2017 年 02 月 03 日
(2017 年 03 月 22 日 「アーベルの問題」の節を追加)

等時降下曲線

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

以前、[1] で考察したように、ある地点からある地点までの 2 次元的な最速降下曲線は逆さサイクロイドであり、さらにその逆さサイクロイドは「等時降下性」、すなわち最下点に降りるまでの時間が曲線のどこからスタートしても同じ、という性質を持っていた。

そこから、逆に「等時降下性を持つ曲線はサイクロイドだけなのか」という疑問がうかび、それを少し考えてみたので、ここにまとめておくことにする。

なお、「等時降下性」とは一般的な用語ではないと思うが、それに対応する用語を見つけられなかったので、本稿ではとりあえずそう呼ぶことにする。

2 設定

まず問題を以下のように設定する。

> xy 平面上の A(L,H) $(L>0,\ H>0)$ と 原点 O$(0,0)$ を通る曲線 $y=f(x)$ $(0\leq x\leq L)$ に沿って O に向かって玉を初速度 0 で滑らす (またはころがす) とき、AO 間のどの場所からスタートしても O に至る時間が変わらないような関数 $f(x)$ を求めよ (図 1)。

問題の設定より、明らかに

$$f'(x)>0\quad(0<x<L) \tag{1}$$

である必要があることに注意する。よって、$f(x)$ は増加関数となる。

[1] で見たように、この曲線上の任意の点 P$(\alpha,f(\alpha))$ $(0<\alpha<L)$ から初速 0 でスタートした玉がすべって O に至るまでの時間 T は、

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^\alpha\sqrt{\frac{1+(f'(x))^2}{f(\alpha)-f(x)}}\,dx \tag{2}$$

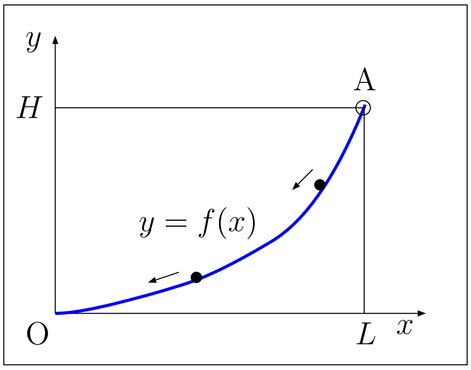

図 1: 設定

で与えられる (g は重力加速度)。ころがる場合も、半径が十分に小さいと考えればこの定数倍となるだけだから、結局 (2) が α によらずに一定になるような $f(x)$ を求めればいいことになる。

T が α に関して一定であることから、

$$\frac{dT}{d\alpha} = 0$$

であり、通常はこの式から f の微分方程式 (または積分方程式) を導くのだが、(2) の被積分関数は $x = \alpha$ で特異性を持つので、(2) は単純には微分できない。よって別の方法を考える。

3 逆関数

(1) より $f(x)$ は増加関数なので、$y = f(x)$ の逆関数 $x = p(y)$ が存在する。$f(0) = 0$, $f(L) = H$ より、$p(0) = 0$, $p(H) = L$ で、

$$p'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} > 0 \tag{3}$$

となる。$x = p(y)$ により (2) を y の積分に置換すると、

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{f(\alpha)} \sqrt{\frac{1 + (1/p'(y))^2}{f(\alpha) - y}}\, p'(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{f(\alpha)} \sqrt{\frac{1 + (p'(y))^2}{f(\alpha) - y}}\, dy$$

となるので、$f(\alpha) = \beta$ とすれば、元の問題は $0 < \beta < H$ の任意の β に対して、

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\beta} \sqrt{\frac{1 + (p'(y))^2}{\beta - y}}\, dy \tag{4}$$

が定数となる $p(y)$ を求めることになる。(4) で $G(y)=\sqrt{1+(p'(y))^2}$ とすると、この式は

$$\int_0^\beta \frac{G(y)}{\sqrt{\beta-y}}\,dy=\sqrt{2g}\,T \tag{5}$$

となる (右辺は β によらない定数)。この積分方程式 (5) から $G(y)$ を求められれば、そこから $p'(y)$ が、そして $p(y)$ が求まることになる。

4 等時降下曲線の解

式 (5) の被積分関数も、$y=\beta$ で分母が 0 になるので、(5) を単純に β で微分することはできないが、実は良く知られているように、(5) の左辺は $G(y)$ の 1/2 階積分 (の定数倍) の形なので、この式をもう 1/2 階積分すれば $G(y)$ については簡単な式になることが期待される。

すなわち、両辺を $1/\sqrt{t-\beta}$ 倍して、β に関して 0 から t まで積分する $(0<t<H)$。

$$\int_0^t \frac{d\beta}{\sqrt{t-\beta}}\int_0^\beta \frac{G(y)}{\sqrt{\beta-y}}\,dy=\int_0^t \frac{\sqrt{2g}\,T\,d\beta}{\sqrt{t-\beta}} \tag{6}$$

(6) の左辺の累次積分は、$G(y)>0$ より順序交換でき、

$$\begin{aligned}\text{(6) の左辺} &= \int_0^t G(y)dy\int_y^t \frac{d\beta}{\sqrt{t-\beta}\sqrt{\beta-y}} \quad (\beta=y+(t-y)s)\\ &= \int_0^t G(y)dy\int_0^1 \frac{(t-y)ds}{\sqrt{(t-y)^2(1-s)s}} = \int_0^t G(y)dyB\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで、$B(p,q)$ はベータ関数で、良く知られているように

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1)}=\pi$$

である。一方 (6) の右辺は、

$$\int_0^t \frac{\sqrt{2g}\,T\,d\beta}{\sqrt{t-\beta}}=\sqrt{2g}\,T\left[-2\sqrt{t-\beta}\right]_{\beta=0}^{\beta=t}=2\sqrt{2g}\,T\sqrt{t}$$

なので、結局

$$\int_0^t G(y)dy=\frac{2\sqrt{2g}\,T}{\pi}\sqrt{t} \tag{7}$$

が、$0 < t < H$ である任意の t に対して成り立つことになる。この式を t で微分すれば、p に対する方程式

$$G(t) = \sqrt{1 + (p'(t))^2} = \frac{c_0}{\sqrt{t}} \tag{8}$$

が得られる ($c_0 = T\sqrt{2g}/\pi$)。$p'(t) > 0$ より、(8) から

$$p'(t) = \sqrt{\frac{c_0^2}{t} - 1} = \sqrt{\frac{c_0^2 - t}{t}}$$

となるので、$p(0) = 0$ より結局

$$p(y) = \int_0^y \sqrt{\frac{c_0^2 - t}{t}}\,dt = c_0^2 \int_0^{y/c_0^2} \sqrt{\frac{1-s}{s}}\,ds \tag{9}$$

となる。あとはこの積分を求めればよい。積分

$$F(\xi) = \int_0^\xi \sqrt{\frac{1-s}{s}}\,ds \quad (0 < \xi < 1) \tag{10}$$

は、置換 $s = (1 - \cos\theta)/2$, $(0 < \theta < \pi)$ により、

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \int_0^{\theta_\xi} \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}\,\frac{1}{2}\sin\theta\,d\theta \;=\; \int_0^{\theta_\xi} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}\,\sin\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\theta_\xi} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)d\theta \;=\; \frac{1}{2}(\theta_\xi + \sin\theta_\xi), \\
\xi &= \frac{1}{2}(1 - \cos\theta_\xi)
\end{aligned}$$

となる。ここで、$\phi = \pi - \theta_\xi$ とすると、$0 < \phi < \pi$ で、

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} - F(\xi) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\pi - \phi + \sin(\pi - \phi)) \;=\; \frac{1}{2}(\phi - \sin\phi), \\
1 - \xi &= 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi - \phi)) \;=\; \frac{1}{2}(1 - \cos\phi)
\end{aligned}$$

となり、これは [1] で見たように、$\pi/2 - F(\xi)$ が x 軸、$1 - \xi$ が y 軸のサイクロイド (の 1/2 縮小版) の左半分を表すので、$F(\xi)$ は、それを $(\pi/4, 1/2)$ を中心に上下、左右に反転したもの ($F(\xi)$ が x 軸、ξ が y 軸)、すなわち「逆さサイクロイド」の右半分のグラフになり、原点がその最下点となる (図 2)。

$p(y) = c_0^2 F(y/c_0^2)$ なので、$x = p(y)$ はそれを x, y 方向に c_0^2 倍したものであり、やはり逆さサイクロイドが解となることがわかる。

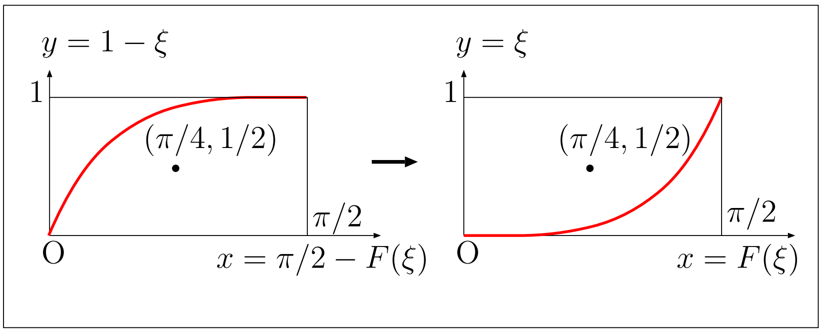

図 2: サイクロイドの反転

5 一意可解性

最後に、一意可解性について述べておく。

最速降下線問題の場合 ([1]) は、出発点は逆さサイクロイドの最高点 (傾きが無限大のところ) なので、L が大きい場合の x 軸の下にもぐりこむ解を含めて、すべての L, H ($L > 0$, $H > 0$) に対して一つの最適解が求まったが、この等時降下曲線の方は出発点 A は必ずしも逆さサイクロイドの最高点ではなく、むしろ終点 O が最下点 (傾きが 0 のところ) と固定されるので、解が求まらない場合もある。

より具体的には、境界条件は $p(0) = 0$, $p(H) = L$ であるから、$p(H) = c_0^2 F(H/c_0^2) = L$ とならなければいけないので、これを満たす c_0、すなわち、

$$L = \gamma(\theta + \sin\theta), \quad H = \gamma(1 - \cos\theta) \quad (0 < \theta \leq \pi) \tag{11}$$

となるような γ (> 0), θ が存在する必要がある ($\gamma = c_0^2/2$)。

単純に考えて、この逆さサイクロイド曲線の右半分では、$y/x \leq 2/\pi$ なので、$H/L \leq 2/\pi$ ならば解が求まるが $H/L > 2/\pi$ の場合は解がないだろうと予想される。

今、$H/L = (1 - \cos\theta)/(\theta + \sin\theta) = \tau(\theta)$ とすると、

$$\tau'(\theta) = \frac{\sin\theta(\theta + \sin\theta) - (1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(\theta + \sin\theta)^2} = \frac{\theta\sin\theta}{(\theta + \sin\theta)^2} > 0$$

となるので、$\tau(\theta)$ は $0 < \theta < \pi$ で増加関数で、$\theta = +0$ では $1 - \cos\theta = O(\theta^2)$, $\theta + \sin\theta = O(\theta)$ なので $\tau(+0) = 0$ であり、$\tau(\pi) = 2/\pi$ であるから、よって確かに $H/L \leq 2\pi$ ならば (11) を満たす θ が一意的に存在することが言える。そこから γ も求まる。

逆に、$H/L > 2/\pi$ の場合は (11) の解がないので、滑らなかな等時降下曲線 (サイクロイド) で O と A を結ぶことはできず、A から降ろした逆さサイクロイドは原点まで届かない。A を通り、y 軸上で最下点 (B とする)、すなわち傾きが 0 となるような逆さサイクロイドは一意には決まらないが、その B の y 座標は $H - 2L/\pi$ 以上となる。

しかしあえて言えば、この場合は B から原点 O まで落し穴を掘ってまっすぐ真下に落ちる道を作って、そのサイクロイドと落し穴道をつないだものが解らしきものになるといえなくもない (図 3)。AB の間は逆さサイクロイドなのでどこからスタートし

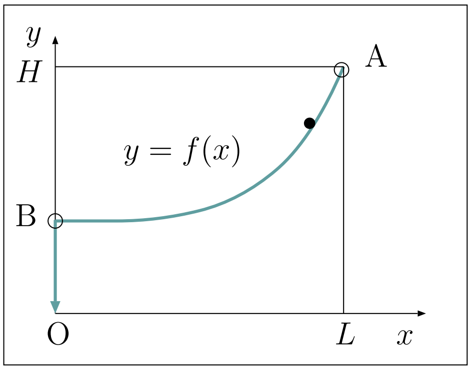

図 3: 落し穴つき解

ても同じ時間で B までくるし、落し穴 BO を落ちる時間を考えると、逆さサイクロイドの高いところからすべってきた場合は当然 B での速度は大きいのであるが、B では逆さサイクロイドは水平なので B での y 方向の速度成分は 0 だから、BO を落ちる時間はすべて同じになるはずだからである。

しかし、厳密に言えばこの曲線では AB 間をスタートした場合は等時降下性を満たすが、BO 間をスタートした場合は等時降下性を満たさないので、やはりこの落し穴つきの解は元の問題の解とは言えないだろう。

なお、A を通って y 軸で最下点になる逆さサイクロイドの中で y 軸に最も早く達するのは、A で傾きが無限大になるもので、しかもその場合 B の y 座標が最も小さくなる $(= H - 2L/\pi)$。これが BO の通過時間を合わせても一番早く落ちてくる。

6　アーベルの問題

(2017 年 3 月 22 日追加)

ここまで考察してきた「等時降下曲線」の問題を発展させた「アーベルの問題」というものがあることを知ったので ([2] 13.4 節)、それもついでに紹介する。これは、2 節の設定に対し、

> 「$0 < y < H$ で正の値を取る関数 $\xi(y)$ を与えたときに、OA の経路の中の、高さ y の地点から O までに滑り落ちる時間が $\xi(y)$ に等しくなるような曲線 $y = f(x)$ を求めよ」

という問題のことであるらしい。等時降下曲線は、$\xi(y) =$ 定数 の場合であるからアーベルの問題に含まれることになる。

この問題は、(4) より、

$$\xi(y)=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y\sqrt{\frac{1+(p'(z))^2}{y-z}}\,dz \tag{12}$$

となるような $x=p(y)$ ($y=f(x)$ の逆関数) を求めることになる。そして、(6) から (8) までと同等の計算により、

$$\int_0^t G(y)dy=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^t\frac{\xi(y)}{\sqrt{t-y}}\,dy$$

から、

$$G(y)=\sqrt{1+(p'(y))^2}=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\int_0^y\frac{\xi(h)}{\sqrt{y-h}}\,dh \tag{13}$$

となるので、この $G(y)$ が求まれば

$$p'(y)=\sqrt{G(y)^2-1}$$

より

$$p(y)=\int_0^y\sqrt{G(y)^2-1}\,dy \tag{14}$$

と $p(y)$ が求まることになる。なお、(13) より

$$G(y)\geq 1 \tag{15}$$

である必要があるので、$\xi(y)$ はなんでもよいわけではない。

いくつか具体例を紹介する。まず、等時の問題 $\xi(y)=c_1$ の場合には、

$$G(y)=\frac{\sqrt{2g}}{\pi}\left(\int_0^y\frac{c_1dh}{\sqrt{y-h}}\right)'=\frac{c_1\sqrt{2g}}{\pi}(2\sqrt{y})'=\frac{c_1\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{y}}$$

なので、

$$p(y)=\int_0^y\sqrt{\frac{2gc_1^2}{\pi^2y}-1}\,dy$$

となり、(9) と同じ形になって確かにサイクロイドになる。

また、$\xi(y)=c_1\sqrt{y}$ の場合は、

$$\begin{aligned} G(y) &= \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\left(\int_0^y \frac{c_1\sqrt{h}\,dh}{\sqrt{y-h}}\right)' = \frac{c_1\sqrt{2g}}{\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\,dt\,y\right)' \\ &= \frac{c_1\sqrt{2g}}{\pi}B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = c_1\sqrt{\frac{g}{2}} \end{aligned}$$

となるので、$c_1 \geq \sqrt{2/g}$ のときに $p(y)=(gc_1^2/2-1)y$ となる。$p(H)=L$ を課すことにすれば、$p(y)=Ly/H$ となり、c_1 も

$$c_1=\sqrt{\frac{2}{g}\left(1+\frac{L}{H}\right)}$$

のように H, L によって一意に決定する。すなわち $p(H)=L$ を課すと、$\xi(y)$ の定数 c_1 もそれによって決まってしまい、アーベルの問題が解けるための $\xi(y)$ の自由度は高くないことがわかる。

一方、$\xi(y)=c_1y$ の場合は、

$$\int_0^y \frac{h\,dh}{\sqrt{y-h}}=y^{3/2}\int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t}}=B\left(2,\frac{1}{2}\right)y^{3/2}=\frac{4}{3}y^{3/2}$$

より $Q(y)=2c_1\sqrt{y}$ となるので、$y=0$ の近くでは条件 (15) を満たすことができない。よって、この場合は $y=0$ の近くまで含めた解は存在しないことになる。

一般に $\xi(y)=c_1y^p$ $(p>0)$ の場合は、$p>1/2$ だと $y=0$ の近くでは条件 (15) を満たさず、$0\leq p\leq 1/2$ の場合に

$$Q(y)=c_2y^{p-1/2} \quad \left(c_2=c_1\left(p+\frac{1}{2}\right)B\left(p+1,\frac{1}{2}\right)\right)$$

となり、よって $c_2\geq H^{1/2-p}$ のときに

$$p(y)=\int_0^y \sqrt{c_2^2h^{2p-1}-1}\,dh$$

により $p(y)$ が求まることになる。$p(H)=L$ を課せば、c_2 はやはり H, L により一意に決まることになるだろう。

なお、$\xi(y)$ は必ずしも単調でなくてもよい。例えば、$\xi(y)=c_1\sqrt{y}(2H-y)$ とするとこれは単調ではなく $y=2H/3$ で極大を持つ関数で、そして、

$$\int_0^y \frac{\sqrt{h}(2H-h)dh}{\sqrt{y-h}}=\int_0^1 \frac{\sqrt{t}(2H-yt)ydt}{\sqrt{1-t}}=2HyB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)-y^2B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$$

となるが、

$$B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)}=\frac{\pi}{2},\quad B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)}=\frac{3\pi}{8}$$

なので、よって

$$Q(y)=c_1\sqrt{2g}\left(Hy-\frac{3}{8}y^2\right)'=c_1\sqrt{2g}\left(H-\frac{3y}{4}\right)$$

となる。$0<y<H$ では

$$Q(y)\geq Q(H)=\frac{c_1\sqrt{2g}}{4}H$$

なので、この場合条件 (15) は $c_1\geq 4/(\sqrt{2g}H)$ となり、この条件のもと

$$p(y)=\int_0^y\sqrt{2gc_1^2(H-3h/4)^2-1}\,dh$$

で求まることになる。この積分は、

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\log|x+\sqrt{x^2-1}|+C$$

を使えば計算できなくはないが、煩雑になるので省略する。

7 最後に

本稿で、等時降下曲線は、やはり最下点を終点とする逆さサイクロイドであり、それ以外にはないこと、それが $H\leq 2L/\pi$ の場合は A により一意に決まること、および $H>2L/\pi$ の場合には解がないことを確認できた。

初等的な計算しか用いていないので、もちろん既に知られている結果だと思うが、それが確認できたのは個人的には良かった。

なお、変分問題、すなわち汎関数を最小にする関数を求める問題には今回の $H>2L/\pi$ の場合のように解が求まらない (存在しない) 場合もあれば、[1] の最速降下線問題の下に潜る場合のように、オイラー方程式の解としては一意には決まらない場合もある。中には汎関数の値をいくらでも小さくする関数が存在し、しかしその極限は、不連続とか境界条件を満たさないなどの理由で解としては認められないものになってしまい、解がありそうでない、といった場合もよくある。

ちまたに流布する変分問題に対する記事では、オイラー方程式を導いて、単純にその微分方程式を解いて終わり、というものを良く見るが、本来はその解が元の問題に対して適切なのかどうかを正しく検証する必要があると思う。是非そのあたりも忘れないでもらいたいと思う。

参考文献

[1] 竹野茂治、「最速降下線について」、http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/misc.html#cycloid1 (2016)

[2] 寺沢寛一、「自然科学者のための数学概論 (増訂版)」(1983)、岩波書店 (2017 年 3 月 22 日追加)