それによる到達時間 T_4 を考えてみる (図 8)。

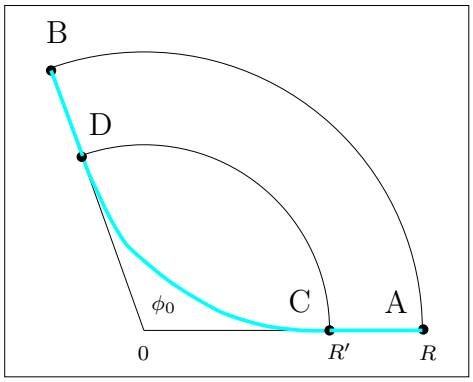

図 8: 最初と最後が井戸状の最速降下曲線

実は、この中間部は、C での初速度が 0 ではないため、前の解の R を単に R' にしたものにはならない。よって、まずそこから考え直す。

2 節の問題 (半径 R) の初速度を 0 から v_0 (> 0) に変えた問題を考える。その場合、2 節の計算では (5) の式が

$$v^2 + 2G(r) = v_0^2 + 2G(R)$$

に変わるので、(7) は、

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\phi_0} \frac{\sqrt{f^2 + (f')^2}}{v_0^2/2 + \sqrt{G_1(f)}}\, d\theta$$

に変わる。この場合、オイラー方程式は G_1 を $v_0^2/2 + G_1$ に変えるだけなので、微分方程式 (8) は

$$f' = \pm f \sqrt{\frac{k_3^2 f^2 - v_0^2/2 - G_1(f)}{v_0^2/2 + G_1(f)}}$$

になり、(9) の H の代わりに

$$H_1(y) = \int_y^R \sqrt{\frac{v_0^2/2 + G_1(f)}{k_3^2 f^2 - v_0^2/2 - G_1(f)}} \frac{df}{f} \tag{54}$$

を考えればよいことになる。$H_1(y)$ が定義される下の制限は、(12) 同様

$$k_3^2 r_2^2 = \frac{v_0^2}{2} + G_1(r_2) \tag{55}$$

となる r_2 $(0 < r_2 < R)$ によって決まることになるが、$k_3^2 f_2^2 - v_0^2/2 - G_1(f)$ の値は $f = 0$ では $-v_0^2/2 - G(R) < 0$ であるが、$f = R$ では $k_3^2 R^2 - v_0^2/2$ となり、この値が 0 以下だとそのような r_2 は $0 < r_2 < R$ の範囲には存在しない。よって、今は

$$k_3 > \frac{v_0}{\sqrt{2}\, R} \tag{56}$$

である k_3 のみを考えることにする。その場合は確かに $0 < r_2 < R$ となる r_2 が存在し、

$$k_3 = \frac{\sqrt{v_0^2/2 + G_1(r_2)}}{r_2}$$

により r_2 と k_3 は単調に対応する。その増加方向は逆方向で、$r_2 \to +0$ は k_1 同様 $k_3 \to \infty$ に対応するが、$r_2 \to R - 0$ は $k_3 \to v_0/(\sqrt{2}\, R) + 0$ に対応し、k_1 とは少し異なる。そして、

$$h_2(k_3) = H_1(r_2 + 0) = \int_{r_2}^R \sqrt{\frac{v_0^2/2 + G_1(f)}{k_3^2 f^2 - v_0^2/2 - G_1(f)}} \frac{df}{f}$$

とすると、前と同様に $h_2(k_3) = \phi_0/2$ となる k_3 により初速度 v_0 の最速降下曲線が決定することになる。そのような k_3 が一意的に決定することを以下に示す。それは命題 1 の証明とほぼ同じで、まず、$s = \sqrt{(k_3 f)^2 - v_0^2/2 - G_1(f)}/k_3$ により

$$h_2(k_3) = \int_0^{s_1} \frac{k_3 \sqrt{v_0^2/2 + G_1(f_3)}}{(k_3 f_3)^2 + f_3 g(f_3)/2}\, ds \quad \left(s_1 = \sqrt{(k_3 R)^2 - v_0^2/2}/k_3 \right)$$

と変形することで、定理 2 を用いて

$$\lim_{k_3 \to v_0/(\sqrt{2}R)+0} h_2(k_3) = 0 \tag{57}$$

を示すのであるが、$f_3 = f_3(s, k_3)$ は $(k_3 s)^2 = (k_3 f_3)^2 - v_0^2/2 - G_1(f_3)$ から定まるもので、よって $r_2 < f_3(s, k_3) < R$ で、その有界性と

$$s_1 = \frac{\sqrt{(k_3 R)^2 - v_0^2/2}}{k_3} = \sqrt{R^2 - \frac{v_0^2}{2k_3^2}} \to \sqrt{R^2 - R^2} = 0$$

から (57) が示される。

また、$k_3 s = p$ として $(p_1 = k_3 s_1)$

$$h_2(k_3) = \int_0^{p_1} \frac{\sqrt{v_0^2/2 + G_1(f_4)}}{(k_3 f_4)^2 + f_4 g(f_4)/2}\, ds = \int_0^{p_1} \frac{\sqrt{v_0^2/2 + G_1}}{p^2 + v_0^2/2 + G_1 + f_4 g/2}\, ds \tag{58}$$

と書き直せば $(f_4(p, k_3) = f_3(p/k_3, k_3))$、$k_3 \to \infty$ のときに

$$\lim_{k_3 \to \infty} h_2(k_3) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{v_0^2/2 + G_1(R)}}{p^2 + v_0^2/2 + G_1(R)}\, dp = \frac{\pi}{2}$$

であることが示され、よって任意の ϕ_0 $(0 < \phi_0 < \pi)$ に対して

$$h_2(k_3^0) = \frac{\phi_0}{2}$$

となる k_3^0 (> 0) が存在することがわかる。h_2 の単調性も前と同様に (58) の導関数を計算することで示すことができ、それにより k_3^0 の一意性も保証される。

その k_3^0 に対し、

$$f(\theta) = \begin{cases} H_1^{-1}(\theta) & (0 \le \theta \le \phi_0/2) \\ H_1^{-1}(\phi_0 - \theta) & (\phi_0/2 \le \theta \le \phi) \end{cases}$$

が初速度 v_0 に対する解を与える。この場合の到達時刻は、(30) と同様にして、

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{2} \int_0^{\phi_0/2} \frac{\sqrt{f^2 + (f')^2}}{v_0^2/2 + \sqrt{G_1(f)}}\, d\theta = \sqrt{2} \int_{r_2}^{R} \frac{\sqrt{(f H_1')^2 + 1}}{v_0^2/2 + \sqrt{G_1(f)}}\, df \\ &= \sqrt{2} \int_{r_2}^{R} \frac{k_3 f\, df}{\sqrt{(v_0^2/2 + G_1)(k_3^2 f^2 - v_0^2/2 - G_1)}} \end{aligned} \tag{59}$$

となることがわかる。

さて、井戸を含む解の問題に戻る。この場合、R' での初速度 v_0 は、エネルギー保存則 (4) により、

$$\frac{v_0^2}{2} + G(R') = G(R)$$

から

$$v_0 = \sqrt{2G_1(R')} \tag{60}$$

と考えればよい。(54) で R を R' としたものにこの (60) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2}{2} + G(R') - G(f) &= G_1(R') + G(R') - G(f) \\ &= G(R) - G(R') + G(R') - G(f) \;=\; G_1(f) \end{aligned}$$

より、

$$H_1(y) = \int_y^{R'} \sqrt{\frac{G_1(f)}{(k_3 f)^2 - G_1(f)}}\,\frac{df}{f} \tag{61}$$

と、$H(y)$ の積分範囲の上限が変わっただけのもの (と k_1 を k_3 にしたもの) になる。r_2 を決める (55) は、

$$k_3^2 r_2^2 = G_1(r_2)$$

となるので、k_3 と r_2 の関係は、k_1 と r_1 の関係に等しく、よって

$$k_3 = k_1(r_2), \quad r_2 = r_1(k_3)$$

となる。また、(56) の条件は、

$$k_3 > \frac{v_0}{\sqrt{2}\,R'} = \frac{\sqrt{G_1(R')}}{R'} = k_1(R')$$

に対応するので、$k_3 = k_1(r_2)$ より、これは結局 $0 < r_2 < R'$ という条件と同じことになる。

$h_2(k_3)$ は、

$$h_2(k_3) = \int_{r_2}^{R'} \sqrt{\frac{G_1(f)}{(k_3 f)^2 - G_1(f)}}\,\frac{df}{f} \tag{62}$$

となるので、これも $h(k_1)$ と比較すると積分範囲の上端 (と k_1, k_3) が違っているだけになる。

$h_2(k_3^0) = \phi_0/2$ となる $k_3^0 > 0$ に対し $r_2^0 = r_1(k_3^0)$ とすると、C から D までにかかる時間 t_3 は、(59) により、

$$t_3 = \sqrt{2}\int_{r_2^0}^{R'} \frac{k_3^0 f df}{\sqrt{G_1\{(k_3^0 f)^2 - G_1\}}}$$

となる。一方、A から C までの時間 t_4 は、下向きの速度 v が

$$\frac{v^2}{2} + G(r) = G(R)$$

より

$$v = -\frac{dr}{dt} = \sqrt{2G_1(r)}$$

となるので、この逆数を積分して

$$t_4 = \int_{R'}^{R} \frac{df}{\sqrt{2G_1(f)}}$$

となることがわかる。D から B まで上がるのも同じ t_4 だから、結局この経路による A から B までの到達時間 T_4 は、

$$T_4 = t_3 + 2t_4 = \sqrt{2}\int_{r_2^0}^{R'} \frac{k_3^0 f df}{\sqrt{G_1\{(k_3^0 f)^2 - G_1\}}} + \sqrt{2}\int_{R'}^{R} \frac{df}{\sqrt{G_1}} \tag{63}$$

となることがわかる。

T_4 は R' によって変化するが、当然 $R' \to R - 0$ のとき、$T_4 \to T_1$ となる。ただし、それを式の上でちゃんと示すには、(58) のような変数変換と定理 2 が必要になる (証明は省略)。

さて、この T_4 を T_1 と比較するのであるが、そのために T_4 を R' の関数 $T_4 = T_4(R')$ と考えて、それが R' の減少関数であることを示す。もしそれが言えれば、

$$T_4(R') > \lim_{R' \to R-0} T_4(R') = T_1$$

となり、$T_1 < T_4$ が示されることになる。

まず、(41) の $t_0(k_1)$ の積分範囲の上端を R' にしたものを k_1 と R' の関数と考えて $\bar{t}_0(k_1, R')$ とする。

$$\bar{t}_0(k_1, R') = \int_{r_1}^{R'} \frac{k_1 f df}{\sqrt{G_1(k_1^2 f^2 - G_1)}} \quad (r_1 = r_1(k_1))$$

これに対し、$r_2^0 = r_1(k_3^0)$ より、(63) は

$$T_4 = \sqrt{2}\,\bar{t}_0(k_3^0, R') + \sqrt{2}\int_{R'}^{R} \frac{df}{\sqrt{G_1}} \tag{64}$$

と書ける。さらに、(44) の $t_1(k_1)$ の積分範囲の上端を R' にしたものを

$$\bar{t}_1(k_1, R') = \int_{r_1}^{R'} \sqrt{\frac{(k_1 f)^2 - G_1}{G_1}}\,\frac{df}{k_1 f}$$

とすれば (43) と同様に

$$\bar{t}_0(k_1, R') = \bar{t}_1(k_1, R') + \frac{1}{k_1} h_2(k_1) \tag{65}$$

となり、そして (48) と同様にして、

$$\frac{\partial}{\partial k_1}\bar{t}_1(k_1, R') = \frac{1}{k_1^2} h_2(k_1) \tag{66}$$

となることもわかる。また、

$$\frac{\partial}{\partial R'}\bar{t}_1(k_1, R') = \sqrt{\frac{(k_1 R')^2 - G_1(R')}{G_1(R')}}\,\frac{1}{k_1 R'} = \sqrt{\frac{1}{G_1(R')} - \frac{1}{(k_1 R')^2}} \tag{67}$$

となる。

(62) の $h_2(k_3)$ も、R' が含まれているので、正確には R' にも依存する関数になる。

$$h_2(k_1, R') = \int_{r_1}^{R'} \sqrt{\frac{G_1(f)}{(k_1 f)^2 - G_1(f)}}\,\frac{df}{f} \quad (r_1 = r_1(k_1))$$

(62) の r_2 は $r_2 = r_1(k_1)$ であるから、(62) は $h_2(k_3, R')$ と書ける。

k_3^0 はこの意味では

$$h_2(k_3^0, R') = \frac{\phi_0}{2} \tag{68}$$

となり、よって k_3^0 も R' の関数となる。それを $k_3^0 = k_3(R')$ と書くことにする。

これで、$r_2^0 = r_1(k_3^0) = r_1(k_3(R'))$ となるので、(64) の T_4 の R 以外のパラメータはすべて R' の 1 変数関数として表すことができ、$T_4 = T_4(R')$ と見ることができるようになる $(k_3^0 = k_3(R'))$。$(65), (68)$ より、それは以下のように書ける。

$$T_4(R') = \sqrt{2}\left(\bar{t}_0(k_3^0, R') + \int_{R'}^{R} \frac{df}{\sqrt{G_1}}\right) = \sqrt{2}\left(\bar{t}_1(k_3^0, R') + \frac{\phi_0}{k_3^0} + \int_{R'}^{R} \frac{df}{\sqrt{G_1}}\right)$$

この式を R' で微分すると、(66), (67), (68) により、

$$\begin{aligned}
\frac{dT_4}{dR'} &= \sqrt{2}\left(\frac{\partial \bar{t}_1}{\partial k_1}k_3'(R') + \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial R'} - \frac{\phi_0}{(k_3^0)^2}k_3'(R') - \frac{1}{\sqrt{G_1(R')}}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{(k_3^0)^2}h_2(k_3^0, R')k_3'(R') + \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial R'} - \frac{\phi_0}{(k_3^0)^2}k_3'(R') - \frac{1}{\sqrt{G_1(R')}}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{G_1(R')} - \frac{1}{(k_3^0 R')^2}} - \frac{1}{\sqrt{G_1(R')}}\right) \\
&< 0
\end{aligned}$$

となることがわかる。これで、T_4 が R' に関して減少関数であり、よって

$$T_4 > \lim_{R' \to R-0} T_4(R') = T_1$$

となることが示されたことになり、井戸を含む解よりも、T_1 を与える解の方が速いことがわかる。

なお、この T_4 を与える解は、厳密に言えば、連続ではあるが滑らかな解にはなっていない。(61) より、

$$H_1'(R') = -\sqrt{\frac{G_1(R')}{(k_3 R')^2 - G_1(R')}}\,\frac{1}{R'} < 0$$

であるから $H'(R) = 0$ とは異なり、$r = R'$ の場所 C で $f'(0) = -\infty$ ではなく $f'(0) < 0$ を与える。よって、そこでの曲線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(0)\sin 0 + f(0)\cos 0}{f'(0)\cos 0 - f(0)\sin 0} = \frac{R'}{f'(0)} < 0$$

となり、C の地点では、A から C までの水平線と C から D までの曲線は角ができ、滑らかにはつながっていないことになる。同様に D の場所でも角ができる。

そうすると、A から井戸に落した玉は、C のところで壁に衝突し、C での速さ (60) はそのまま C から D への曲線の初速度にはならないし、D の場所でも壁にぶつかり速度が多少減ってしまう。C, D の角を少し丸めてそこで速度が減衰しないようにすることは可能かもしれないが、そうすると今度はその丸めた短い部分が厳密には上の最速曲線の状況とは変わってしまう。

よって厳密にはこの T_4 を与える通路は時間 T_4 を与えないのだが、角を丸めたもののその丸め部分を小さくした極限とみなせば T_4 を考えること自体に意味がないわけでもない。

ちなみに、そのような極限的な少し変な解は、変分問題ではよく現れる。

11 最後に

本稿では、地中を通る最速降下線を考え、[1] と同様に変分法により最速降下線 (14) (または (20)) を得ることができた。ただし、オイラー方程式 (8) の解は一意的ではなく、途中に円運動を挟む解 (31) や反対に回る解 (32)、半径方向の移動を挟む解 (10 節) なども示した上でその到達時間を比較し、やはり (14) が最速であることを確認した。

最初にも述べたように、(14) は厳密にはサイクロイドではないし、具体的な名前がついている曲線なのかは単純な場合の (27), (28) に限ってもわからないが、それほど複雑な計算ではないので、既に知られている結果ではあるだろう。

最近、中東の方で「ハイパーループ」という、地中にトンネルを掘り、その中を減圧することで空気抵抗を減らして飛行機並 (より速い ?) の速度を実現する輸送手段が計画されているという話を聞いた。空気抵抗が 0 でなければ完全に今回の地中最速線が最速にはならないが、ある程度はこういう話を参考にして、この手の形状のトンネル、すなわち出発時と到着時は地面に垂直になるのだろうかと少し興味はある。燃料ロスを小さくするにはそれが最適だと思うが、人が乗るのだとするとそういう運行はほぼ垂直落下型のジェットコースターになり、だれでも乗れるというものではなくなってしまうような気がする。

参考文献

[1] 竹野茂治、「最速降下線について」、http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#cycloid1 (2016)

[2] 竹野茂治、「地球の重力について」、http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#gravity2 (2016)

[3] 伊藤清三、「ルベーグ積分入門」、裳華房 (1963)

[4] 山本昌志、「gnuplot の精義」(第二版)、カットシステム (2013)