2016 年 01 月 08 日

最速降下線について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

目 次

1 はじめに 1
2 設定 2
3 変分法 5
4 オイラー方程式の解 7
5 サイクロイド 8
6 落ちる時間 11
7 境界条件を満たす解とその一意性 16
8 非一意解の時間の比較 19
9 最速であることの証明 27
10 摩擦や空気抵抗がある場合 31
11 初速度が正の場合 34
12 ころがる場合 39
13 最後に 50

1 はじめに

最速降下線の問題の解が「サイクロイド」という曲線で与えられることは良く知られている。私もそれはぼんやりとは知っていて、以前実際に計算したこともあったように思う。

しかし、実際に境界値を与えたときに、どのようなサイクロイドがその最速降下解を与えるのか、そしてどのように落ちるのか、まではよく認識していなかった。

そして、テレビで「まっすぐな斜面」よりも「それよりもちょっと下がったサイクロイドと呼ばれる曲線」の方が速いですよ、などと紹介されるのを見るたびに、通常のサイクロイドとは違う気がして、あれはサイクロイドのどの部分なんだろうか、またはサイクロイドを回転しているのだろうか、などと疑問に感じていた。

今回、あらためて計算し、さらにいくつか疑問に思うことなども含めて計算してみたので、ここにまとめておく。

なお、この最速降下線の問題は、数学では「変分法」という分野に属するが、大学初年度で学ぶ微積分の本、あるいは工学部などで標準的に学ぶ応用数学の本などには書かれていないことが多い (実は数学科でも学ばなかった)。

そして逆にそのためか、Web 上には「最速降下線」の問題とその解を紹介する記事はかなりある (例えば [1], [2], [4] 等)。しかし、そのほとんどが私が疑問に思う箇所の手前、すなわち「解がサイクロイドになる」というところまでしか書いておらず、本稿ではその先の話も考える。

2 設定

まず「最速降下線」の問題の設定と定式化を行う。

「最速降下線の問題」とは、以下のような問題である。

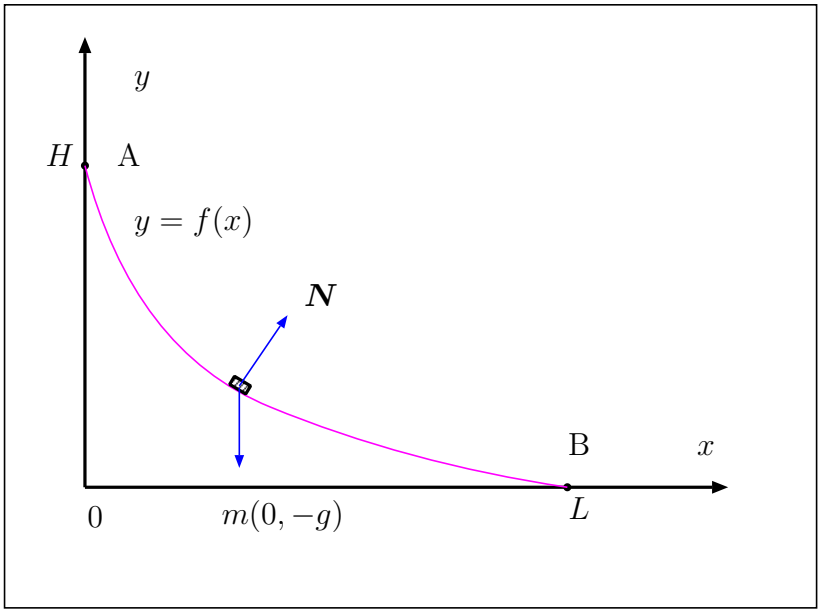

図 1: 設定

> 図 1 のように、点 $\mathrm{A}(0, H)$ から点 $\mathrm{B}(L, 0)$ $(H > 0,\ L > 0)$ への坂道の曲線路 $y = f(x)$ があり、ある物体がその道を A から B へ摩擦なくすべり落ちるとき、それにかかる時間 T が最も短くなるのは、$y = f(x)$ がどのような曲線のときか。

$f(x)$ は x の 1 価関数で、とりあえず $0 < x < L$ で C^2 級であるとするが、単調性は仮定しない。すべり落ちる物体は質量 m で、非常に小さく、空気抵抗もないとする。

なお、摩擦や空気抵抗がある場合、あるいはすべるのではなく、球などがころがり落ちる場合については後で別に考えることにする。A での初速度はとりあえずは 0 とするが、0 ではない場合については、後で別に考える。

初速 0 で自然に動き出すためには、もちろん $f'(+0) < 0$ が必要であるが、$f'(+0) = -\infty$ は排除しないこととする。

物体は小さいと見るので、その位置は $y = f(x)$ 上にあると考えてよい。その物体に働く力は、重力と曲線路からの垂直抗力 $\boldsymbol{N}$ なので、出発からの時間を t、物体の位置を $(x, y) = (x(t), y(t))$ とすると、その運動方程式、初期条件、境界条件等は以下のようになる。

$$m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = m(0, -g) + \boldsymbol{N} \tag{1}$$
$$y(t) = f(x(t)) \tag{2}$$
$$\boldsymbol{N} \perp (1, f'(x(t))) \tag{3}$$
$$(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0, 0) \tag{4}$$
$$(x(0), y(0)) = (0, H), \quad (x(T), y(T)) = (L, 0) \tag{5}$$

なお、$g > 0$ は重力加速度で、$\dot{} = d/dt$ を意味するものとする。また、物体が左方向に戻ることは考えず、よって $\dot{x}$ は正であるとしてよい。さらに、ある x $(0 < x < H)$ で $f(x) \geq H$ となることはないとしてよいだろう。もし、$f(x) > H$ となる x があれば、エネルギー保存則からして、当然そこには達しないし、$f(x) = H$ となる x が途中にあればそこでは速度が 0 になりその先には進まなくなるからである。

$$\dot{x}(t) > 0 \ \ (0 < t < T), \quad f(x) < H \ \ (0 < x < L) \tag{6}$$

今、$|\boldsymbol{N}| = N(t)$ とすると、(3) より $\boldsymbol{N}$ は、

$$\boldsymbol{N} = \frac{(-f'(x(t)), 1)}{\sqrt{1 + \{f'(x(t))\}^2}} N(t) \tag{7}$$

と表すことができるので、(1) より、

$$\ddot{x} = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f')^2}} \frac{N}{m}, \quad \ddot{y} + g = \frac{1}{\sqrt{1 + (f')^2}} \frac{N}{m}$$

となり、ここから N を消去すれば、

$$\ddot{x} + (\ddot{y} + g) f'(x) = 0 \tag{8}$$

が得られる。

(2) を t で微分すれば $\dot{y} = f'(x)\dot{x}$ となるので、(8) を $\dot{x}$ 倍すると

$$\dot{x}\ddot{x} + (\ddot{y} + g)\dot{y} = 0$$

となり、これは

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\} + gy\right) = 0$$

を意味し、よって

$$\frac{1}{2}\{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\} + gy = \text{定数} \tag{9}$$

が成り立つことになる。(9) を m 倍した式は、速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ により、

$$\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + mgy = \text{定数}$$

と書けるが、これは運動エネルギーと位置エネルギーの和が保存されることに対応する (物理学であれば、むしろこの式からスタートするだろう)。

初期条件 (4), (5) により (9) の右辺は

$$\frac{1}{2}\{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\} + gy = gH \tag{10}$$

となる。(2) と $\dot{y} = f'(x)\dot{x}$ と $\dot{x} \geq 0$ より、(10) から

$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2(1 + (f')^2) = g(H - f), \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2g(H-f)}{1 + (f')^2}}$$

が得られ、よって、

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{1 + (f')^2}{2g(H-f)}}$$

を 0 から L まで x で積分すれば、A から B まですべり落ちる時間 T を表す式

$$T = \int_0^L \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{2g(H - f(x))}}\, dx \tag{11}$$

が得られる。

この式 (11) の右辺は $x(t), y(t)$ によらず $f(x)$ の形のみで決まるので、よってこの (11) を最小にする $f(x)$ を見つければよいことになる。

なお、上の考察より、x_1 から x_2 $(0 \leq x_1 \leq x_2 \leq L)$ までの移動にかかる時間 t は、

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1+(f')^2}{2g(H-f)}}\, dx \tag{12}$$

で計算できることもわかる。

3 変分法

2 節で、通常の最速降下線の問題は、積分の式 (11) を最小にする f を求めればよいことがわかったが、本節ではそのような f を求めるための「変分法」について説明する。

一般に、関数 $f(x)$ から実数の値を定める規則を 汎関数 と呼ぶが、今 (11) の右辺の汎関数を $I(f)$ と書くことにする。

$$I(f) = \int_0^L F(f(x), f'(x))dx \tag{13}$$

なお一般には、F が陽に x に依存する場合もありうるが、ここでは (11) の右辺のように、F が x に陽には依存しない場合のみを考えることにする。

$f(x)$ は、境界条件 (5) により、$f(0) = H,\ f(L) = 0$ を満たす必要がある。

今、$\phi(x)$ を、$0 < x < L$ で十分滑らかで、$\phi(0) = \phi(L) = 0$ を満たす関数とすると、0 に近い実数 δ に対して $f(x) + \delta\phi(x)$ も f と同じ境界条件を満たしている。

もし、f が $I(f)$ を最小にする解だとすれば、$I(f + \delta\phi)$ は、δ を動かして考えると、$\delta = 0$ のときに最小 (極小) になるはずだから、

$$I_0 = \left.\frac{dI(f+\delta\phi)}{d\delta}\right|_{\delta=0} = 0 \tag{14}$$

となるはずである。この (14) を I の 変分 と呼ぶ。微分と積分の順序交換により、

$$\frac{dI(f+\delta\phi)}{d\delta} = \frac{d}{d\delta}\int_0^L F(f(x)+\delta\phi(x), f'(x)+\delta\phi'(x))dx = \int_0^L (F_f\phi + F_{f'}\phi')dx$$

となるから、$\delta = 0$ とすると

$$I_0 = \int_0^L \{F_f(f,f')\phi + F_{f'}(f,f')\phi'\}dx$$

となるが、部分積分を使うと、

$$I_0 = \int_0^L F_f\phi\, dx + [F_{f'}\phi]_0^L - \int_0^L \left(\frac{d}{dx}F_{f'}\right)\phi\, dx = \int_0^L \left(F_f - \frac{d}{dx}F_{f'}\right)\phi\, dx \tag{15}$$

となる。ここで、$\phi(0) = \phi(L) = 0$ を用いたが、実は最速降下線問題の場合、

$$F(f, f') = \sqrt{\frac{1 + (f')^2}{2g(H - f)}}$$

なので、

$$F_{f'} = \frac{f'}{\sqrt{1 + (f')^2}} \frac{1}{\sqrt{2g(H - f)}}$$

であり、これは $x = 0$ で特異性を持つ $((15)$ が広義積分になる$)$ ため、本来は部分積分の境界値

$$\lim_{x \to +0} \frac{\phi(x)}{\sqrt{2g(H - f(x))}} \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

は慎重に考えるべきだが、ϕ は $0 < x < L$ 内にサポートを持つ関数、すなわち $x = 0$ や $x = L$ の近くでは完全に 0 であるような関数を取ればいいので、その項はちゃんと 0 になると見てよい。

さて、$(14), (15)$ より、$x = 0$ や $x = L$ $($の近く$)$ で 0 となるような任意の ϕ に対して

$$\int_0^L \left(F_f - \frac{d}{dx} F_{f'} \right) \phi \, dx = 0$$

が成り立つことになるが、そこから、

$$F_f - \frac{d}{dx} F_{f'} = 0 \quad (0 < x < L) \tag{16}$$

が得られる。これを、汎関数 (13) の オイラー方程式 と呼ぶ。これは、一般に f に関して 2 階の微分方程式となるが、f が最速降下線の問題の解であれば、オイラー方程式を満たすはずである。

なお、オイラー方程式 (16) は最速解であるための必要条件であり、オイラー方程式を満たす関数が必ずしも最速解を与えるとは限らないことに注意する。1 変数関数の極値問題でも微分係数が 0 というだけでは、単なる極小であって最小ではないかもしれないし、極小ではなく極大かもしれないし、さらに極小でも極大でもない可能性もある。

しかし、汎関数の最小問題を、微分方程式 (16) に帰着し、具体的な関数を求めることを可能にする、という点で、この方法 $(=$ 変分法$)$ は非常に優れた方法である。

4 オイラー方程式の解

本節では、3 節で得られたオイラー方程式を満たす関数を求める。

F が陽に x に依存しない場合、オイラー方程式 (16) は容易に 1 回積分できることが知られている。まず、それを紹介する。

(16) は、

$$F_f - (F_{ff'}f' + F_{f'f'}f'') = 0 \tag{17}$$

という f の 2 階の微分方程式に変形できるが、

$$\begin{aligned}(F - f'F_{f'})' &= F_f f' + F_{f'}f'' - f''F_{f'} - f'(F_{ff'}f' + F_{f'f'}f'') \\ &= f'(F_f - F_{ff'}f' - F_{f'f'}f'')\end{aligned}$$

なので、(17) より $(F - f'F_{f'})' = 0$ となり、よって

$$F - f'F_{f'} = \text{定数} \tag{18}$$

となる。これは、f の 1 階の微分方程式となる。

さて、最速降下線の問題の場合、

$$F - f'F_{f'} = \sqrt{\frac{1+(f')^2}{2g(H-f)}} - \frac{(f')^2}{\sqrt{1+(f')^2}}\frac{1}{\sqrt{2g(H-f)}} = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}\sqrt{2g(H-f)}}$$

となるので、

$$(1+(f')^2)(H-f) = c_0 \quad (>0) \tag{19}$$

となり、$H - f(x) = h(x)$ とすると、$h(x) > 0$ $(0 < x < L)$, $h(0) = 0$, $h(L) = H$ で、$f' = -h'$ より、

$$(1+(h')^2)h = c_0 \tag{20}$$

となる。これは、変数分離形の微分方程式であり、

$$(h')^2 = \frac{c_0}{h} - 1 = \frac{c_0 - h}{h}$$

より、

$$\sqrt{\frac{h}{c_0 - h}}\,h' = \pm 1 \tag{21}$$

となり、$f'(+0) < 0$ より $h'(+0) > 0$ であるから、少なくとも $x = 0$ の付近では、符号は正で、これを $x = 0$ から x まで積分すれば、

$$\int_0^h \sqrt{\frac{h}{c_0 - h}}\, dh = x \tag{22}$$

が得られる。

(20) より、$0 \le h \le c_0$ でなければいけないことになるが、(22) で $h = c_0 s$ とすると、$0 \le s \le 1$ で、

$$\begin{aligned} x &= \int_0^h \sqrt{\frac{h}{c_0 - h}}\, dh = c_0 \int_0^{h/c_0} \sqrt{\frac{s}{1-s}}\, ds = c_0 \int_0^{h/c_0} \frac{s}{\sqrt{s(1-s)}}\, ds \\ &= c_0 \int_0^{h/c_0} \frac{s}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2}}\, ds \end{aligned}$$

となる。よって、$s = (1 - \cos\theta)/2$ $(0 \le \theta \le \pi)$ と置換すると、

$$x = c_0 \int_0^\theta \frac{1}{2} \frac{(1 - \cos\theta)\sin\theta}{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}\, d\theta = \frac{c_0}{2} \int_0^\theta (1 - \cos\theta)\, d\theta = \frac{c_0}{2}(\theta - \sin\theta)$$

となる。ここで、この θ は $h/c_0 = (1 - \cos\theta)/2$ を満たすものなので、結局 h と x は、

$$h = \frac{c_0}{2}(1 - \cos\theta), \quad x = \frac{c_0}{2}(\theta - \sin\theta) \quad (0 \le \theta \le \pi) \tag{23}$$

によって結びつくことになる。これは、良く知られているように「サイクロイド曲線」を全体的に拡大 (または縮小) したグラフのパラメータ表示になっていて、直径 c_0 の車輪で作られるサイクロイドになる。

よって、$f(x)$ は、これを上下逆にした「逆さサイクロイド」として $f(x) = H - h(x)$ によって作られることになる。次節で、この「サイクロイド曲線」について詳しく見ることにする。

5 サイクロイド

通常サイクロイド曲線は、半径 1 の車輪で作られるものをさす。半径 1 の車輪を、x 軸の上を右に転がしていくとき、その車輪上の点の移動する軌跡がサイクロイドである (図 2)。回転角を θ とすると、OQ は弧 PQ の長さに等しいので、$\mathrm{Q}(\theta, 0)$ で、よって $\mathrm{P}(x,y)$ の座標は、θ を用いて、

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi) \tag{24}$$

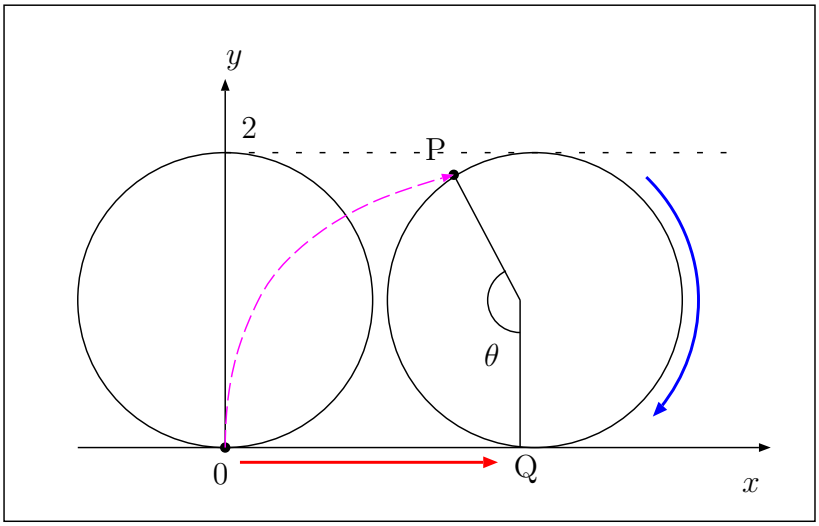

図 2: サイクロイドの定義 (概念図)

と表される。

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta \geq 0$$

からもわかるが、x は θ に関して $0 \leq \theta \leq 2\pi$ で単調で、θ と x は 1 対 1 に対応する。そして $\theta = 0, \pi, 2\pi$ はそれぞれ $x = 0, \pi, 2\pi$ に対応する。x と y の対応は、$0 \leq x \leq \pi$ では y は 0 から 2 まで単調に増加し、そこから対称に $\pi \leq x \leq 2\pi$ では y は単調に減少して 0 になる (図 3)。 なお、このグラフは一見楕円に似ているが、図 3 に見られるように楕円とは多少ずれがある[1]。

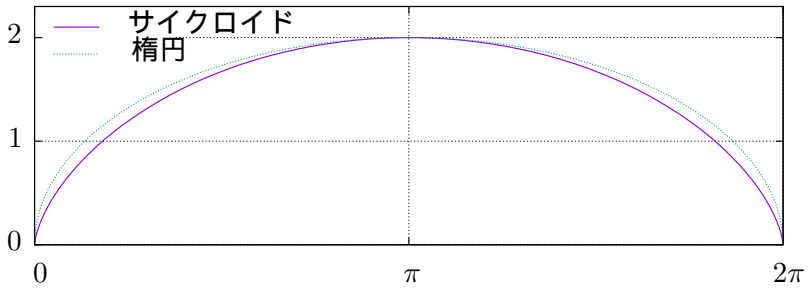

図 3: サイクロイドと楕円

[1] しかし、以下のサイクロイドの概念図では、書くのが容易な楕円で代用していることも多い。

この $0 \le x \le 2\pi$ 上で (24) により定義されるサイクロイド関数を、今後 $y = \mathrm{cyc}(x)$ と書くことにする。この関数の導関数は、

$$\mathrm{cyc}'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2} \tag{25}$$

となるので、$x = 0, 2\pi$ $(\theta = 0, 2\pi)$ に特異性を持ち、$\mathrm{cyc}'(+0) = \infty$, $\mathrm{cyc}'(2\pi - 0) = -\infty$ であることに注意する。

さて、4 節で (22) の積分により、サイクロイド関数 $\mathrm{cyc}(x)$ を x, y 両方向に等倍に拡大 (縮小) した関数を上下逆さにしたもの

$$f(x) = H - h(x) = H - \alpha\mathrm{cyc}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \quad \left(\alpha = \frac{c_0}{2} > 0,\ \ 0 \le x \le \alpha\pi\right) \tag{26}$$

が、(19) を満たす関数であることを見たが、$\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ 自身は $0 < x < 2\alpha\pi$ で滑らかな関数になっている。まず、(26) がそこまで含めて方程式 (20) を満たすか調べてみる。

$h = \alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ は

$$h = \alpha(1-\cos\theta), \quad x = \alpha(\theta - \sin\theta) \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

で表され、よって (25) より

$$h'(x) = \{\alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)\}' = \mathrm{cyc}'(x/\alpha) = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

となるので、(20) の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned}(1 + (h')^2)h &= \left\{1 + \left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)^2\right\}\alpha(1-\cos\theta) \\ &= \frac{\alpha}{1-\cos\theta}\{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\} = \frac{\alpha}{1-\cos\theta}(2 - 2\cos\theta) \\ &= 2\alpha = c_0\end{aligned}$$

となり、$0 < x < 2\alpha\pi$ で (20) を満たすことがわかる。

しかし、$\alpha\pi < x < 2\alpha\pi$ では $h'(x) < 0$ なので、この $\alpha\pi < x < 2\alpha\pi$ の部分は (21) のマイナス符号の式に対応する。すなわち (21) から (22) を導くところでは、$x = 0$ の近くでは $h' > 0$ だからプラス符号の式を積分するが、あるところで $h' = 0$ となり、そこから先はマイナス符号の式を積分することで、左右対称な形で $h' < 0$ でつながるということになる。

このように $h' = 0$ のところで抜けおちる (20) の解は他にもあり、(20) は $h(x) = c_0$ $(= 2\alpha)$ という特異解を持つ。よって、$h(0) = 0$ となる解としては、上に見た $h =$

$\alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ 以外に、それを $x=\alpha\pi$ のところで切り離し、定数 2α でそれらをつないだもの (図 4)

$$h(x)=\begin{cases}\alpha\mathrm{cyc}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) & (0\le x\le\alpha\pi)\\ 2\alpha & (\alpha\pi<x\le\alpha\pi+c_1)\\ \alpha\mathrm{cyc}\left(\dfrac{x-c_1}{\alpha}\right) & (\alpha\pi+c_1<x\le 2\alpha\pi+c_1)\end{cases}\tag{27}$$

なども解になっていて、よって微分方程式 (20) の $h(0)=0$ の初期値問題の解の一意性は成り立たない。

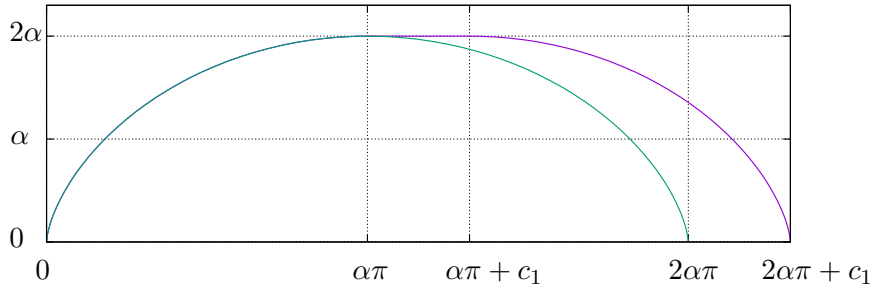

図 4: 定数を入れたサイクロイド解

なお、サイクロイド関数の 2 階微分は、

$$\begin{aligned}\mathrm{cyc}''(x) &= \frac{d}{dx}h'(x)=\frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)}{\dfrac{dx}{d\theta}}=\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)-\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^3}\\ &= \frac{\cos\theta-1}{(1-\cos\theta)^3}=-\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}\end{aligned}$$

なので $\mathrm{cyc}''(\pi)=-1/4$ となり、定数をサイクロイドの間に入れた (27) の形の解は、C^1 級だが C^2 級ではないことがわかる。ただし、方程式 (20) 自体は 1 階の方程式だから、(27) は C^2 級でなくても一応正しく (20) を満たしてはいる。

6 落ちる時間

次に、逆さサイクロイド解のどの部分が最速降下解になっているのかを考えるために、逆さサイクロイド解 $f(x)=H-\alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ $(\alpha>0)$ で物体をすべり落とした場合にかかる時間をいくつか計算してみることにする。

なお、サイクロイドについては、振り子同様の等時性があること、すなわち、

「逆さサイクロイドのどの高さから出発しても、最下点に達するまでの時間は一定」

であることが知られている ([1], [5]) が、ついでにそれも調べてみる。

まず、逆さサイクロイド $f(x) = H - \alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ の $\mathrm{A}(0, H)$ を初速度 0 で出発した物体が、$x = x_0$ $(< 2\alpha\pi)$ まで到達するのにかかる時間

$$T_0 = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + (f')^2}{2g(H - f)}}\, dx \tag{28}$$

を計算する。

(28) の積分を、サイクロイドのパラーメータでの積分に置換する。

$$f = H - \alpha(1 - \cos\theta), \quad x = \alpha(\theta - \sin\theta), \ \ (0 \le \theta \le \theta_0)$$

ここで、θ_0 は x_0 に対応するパラメータとする $(x_0 = \alpha(\theta_0 - \sin\theta_0),\ 0 \le \theta_0 \le 2\pi)$。このとき、

$$1 + (f')^2 = 1 + \left(\frac{-\alpha\sin\theta}{\alpha(1 - \cos\theta)}\right)^2 = \frac{2}{1 - \cos\theta}, \quad dx = \alpha(1 - \cos\theta)\, d\theta$$

より、

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{2}{\alpha(1 - \cos\theta)^2}}\, \alpha(1 - \cos\theta)\, d\theta = \sqrt{\frac{\alpha}{g}} \int_0^{\theta_0} d\theta = \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\, \theta_0 \tag{29}$$

となる。この (29) は、初速 0 で逆さサイクロイドの端から物体をすべらせたときの時間 t が、サイクロイドのパラメータ θ に比例することを意味する。この逆さサイクロイドを書く車輪の半径は α、中心の座標は $(\alpha\theta, \alpha)$ なので、その車輪を速度

$$v_\alpha = \sqrt{\alpha g} \tag{30}$$

で転がすと、時刻 T_0 までに回転する角 θ は、(29) より

$$\theta = \frac{v_\alpha T_0}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha g}\sqrt{\frac{\alpha}{g}}\, \theta_0 = \theta_0$$

となって、両者のパラメータが一致し、サイクロイド上の点の x 座標と物体の移動の x 座標が完全に一致することになる。すなわち、逆さサイクロイドの物体の滑り落ちる様子は、半径 α の車輪を等速 (速さ $\sqrt{\alpha g}$) で転がした場合に描かれるサイクロイドと全く同じ動きを上下逆にすることがわかる。

逆さサイクロイドの最下点までの時間は、(29) より

$$T_1 = \pi\sqrt{\frac{\alpha}{g}} \tag{31}$$

となるが、これは車輪の半径 α の平方根に比例する。よって、全体のスケールを 2 倍にすると、落ちるのにかかる時間は $\sqrt{2}$ 倍になることがわかる。

さらに、この (31) は、いわゆる普通の振り子の周期の式に似ている。長さ ℓ の振り子の運動は、振幅が小さい場合は単振動で近似できて、その周期 T_s は、

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

となる。よって、$\ell = 4\alpha$ のときに、振り子の最高点から最下点までの時間 $(= T_s/4)$ が丁度 T_1 になり、$\ell = 4\alpha$ の振り子の運動と似たような速さの運動をすることがわかる。

なお、この振り子との対応は「サイクロイド振り子」と呼ばれる話と関係する (例えば [4], [1], [5] 参照)。

次は、逆さサイクロイドの途中からすべらせた場合の時間を計算する。

上と同じ $f(x) = H - \alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ の $x = x_1$ $(0 < x_1 < \alpha\pi)$ から初速 0 ですべらせて、最下点 $x = \alpha\pi$ までにかかる時間 T_2 を計算する。

その時間 T_2 は、2 節の議論を繰り返せば、H を $f(x_1)$ に置きかえた

$$T_2 = \int_{x_1}^{\alpha\pi} \sqrt{\frac{1 + (f')^2}{2g(f(x_1) - f)}}\, dx \tag{32}$$

で求まることが容易にわかる。今、$x_1 = \alpha(\theta_1 - \sin\theta_1)$ $(0 < \theta_1 < \pi)$ とし、(32) をパラメータ θ での積分に置換すると、

$$\begin{aligned} 1 + (f')^2 &= \frac{2}{1 - \cos\theta}, \\ f(x_1) - f(x) &= H - \alpha(1 - \cos\theta_1) - H + \alpha(1 - \cos\theta) = \alpha(\cos\theta_1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

より

$$T_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{g}} \int_{\theta_1}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta}}\, d\theta$$

となる。ここで、$\cos(\theta/2) = s$ とすると、

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta = \sqrt{2}\, \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = -2\sqrt{2}\, ds, \\ &\cos\theta_1 - \cos\theta = 2(s_1^2 - s^2) \quad \left(s_1 = \cos\frac{\theta_1}{2}\right) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} T_2 &= \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\int_0^{s_1}\frac{2\sqrt{2}\,ds}{\sqrt{2(s_1^2-s^2)}} = \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\int_0^1\frac{2\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \quad (s=s_1\tau) \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\,[2\arcsin\tau]_0^1 = \pi\sqrt{\frac{\alpha}{g}} = T_1 \end{aligned}$$

となり、本節の最初に書いたように、逆さサイクロイドのどこから初速 0 ですべらせ始めても、最下点に達するまでの時間は一定 $(=T_1)$ であることがわかる。

なお、$x=x_1$ から速度 0 ですべらせて、$x=x_2$ へ達する時間 T_3 は、今と同様の置換により、

$$\begin{aligned} T_3 &= \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+(f')^2}{2g(f(x_1)-f)}}\,dx = \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_1-\cos\theta}}\,d\theta \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\int_{s_2}^{s_1}\frac{2\,ds}{\sqrt{s_1^2-s^2}} = \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\int_{s_2/s_1}^1\frac{2\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\,[2\arcsin\tau]_{s_2/s_1}^1 \\ &\quad \left(x_2=\alpha(\theta_2-\sin\theta_2),\ \ s_2=\cos\frac{\theta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

となるが、

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{\cos(\theta_2/2)}{\cos(\theta_1/2)} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta_2}{1+\cos\theta_1}}$$

であり、$h_1,\ h_2$ を、サイクロイド $y=\alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ 上で $x_1,\ x_2$ に対応する高さとすると、$h_1<h_2$ で、

$$h_j = \alpha\mathrm{cyc}\left(\frac{x_j}{\alpha}\right) = \alpha(1-\cos\theta_j)$$

であるから、$\cos\theta_j = 1-h_j/\alpha$ より、

$$\frac{s_2}{s_1} = \sqrt{\frac{2-h_2/\alpha}{2-h_1/\alpha}} = \sqrt{\frac{2\alpha-h_2}{2\alpha-h_1}}$$

となる。よって結局

$$T_3 = \sqrt{\frac{\alpha}{g}}\left(\pi - 2\arcsin\sqrt{\frac{2\alpha-h_2}{2\alpha-h_1}}\right) \tag{33}$$

となることがわかる。

$x_2 = \alpha\pi$ の場合は、$h_2 = 2\alpha$ なので、(33) は $T_3 = \pi\sqrt{\alpha/g} = T_1$ となり、T_2 の計算に対応する。

さて、逆さサイクロイドの $x = 0$ から初速 0 ですべらせた場合も、$x_1\ (> 0)$ から初速 0 すべらせた場合も、同じ時間 (T_1) で最下点に達することを見たが、その両者を同じ時刻にスタートさせた場合、それらがどのような動きをするのかを見てみよう。

わかりやすいように、$H = 2\alpha$ とし、最下点が $(\alpha\pi, 0)$ となるようにする。(33) で、$0 < x_1 < x_2 < \alpha\pi$ と考えると、$(x_1, f(x_1)) = (x_1, 2\alpha - h_1)$ を初速 0 でスタートした方 (動点 P とする) は、$t = T_3$ のときには $(x_2, f(x_2)) = (x_2, 2\alpha - h_2)$ にいることになる。

同じ時刻に初速 0 で $(0, 2\alpha)$ をスタートした方 (動点 Q とする) は、(29) より、$t = T_3$ のときには

$$\theta_3 = \sqrt{\frac{g}{\alpha}}\, T_3$$

のパラメータで表される位置にいる。そのサイクロイド上の位置 $h_3 = \alpha\mathrm{cyc}(x_3/\alpha)$ は、

$$h_3 = \alpha(1 - \cos\theta_3) = \alpha\left\{1 - \cos\left(T_3\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\right)\right\} \tag{34}$$

となるが、(33) より、

$$\frac{\theta_3}{2} = \frac{T_3}{2}\sqrt{\frac{g}{\alpha}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{2\alpha - h_2}{2\alpha - h_1}}, \quad \sqrt{\frac{2\alpha - h_2}{2\alpha - h_1}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_3}{2}\right) = \cos\frac{\theta_3}{2},$$
$$1 + \cos\theta_3 = 2\cos^2\frac{\theta_3}{2} = 2\left(\frac{2\alpha - h_2}{2\alpha - h_1}\right)$$

となり、よって (34) より

$$2\alpha - h_3 = \alpha(1 + \cos\theta_3) = 2\alpha \cdot \frac{2\alpha - h_2}{2\alpha - h_1}$$

となるので、結局

$$\frac{2\alpha - h_3}{2\alpha} = \frac{2\alpha - h_2}{2\alpha - h_1} \quad \left(\frac{f(x_3)}{f(0)} = \frac{f(x_2)}{f(x_1)}\right) \tag{35}$$

が成り立つ。この (35) より、P と Q の y 座標 $f(x_2),\ f(x_3)$ には常に比例関係があり、その高さの比は $t = 0$ での高さ $f(x_1),\ f(0)$ の比に常に一致することがわかる。すなわち、横から見れば (y 座標だけを見れば)、P と Q の運動は、スケールを変えただけの動きに見えることになる。

なお、この P の運動の方は、「最速降下」の解ではないことに注意する。最速降下の解は、あくまで逆さサイクロイドの $x = 0$ から落ちる解 (Q の方) であり、出発点の傾きが $f'(+0) = -\infty$ となっているものである。

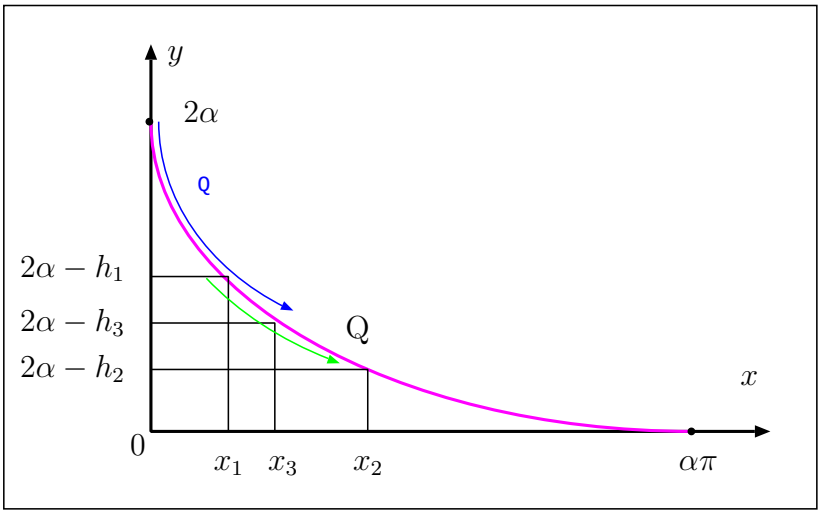

図 5: $(x_j, 2\alpha - h_j)$

7 境界条件を満たす解とその一意性

本節では、いよいよ元の問題の境界条件 (5) を満たす解を考えることにする。

$$L = \pi\frac{H}{2} \tag{36}$$

の場合は、これまでの考察から、

$$f(x) = H - \frac{H}{2}\,\mathrm{cyc}\left(\frac{2}{H}\,x\right) \tag{37}$$

が丁度境界条件 (5) を満たす解 (のひとつ) となる。

では、(36) ではない場合はどうだろうか。$f(x) = H - \alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ が B を通る条件は、$H - \alpha\mathrm{cyc}(L/\alpha) = 0$, すなわち $y = \alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ が点 (L, H) を通ることと同じであるが、もし、$y = \alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ の曲線が、複数の α に対して交差することがあれば、A, B を通る逆さサイクロイドが 2 つ存在してしまう可能性があるが、$y = \alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ $(0 < x < 2\alpha\pi)$ のグラフを複数の α について書いてみると図 6 のようになり、交差がないだろうことが予想できる。

これらの関数のグラフに交差がなく、第 1 象限を埋めつくしていることを以下でちゃんと示してみる。すなわち、任意の $x_0 > 0, h_0 > 0$ に対して、

$$h_0 = \alpha_0\mathrm{cyc}\left(\frac{x_0}{\alpha_0}\right) \tag{38}$$

となる $\alpha_0 > 0$ が常に存在し、かつそのような α_0 はただ一つしかないことを示す。

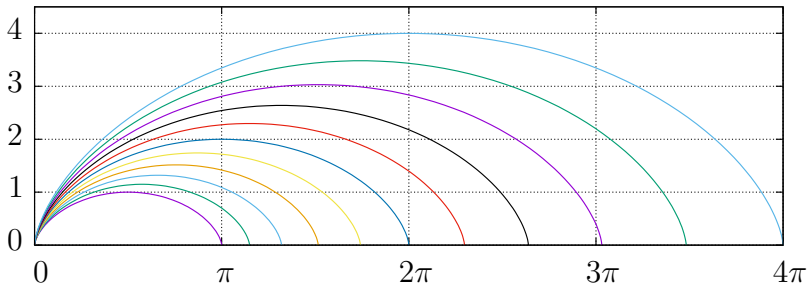

図 6: 複数の α に対するサイクロイド関数のグラフ

(38) をパラメータで表せば、

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_0(\theta_0 - \sin\theta_0) \\ h_0 = \alpha_0(1 - \cos\theta_0) \end{cases} \qquad (\alpha_0 > 0,\ \ 0 < \theta_0 < 2\pi) \tag{39}$$

となるので、x_0, h_0 に対し、このような α_0, θ_0 がただ一組存在することを示せばよい。(39) より、

$$\frac{x_0}{h_0} = \frac{\theta_0 - \sin\theta_0}{1 - \cos\theta_0} \tag{40}$$

となるが、まずこれを満たす θ_0 が一意に存在することを示す。そのために、今

$$p_1(\theta) = \frac{\theta - \sin\theta}{1 - \cos\theta} \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

という関数を考える。$\theta \to +0$ では、

$$p_1(\theta) = \frac{\theta^3/6 + O(\theta^5)}{\theta^2/2 + O(\theta^4)} = \frac{\theta/3 + O(\theta^3)}{1 + O(\theta^2)} = \left(\frac{\theta}{3} + O(\theta^3)\right)\{1 + O(\theta^2)\} = \frac{\theta}{3} + O(\theta^3)$$

なので $p_1(+0) = 0$ で、また $p_1(2\pi - 0) = +\infty$ も容易にわかるので、あとは $p_1'(\theta) > 0$ $(0 < \theta < 2\pi)$ を示せば、p_1 が $(0, 2\pi)$ から $(0, \infty)$ の 1 対 1 の関数であることになり、よって (40) を満たす θ_0 がただ一つ、常に存在することがわかる。

$$p_1' = \frac{(1 - \cos\theta)^2 - (\theta - \sin\theta)\sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{2 - 2\cos\theta - \theta\sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2}$$

となるが、この分子を $p_2(\theta) = 2 - 2\cos\theta - \theta\sin\theta$ とすると、

$$\begin{aligned} p_2' &= 2\sin\theta - \sin\theta - \theta\cos\theta = \sin\theta - \theta\cos\theta, \\ p_2'' &= \cos\theta - \cos\theta + \theta\sin\theta = \theta\sin\theta \end{aligned}$$

より、p_2' の増減表は以下のようになる。

θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
p_2''	0	$+$	0	$-$	0
p_2'	0	$\nearrow$	π	$\searrow$	-2π

よって、$p_2'(\beta) = 0, \pi < \beta < 2\pi$ となる β があり、それを境に p_2' の符号が変わるので、p_2 の増減表は以下のようになる。

θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
p_2'	0	$+$	0	$-$	
p_2	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって $p_2(\theta) > 0$ $(0 < \theta < 2\pi)$ となることがわかり、$p_1' > 0$、すなわち p_1 が $0 < \theta < 2\pi$ で単調なことが示され、(40) となる θ_0 の一意存在が示された。

α_0 の方は、(39) により

$$\alpha_0 = \frac{h_0}{1 - \cos\theta_0}$$

と一意に決定する。よって、これにより (39) を満たす α_0, θ_0 が、ただ一組、そして常に存在することが示された。

結局、$L > 0, H > 0$ の場合、すべての A, B に対して、それを通る逆さサイクロイド (x, y 方向に同じ比率で拡大したもの) が、ただ一つ存在することになる。

なお、与えられた H, L からそのようなサイクロイドを書くための車輪の半径 α_0 を知ることは、あまり容易ではなく、

$$p_1(\theta_0) = \frac{\theta_0 - \sin\theta_0}{1 - \cos\theta_0} = \frac{L}{H}$$

となる θ_0 をまず取らなければいけないが、これは超越方程式であり、コンピュータによる数値計算は可能だろうが、式の上で値を求めるのは容易ではない。しかし、図の上でそれを行うには、例えば次のようにすればよい。

1. 高さ H, 横 L の長方形 ACBD の左下 C から右上 D への対角線を引く。
2. 左下角から適当に小さい半径 (r) の輪を使ってサイクロイドを書き、そのサイクロイドと対角線との交点 P を取る。輪の 1 点に目印をつけておいて、長方形の底辺に沿って輪をすべらないようにころがせば、実際にはサイクロイドの線を書かなくても P を見つけることは可能だと思われる。
3. P の真下の高さ r の点 Q を取り、CQ を延長して長方形の右の辺との交点 R を取れば、その R の高さが求める α_0 となる (図 7)。

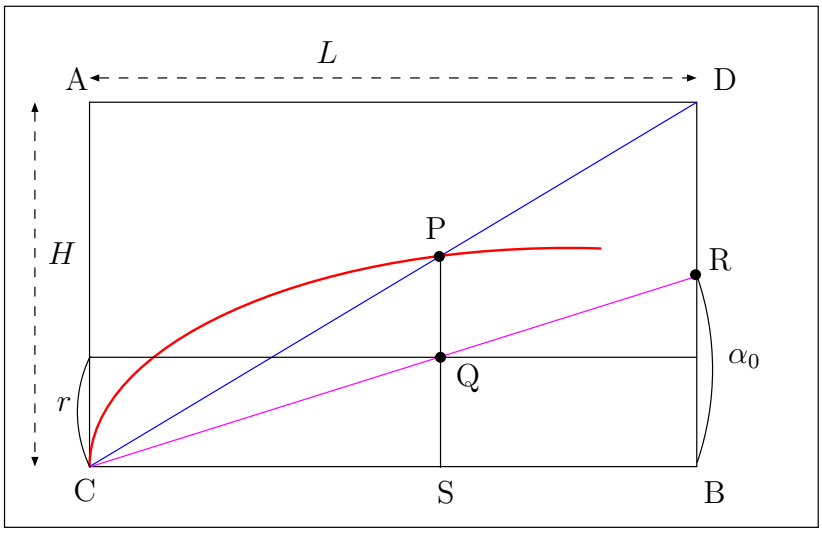

図 7: サイクロイドの半径 α_0 の作図

これで α_0 が求まることは、以下のようにしてわかる。まず、$\mathrm{P}(p,q)$ とすると、

$$p = r(\bar{\theta} - \sin\bar{\theta}), \quad q = r(1 - \cos\bar{\theta})$$

となる $\bar{\theta}$ が存在するが、$p : q = \mathrm{CS} : \mathrm{SP} = \mathrm{CB} : \mathrm{BD} = L : H$ なので、

$$\frac{p}{q} = \frac{L}{H} = p_1(\bar{\theta})$$

となり、よって $\bar{\theta} = \theta_0$ となることがわかる。

また、

$$\mathrm{QS} : \mathrm{RB} = \mathrm{CS} : \mathrm{CB} = p : L = r(\theta_0 - \sin\theta_0) : \alpha_0(\theta_0 - \sin\theta_0) = r : \alpha_0$$

なので、$\mathrm{QS} = r$ より $\mathrm{RB} = \alpha_0$ となることがわかる。

サイクロイドを書く手順がやや面倒だろうが、このようにして半径 α_0 がある程度作図できれば、逆さサイクロイドもある程度手動で作図できるかもしれない。

8 非一意解の時間の比較

7 節の議論により、A, B を通る「逆さサイクロイド」は一意的に決まることがわかったが、$L > \pi H/2$ の場合は $\theta_0 > \pi$ となるので、そのような逆さサイクロイドは一旦 x 軸よりも下を通り、そこから上がってくることになる。

その場合は、5 節の (27) で見たように、A, B を通る微分方程式 (20) の「別な解」が存在する。すなわち、$0 < x < \pi H/2$ では逆さサイクロイドで $x = \pi H/2$ で x 軸に接し、そしてそこから x 軸自体を経路とする解である (図 8)。 なお、7 節の「一意存在」は、あくまで「直線部分のない通常の逆さサイクロイド」としての一意存在であり、「A, B を通る微分方程式 (20) の解」という意味では一意的ではない。

この両者のどちらが速いのか、実際にかかる時間を比較してみることにする。

なお、$L < \pi H/2$ の場合は、7 節の逆さサイクロイドでも B では最下点に達せず、これ以外の解は見当たらない。

前者の逆さサイクロイドを $f_1(x) = H - \alpha_0 \mathrm{cyc}(x/\alpha_0)$ とし、後者を $f_2(x)$ とする $(\alpha_0 > H/2)$:

$$f_2(x) = \begin{cases} H - \dfrac{H}{2}\,\mathrm{cyc}\left(\dfrac{2}{H}\,x\right) & \left(0 \le x \le \dfrac{\pi H}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{\pi H}{2} < x \le L\right) \end{cases}$$

実はこの場合、A, B を通る (20) の解は、この f_1, f_2 以外にもある。それは、$H/2$ と α_0 の間の α に対するもので、f_2 のように逆さサイクロイドの最下点 (x 軸の下) まで進み、そこから一旦水平に進み、最後 B の手前で同じ逆さサイクロイドに戻って少し上がるものである。

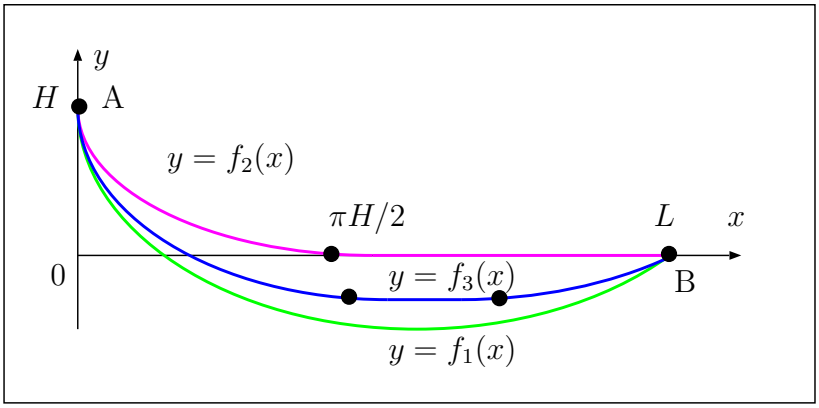

図 8: $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

これを $f_3(x)$ として、これにかかる時間もついでに比較することにする。$f_3(x)$ は、$H/2 < \alpha_3 < \alpha_0$ なる α_3 に対して、

$$f_3(x) = \begin{cases} H - \alpha_3 \mathrm{cyc}\left(\dfrac{x}{\alpha_3}\right) & (0 \le x < \alpha_3 \pi) \\ H - 2\alpha_3 & (\alpha_3 \pi \le x < \alpha_3 \pi + c_1) \\ H - \alpha_3 \mathrm{cyc}\left(\dfrac{x - c_1}{\alpha_3}\right) & (\alpha_3 \pi + c_1 \le x \le L) \end{cases} \tag{41}$$

としたものである。ここで、c_1 は以下のようにして $f_3(L)=0$ となるように取る。すなわち、θ_3 を

$$H=\alpha_3(1-\cos\theta_3),\quad \pi<\theta_3<2\pi \tag{42}$$

となるものとして取り、x_3 を

$$x_3=\alpha_3(\theta_3-\sin\theta_3) \tag{43}$$

とする。この θ_3 は、直線部分を持たない逆さサイクロイド $y=H-\alpha_3\mathrm{cyc}(x/\alpha_3)$ が、一旦 $y<0$ となった後で再び $y=0$ となるパラメータ値 $(>\pi)$ であり、x_3 はそのときの x 座標である。これに対し (41) の c_1 は、$c_1=L-x_3$ とすればよい。

まず、$f_1(x)$ に対してかかる時間 T_{f_1} は、(29) より、

$$T_{f_1}=\sqrt{\frac{\alpha_0}{g}}\,\theta_0 \tag{44}$$

であることがわかる。ここで、$\theta_0,\,\alpha_0$ は、

$$L=\alpha_0(\theta_0-\sin\theta_0),\quad H=\alpha_0(1-\cos\theta_0),\quad \pi<\theta_0<2\pi,\ \ \alpha_0>\frac{H}{2}$$

を満たす、一意に決まる値である。

また、$f_2(x)$ に対してかかる時間 T_{f_2} は、$(x,y)=(\pi H/2,0)$ までにかかる時間は (31) より $\pi\sqrt{H/(2g)}$ で、その点での物体の速さ v は (10) より $v=\sqrt{2gH}$ で、あとはその速さで等速に $L-\pi H/2$ の距離だけ進むから、

$$T_{f_2}=\pi\sqrt{\frac{H}{2g}}+\frac{L-\dfrac{\pi H}{2}}{\sqrt{2gH}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{H}{2g}}+\frac{L}{\sqrt{2gH}} \tag{45}$$

となる。

$f_3(x)$ に対してかかる時間 T_{f_3} は、直線部分では f_2 同様等速に進むので、その直線部分を取り除いて連結した逆さサイクロイドに対してかかる時間 $\sqrt{\alpha_3/g}\,\theta_3$ と、その直線部分を進む時間の和になることがわかる。最下点までの落下高さは $2\alpha_3$ なので、最下点での速さ v は $v=\sqrt{4g\alpha_3}$ となり、よって、

$$T_{f_3}=\sqrt{\frac{\alpha_3}{g}}\,\theta_3+\frac{c_1}{\sqrt{4g\alpha_3}}=\sqrt{\frac{\alpha_3}{g}}\,\theta_3+\frac{L-x_3}{2\sqrt{g\alpha_3}} \tag{46}$$

となる。

まず、細かい関係を一応確認しておく。まず、$\pi < \theta_0 < 2\pi$, $\alpha_0 > H/2$ は、図からは明らかであるが、式の上で確認すると、まず、θ_0 は 7 節の (40) で決まるもので、今の場合は、

$$p_1(\theta_0) = \frac{L}{H} > \frac{\pi}{2}$$

を満たすが、$p_1(\pi) = \pi/2$ であるから確かに $\theta_0 > \pi$ であることがわかる。また、α_0 は $\pi < \theta_0 < 2\pi$ より、確かに

$$\alpha_0 = \frac{H}{1-\cos\theta_0} > \frac{H}{2}$$

となる。

一方、f_3 の方は、α_3 を $H/2 < \alpha_3 < \alpha_0$ ととり、θ_3 を (42) で決めたものであるが、この場合、

$$1 - \cos\theta_3 = \frac{H}{\alpha_3} < 2$$

なので、確かに $\pi < \theta_3 < 2\pi$ の範囲では (42) を満たす θ_3 がただ一つ決まる。そしてこのとき、

$$1 - \cos\theta_3 = \frac{H}{\alpha_3} > \frac{H}{\alpha_0} = 1 - \cos\theta_0$$

となるので、$\pi < \theta_3 < \theta_0 < 2\pi$ となることもわかる。

さて、T_{f_1} は、α_0 を使わずに θ_0 だけで表わせば、

$$T_{f_1} = \theta_0\sqrt{\frac{H}{g(1-\cos\theta_0)}} \tag{47}$$

となり、T_{f_3} を α_3, x_3 を使わずに θ_3 だけで表すと、

$$\begin{aligned} T_{f_3} &= \theta_3\sqrt{\frac{H}{g(1-\cos\theta_3)}} + \frac{L-\alpha_3(\theta_3-\sin\theta_3)}{2\sqrt{g\alpha_3}} \\ &= \theta_3\sqrt{\frac{H}{g(1-\cos\theta_3)}} + \frac{L}{2\sqrt{g}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta_3}{H}} - \frac{\theta_3-\sin\theta_3}{2\sqrt{g}}\sqrt{\frac{H}{1-\cos\theta_3}} \\ &= = \frac{L}{2\sqrt{g}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta_3}{H}} + \frac{\theta_3+\sin\theta_3}{2\sqrt{g}}\sqrt{\frac{H}{1-\cos\theta_3}} \end{aligned} \tag{48}$$

となる。

この θ_3 は $\pi < \theta_3 < \theta_0 < 2\pi$ の範囲で動かすことが可能で、元の f_3 の定義より、この (48) で θ_3 を $\theta_3 = \theta_0$ $(\theta_3 \to \theta_0 - 0)$、または $\theta_3 = \pi$ $(\theta_3 \to \pi + 0)$ とすると、T_{f_3} が T_{f_1}, T_{f_2} にそれぞれ一致することが予想される。

実際、$\theta_3 = \theta_0$ とすると、(48) は

$$T_{f_3} = \frac{L}{2\sqrt{g}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta_0}{H}} + \frac{\theta_0 + \sin\theta_0}{2\sqrt{g}}\sqrt{\frac{H}{1-\cos\theta_0}}$$

となるが、θ_0 では

$$\frac{L}{H} = p_1(\theta_0) = \frac{\theta_0 - \sin\theta_0}{1-\cos\theta_0}$$

が成り立つから、

$$\theta_0 + \sin\theta_0 = 2\theta_0 - (\theta_0 - \sin\theta_0) = 2\theta_0 - \frac{L}{H}(1-\cos\theta_0)$$

となり、よって、(47) より

$$T_{f_3} = \frac{L}{2\sqrt{g}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta_0}{H}} + \frac{\theta_0}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{H}{1-\cos\theta_0}} - \frac{L}{2\sqrt{gH}}\sqrt{1-\cos\theta_0} = T_{f_1}$$

となることがわかる。また、$\theta_3 = \pi$ とすれば、$T_{f_3} = T_{f_2}$ となることは容易に確認できる。すなわち f_3 は、f_1 と f_2 を連続的につなぐものになっていることがわかる。

よって、T_{f_3} を θ_3 の関数と考え、その単調性などを調べれば、T_{f_1}, T_{f_2}, T_{f_3} の大小関係がわかることになる。

(48) より、

$$2\sqrt{\frac{2g}{H}}\,T_{f_3} = \frac{L}{H}\sqrt{2(1-\cos\theta_3)} + \sqrt{2}\,\frac{\theta_3 + \sin\theta_3}{\sqrt{1-\cos\theta_3}} = 2p_1(\theta_0)\sin\frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_3 + \sin\theta_3}{\sin\dfrac{\theta_3}{2}}$$

となるが、この右辺を $p_3(\theta_3)$ とする (θ_0 は定数と見る)。このとき、

$$\begin{aligned}
p_3'(\theta_3) &= p_1(\theta_0)\cos\frac{\theta_3}{2} + \frac{(1+\cos\theta_3)\sin\dfrac{\theta_3}{2} - (\theta_3 + \sin\theta_3)\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\theta_3}{2}}{\sin^2\dfrac{\theta_3}{2}} \\
&= p_1(\theta_0)\cos\frac{\theta_3}{2} + \frac{4\cos^2\dfrac{\theta_3}{2}\sin\dfrac{\theta_3}{2} - (\theta_3 + \sin\theta_3)\cos\dfrac{\theta_3}{2}}{1-\cos\theta_3} \\
&= p_1(\theta_0)\cos\frac{\theta_3}{2} + \frac{2\cos\dfrac{\theta_3}{2}\sin\theta_3 - (\theta_3 + \sin\theta_3)\cos\dfrac{\theta_3}{2}}{1-\cos\theta_3} \\
&= p_1(\theta_0)\cos\frac{\theta_3}{2} + \frac{\sin\theta_3 - \theta_3}{1-\cos\theta_3}\cos\frac{\theta_3}{2} = (p_1(\theta_0) - p_1(\theta_3))\cos\frac{\theta_3}{2}
\end{aligned}$$

となる。

今、$\pi \leq \theta_3 \leq \theta_0 < 2\pi$ より、$p_1(\theta_0) - p_1(\theta_3) \geq 0$, $\cos(\theta_3/2) \leq 0$ であるから、$p_3'(\theta_3) \leq 0$ で、0 になるのは $\theta_3 = \theta_0, \pi$ のときのみなので p_3 は単調減少であり、よって $\pi < \theta_3 < \theta_0$ に対して

$$T_{f_2} > T_{f_3} > T_{f_1} \tag{49}$$

となることがわかる。つまり、$f_2(x)$, $f_3(x)$ の経路よりも $f_1(x)$ の経路の方が短い時間で B に到達し、f_2, f_3 は最速降下線ではなく、やや遠回りするように見える f_1 が最速らしいことがわかる。

次に、f_1, f_2 で同時に物体をすべらせると、f_2 の場合に最下点に達する時刻

$$T_4 = \pi\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

のときには、f_1 の方はどこにいるかを考えてみる。f_1 の方は、(29) により時間とパラメータが比例するので、f_1 の方のパラメータ θ_4 は、

$$\theta_4 = T_4\sqrt{\frac{g}{\alpha_0}} = \pi\sqrt{\frac{H}{2g}}\sqrt{\frac{g}{\alpha_0}} = \pi\sqrt{\frac{H}{2\alpha_0}} = \pi\sqrt{\frac{1-\cos\theta_0}{2}} = \pi\sin\frac{\theta_0}{2} \tag{50}$$

となるが、$\pi < \theta_0 < 2\pi$ より $\theta_4 < \pi$ であり、よって f_1 の方はまだ最下点には達していないことがわかる。ではその x 座標 x_4 と、f_2 の方の x 座標 $\pi H/2$ の大小はどうだろうか。(50) より、

$$\begin{aligned} x_4 - \frac{\pi H}{2} &= \alpha_0(\theta_4 - \sin\theta_4) - \frac{\pi}{2}\alpha_0(1-\cos\theta_0) = \alpha_0\left(\theta_4 - \sin\theta_4 - \pi\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) \\ &= \alpha_0\left(\theta_4 - \sin\theta_4 - \frac{\theta_4^2}{\pi}\right) \end{aligned}$$

となるので、$p_4(\theta) = \theta - \theta^2/\pi - \sin\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ として、この符号を考える。

$$p_4'(\theta) = 1 - \frac{2}{\pi}\theta - \cos\theta$$

となるが、$1 - 2\theta/\pi$ は傾き $(-\pi)/2$ で y 切片が 1 の直線なので、$y = \cos\theta$ のグラフとは $\theta = 0, \pi/2, \pi$ で交わり、そこで符号が変わる。よって、p_4' の増減表は以下のようになる

θ	0	$\cdots$	$\pi/2$	$\cdots$	π
p_4'	0	$-$	0	$+$	0
p_4	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

よって $\theta_4 < \pi$ では $p_4(\theta_4) < 0$ となるので、$x_4 < \pi H/2$、すなわち f_1 の方の x 座標は T_4 時点ではまだ $\pi H/2$ に達しておらず、水平位置では f_2 の方よりも負けていて、その後で f_2 の方が直線に入ったところで f_1 が追い抜くことがわかる。

では、T_4 の時点での f_1 の方の y 座標 y_4 はどうだろうか。(50) より、

$$\begin{aligned} y_4 &= f_1(x_4) = H - \alpha_0(1-\cos\theta_4) = \alpha_0(1-\cos\theta_0) - \alpha_0(1-\cos\theta_4) \\ &= \alpha_0\left(2\sin^2\frac{\theta_0}{2} - 2\sin^2\frac{\theta_4}{2}\right) = 2\alpha_0\left(\frac{\theta_4^2}{\pi^2} - \sin^2\frac{\theta_4}{2}\right) \end{aligned}$$

となるが、$0 < \theta_4 < \pi$ であり、$y = x/\pi$ は原点を通り傾き $1/\pi$ の直線、$y = \sin(x/2)$ は $x = \pi$ で 1 となるので、これらは原点と $(\pi, 1)$ で交わり、$0 < x < \pi$ では $0 < x/\pi < \sin(x/2)$ となる。よって $y_4 < 0$ であり、T_4 の時点では $x = \pi H/2$ や最下点までは達してはいないが、既に x 軸よりも下の位置には来ていることがわかる。

なお、本節で、f_2, f_3 が実際には最速降下線にはならないことを示したが、実はそれは微分方程式 (20) の導出の段階での問題もある。

(20) は、一般解 (23) 以外に、$h = c_0$ という特異解を持っていて、そのために (27) のような解もできてしまっていたが、その特異解は実は (18) を導くところでついてしまったものである。それを次に説明する。

オイラー方程式の元々の 2 階の微分方程式 (17) に戻って考える。今 $\langle z\rangle = \sqrt{1+z^2}$ と書くことにすると、F は

$$F = \frac{\langle f'\rangle}{\sqrt{2g}}(H-f)^{-1/2}$$

と書け、

$$\begin{aligned} (\langle x\rangle)' &= (\sqrt{1+x^2})' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\langle x\rangle}, \\ (\langle x\rangle)'' &= \left(\frac{x}{\langle x\rangle}\right)' = \frac{\langle x\rangle - x(\langle x\rangle)'}{\langle x\rangle^2} = \frac{\langle x\rangle - x^2/\langle x\rangle}{\langle x\rangle^2} = \frac{1}{\langle x\rangle^3} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} F_f &= \frac{\langle f'\rangle}{2\sqrt{2g}}(H-f)^{-3/2}, \quad F_{f'} = \frac{f'}{\sqrt{2g}\,\langle f'\rangle}(H-f)^{-1/2}, \\ F_{ff'} &= \frac{f'}{2\sqrt{2g}\,\langle f'\rangle}(H-f)^{-3/2}, \quad F_{f'f'} = \frac{1}{\sqrt{2g}\,\langle f'\rangle^3}(H-f)^{-1/2} \end{aligned}$$

となる。よって、(17) は、

$$\sqrt{2g}(F_f - F_{ff'}f' - F_{f'f'}f'')$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\langle f'\rangle}{2}(H-f)^{-3/2} - \frac{(f')^2}{2\langle f'\rangle}(H-f)^{-3/2} - \frac{f''}{\langle f'\rangle^3}(H-f)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{2\langle f'\rangle}(H-f)^{-3/2} - \frac{f''}{\langle f'\rangle^3}(H-f)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{2\langle f'\rangle^3}(H-f)^{-3/2}(\langle f'\rangle^2 - 2f''(H-f))
\end{aligned}
$$

となるので、よって、$h = H - f$ が満たすべき 2 階の微分方程式は、本来

$$1 + (h')^2 + 2h''h = 0 \tag{51}$$

であることがわかる。これは、明らかに $h = c_0$ という解を持たない。すなわち、(20) に含まれる、f_2, f_3 のように水平な部分を持つ解は、元々 I の極値を与えるものにはなっていなかったことがわかる。

一方、(20) の解は、

$$1 + (h')^2 = \frac{c_0}{h}$$

となるので、両辺微分すると

$$2h'h'' = -\frac{c_0}{h^2}\,h'$$

となり、もし「$h' \neq 0$」であれば、

$$2h'' = -\frac{c_0}{h^2}$$

となるので、

$$2hh'' = -\frac{c_0}{h} = -1 - (h')^2$$

となり、確かに (51) を満たしている。この「$h' \neq 0$」の部分は $h = c_0$ を排除するが、元々 $h' = 0$ は、(18) の微分が (17) の f' 倍であるところで紛れこんだものである。

なお、(51) は陽に x を含んでいないので、常微分方程式の階数低下法により、1 階の微分方程式に帰着できるが、(51) の場合はその手順を踏まなくても、容易に 1 回積分できる形に変形できる。(51) より、

$$\frac{2h''}{1 + (h')^2} + \frac{1}{h} = 0$$

なので、「両辺を h' 倍」すると、

$$\frac{2h'h''}{1 + (h')^2} + \frac{h'}{h} = 0, \quad \Big(\log(1 + (h')^2) + \log h\Big)' = 0$$

となるので、これを積分すれば (20) が得られる。しかし、この途中で「両辺を h' 倍」する作業が入っていて、そこで $h'=0$ という特異解が追加されてしまうことがわかる。

また、本節では、f_1 が f_2, f_3 よりも「最速降下線らしい」ことは見たが、実際にそれが本当に「最速」であるかの証明にはなっていないし、3 節の変分法も、そこでも述べたように、f_1 が本当に I の最小値を与えるかどうかまでは示してない。それについては、次節で考察する。

9 最速であることの証明

変分法は、汎関数の最小を与える関数の候補を導くだけで、実際にそれが本当に最小を与えているのかについては、別の考察が必要となる。汎関数の凸性を利用する方法などもあるようだが、本節では、実際に逆さサイクロイドが最小値を与えることの証明を紹介する。

本来、変分問題の最小性の証明は易しくはないが、最速降下線問題については、初等的な証明も知られている。

[2], [11] でも紹介されている [6] の証明はシュワルツの不等式を利用した非常にシンプルなものであるが、これは A と B が水平な位置にある場合、すなわち $0\le\theta\le 2\pi$ の逆さサイクロイド全体が解になる場合にしか適用できない。

一方、[7] はわずか 2 ページの論文だが、その証明は A, B の一般の位置に対するもので、シュワルツの不等式に少し追加した不等式を用いることで、初等的で非常に鮮やかな証明を行っている。

本節では、[7] に習い、しかしその証明の流れを少し変えた証明を紹介する。目標は、

$$\sqrt{2g}\,T=\int_0^L\sqrt{\frac{1+(f'(x))^2}{H-f(x)}}\,dx \tag{52}$$

を最小化する関数 f が逆さサイクロイドであることを示すことである。f は、$f(0)=H$, $f(L)=0$ で、$0<x<L$ では $f(x)<H$ を満たす、滑らかな関数とする。

$H-f(x)=h(x)$ と書けば、(52) は、

$$J_1(h)=\int_0^L\sqrt{\frac{1+(h')^2}{h}}\,dx,\quad (h(0)=0,\ h(L)=H,\ h(x)>0\ (0<x<L)) \tag{53}$$

と書くことができ、そしてこれを最小化するのがサイクロイド関数

$$\hat{h}(x)=\alpha_0\mathrm{cyc}\left(\frac{x}{\alpha_0}\right)$$

であることを示す。ここで α_0 は、7 節で見たように、

$$L = \alpha_0(\theta_0 - \sin\theta_0), \quad H = \alpha_0(1 - \cos\theta_0) \quad (\alpha_0 > 0,\ 0 < \theta_0 < 2\pi)$$

によって θ_0 とともに一意に決まるものである。

シュワルツの不等式

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\sqrt{a^2 + b^2} \geq a\xi + b\eta \tag{54}$$

は、良く知られているように $(a, b)//(\xi, \eta)$ のときに等号が成立する。これを用いると、

$$\sqrt{\frac{1 + (h')^2}{h}}\sqrt{\frac{1 + (\hat{h}')^2}{\hat{h}}} \geq \frac{1 + h'\hat{h}'}{\sqrt{h\hat{h}}} \tag{55}$$

となる。これをさらに、以下のように変形する。

$$\sqrt{\frac{1 + (h')^2}{h}} \geq \sqrt{\frac{1 + (\hat{h}')^2}{\hat{h}}} + \frac{\dfrac{1 + h'\hat{h}'}{\sqrt{h\hat{h}}}}{\sqrt{\dfrac{1 + (\hat{h}')^2}{\hat{h}}}} - \sqrt{\frac{1 + (\hat{h}')^2}{\hat{h}}} \tag{56}$$

そして、右辺の後の方の 2 項の和を I_2 とする。

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\hat{h}')^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{h'}{\sqrt{h}}\,\hat{h}'\right) - \sqrt{\frac{1 + (\hat{h}')^2}{\hat{h}}} \tag{57}$$

ここからの証明の方針は以下の通り。(56) より、

$$J_1(h) = \int_0^L \sqrt{\frac{1 + (h')^2}{h}}\,dx \geq \int_0^L \sqrt{\frac{1 + (\hat{h}')^2}{\hat{h}}}\,dx + \int_0^L I_2\,dx = J_1(\hat{h}) + \int_0^L I_2\,dx$$

となるが、I_2 は $I_3(0) = I_3(L) = 0$, $I_4(x) \geq 0$ となる $I_3(x)$, $I_4(x)$ により、
$I_2 = I_3'(x) + I_4(x)$ の形に分けることができて、よって、

$$\int_0^L I_2\,dx = \int_0^L I_3'\,dx + \int_0^L I_4\,dx = I_3(L) - I_3(0) + \int_0^L I_4\,dx \geq 0$$

となり、よって $J_1(h) \geq J_1(\hat{h})$ が成り立つことになるので、$h = \hat{h}$ のときに J_1 が最小となることが示される。さらに、その等号成立の条件を検討すると、$h = \hat{h}$ 以外にはその最小を与える関数がないことも示される。

以下では I_2 を上の形に分けることを考える。まず、$\hat{h}$ をパラメータ θ で表せば、

$$\hat{h} = \alpha_0(1-\cos\theta), \quad x = \alpha_0(\theta - \sin\theta)$$

で、5 節で計算したように、

$$\hat{h}' = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}, \quad 1 + (\hat{h}')^2 = \frac{2}{1-\cos\theta}$$

となり、よって、

$$\begin{aligned} I_2 &= \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{h'}{\sqrt{h}}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right) - \sqrt{\frac{2}{\alpha_0}}\frac{1}{1-\cos\theta} \\ &= \sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{h'}{\sqrt{h}}\frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\sin^2(\theta/2)}\right) - \sqrt{\frac{2}{\alpha_0}}\frac{1}{1-\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}\sin\frac{\theta}{2} + 2\left(\sqrt{h}\right)'\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{\frac{2}{\alpha_0}}\frac{1}{1-\cos\theta} \end{aligned}$$

となる。よって、I_3 を作るために、

$$I_2 = 2\left(\sqrt{h} - \sqrt{\hat{h}}\right)'\cos\frac{\theta}{2} + 2\left(\sqrt{\hat{h}}\right)'\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{h}}\sin\frac{\theta}{2} - \sqrt{\frac{2}{\alpha_0}}\frac{1}{1-\cos\theta}$$

と変形すると、

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\hat{h}}\right)' &= \frac{\hat{h}'}{2\sqrt{\hat{h}}} = \frac{\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}}{2\sqrt{\alpha_0(1-\cos\theta)}} = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha_0}\sin\frac{\theta}{2}}\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1-\cos\theta} \\ &= \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{2\alpha_0}(1-\cos\theta)} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} &2\left(\sqrt{\hat{h}}\right)'\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{\frac{2}{\alpha_0}}\frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2}{\sqrt{2\alpha_0}(1-\cos\theta)} \\ &= \frac{1+\cos\theta-2}{\sqrt{2\alpha_0}(1-\cos\theta)} = -\frac{1}{\sqrt{2\alpha_0}} \end{aligned}$$

となるので、

$$I_2 = 2\left(\sqrt{h} - \sqrt{\hat{h}}\right)'\cos\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{h}}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\alpha_0}}$$

となる。よって、I_3 を

$$I_3 = 2\left(\sqrt{h} - \sqrt{\hat{h}}\right)\cos\frac{\theta}{2} \tag{58}$$

とすると、

$$I_2 = I_3' - 2\left(\sqrt{h} - \sqrt{\hat{h}}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)' + \frac{1}{\sqrt{h}}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\alpha_0}}$$

となるが、

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)' = \frac{d}{dx}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\dfrac{d}{d\theta}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}{\alpha_0(1-\cos\theta)}$$

なので、I_4 は、

$$I_4 = I_2 - I_3' = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{\hat{h}}}{\alpha_0(1-\cos\theta)}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{h}}\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\alpha_0}}$$

とすることになる。ここで

$$\frac{\sqrt{\hat{h}}}{\alpha_0(1-\cos\theta)}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{\alpha_0(1-\cos\theta)}}{\alpha_0(1-\cos\theta)}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha_0}}$$

より、結局 I_4 は

$$I_4 = \frac{\sqrt{h}}{2\alpha_0\sin\dfrac{\theta}{2}} + \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{h}} - \frac{2}{\sqrt{2\alpha_0}}$$

と書ける。この最初の 2 項に相乗・相加平均の不等式を用いると、

$$I_4 \geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{h}}{2\alpha_0\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{h}}} - \frac{2}{\sqrt{2\alpha_0}} = \frac{2}{\sqrt{2\alpha_0}} - \frac{2}{\sqrt{2\alpha_0}} = 0 \tag{59}$$

が得られる。$I_3(0) = I_3(L) = 0$ も、(58) の形と h が満たすべき境界条件により成り立つので、これで上の方針通り、$J_1(h) \geq J_1(\hat{h})$ が示されたことになり、サイクロイドが最小値を与えることが示された。

次に、この等号成立の条件であるが、それはシュワルツの不等式 (55) と、相乗・相加平均の不等式 (59) の両方の等号が積分範囲のすべての x、すなわち $0 < x < L$ で成り立つこと、となるが、シュワルツの不等式の方の等号は、$(1, h)//(1, \hat{h})$ を意味するので、これは $0 < x < L$ で $h = \hat{h}$ でなければいけないことを意味する。つまり、こちらの条件だけで $J_1(h) = J_1(\hat{h})$ となる h が $h = \hat{h}$ 以外にないことがわかる。

ちなみに、相乗・相加平均の不等式

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

の等号成立条件は $a = b$ なので、こちらは、

$$\frac{\sqrt{h}}{2\alpha_0 \sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{h}}$$

となるが、これは、

$$h = 2\alpha_0 \sin^2\frac{\theta}{2} = \alpha_0(1 - \cos\theta) = \hat{h}$$

となり、こちらも実は $h = \hat{h}$ のときにのみ等号が成立することがわかる。

10 摩擦や空気抵抗がある場合

後は、元の問題の状況が少し変わった場合、例えば摩擦を考慮した場合、空気抵抗がある場合、初速度が 0 でない場合、そしてすべる場合ではなくむしろ実際は多いと思われる玉などをころがらせる場合について考えてみる。まず本節では、摩擦や空気抵抗がある場合について考察する。

摩擦がある場合については、[8] のサイトには、「近似的」な方程式の解析解が書かれているが、厳密には以下のようになる。

この場合は、動摩擦力 $\boldsymbol{G}_1$ を (1) の式に追加する必要があるが、動摩擦力は斜面の接線方向で運動の逆方向に働き、その大きさは斜面からの垂直抗力に比例する。よって、

$$m(\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = m(0, -g) + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{G}_1, \quad \boldsymbol{G}_1 = -\frac{(1, f')}{\sqrt{1 + (f')^2}}\mu N \tag{60}$$

となる。ここで、$\mu\ (> 0)$ は動摩擦係数である。よって、各成分に分離すると、

$$\ddot{x} = -\frac{f' + \mu}{\sqrt{1 + (f')^2}}\frac{N}{m}, \quad \ddot{y} + g = \frac{1 - \mu f'}{\sqrt{1 + (f')^2}}\frac{N}{m}, \tag{61}$$

となる。

[8] では、垂直抗力の大きさ N が、重力の斜面の垂直成分に等しい:

$$N = \frac{mg}{\sqrt{1+(f')^2}} \tag{62}$$

と仮定して解析解を導いているが、(62) は厳密には成り立たない。もし、斜面が直線で、物体の加速度が斜面の接線方向に等しければ、(62) が成り立つが、今考えている斜面は直線ではないので、加速度は斜面の接線方向とは限らず、実際にはこうはならない。

さて、(61) から N を消去すると、

$$(1-\mu f')\ddot{x} + (f'+\mu)(\ddot{y}+g) = 0 \tag{63}$$

となる。変分法にかけるためには、この (63) を

$$\frac{dt}{dx} = F(x, f(x), f'(x), f''(x))$$

などのような形に直せなくてはいけない。しかし、(63) は、x の 2 階の方程式だから 1 回は積分して 1 階の方程式に直さないといけないだろう。前のようにエネルギー保存則で考えると、(63) を $\dot{x}$ 倍して、

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}f'\ddot{y} + \dot{x}f'g + \mu g\dot{x} = \mu(\dot{x}f'\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})$$

となり、$f'\dot{x} = \dot{y}$ より、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\} + gy + \mu g x\right) = \mu(\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}) \tag{64}$$

となる。左辺は t での微分の形になっているが、右辺はその形にはなっていない。この右辺の y の微分を f と x で表すと、

$$\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y} = f'\dot{x}\ddot{x} - \dot{x}(\dot{x}f')^{\cdot} = f'\dot{x}\ddot{x} - \dot{x}(\ddot{x}f' + (\dot{x})^2 f'') = -(\dot{x})^3 f''$$

となるが、これもやはり t の微分の形に直すことはできない。

(63) の式で y を f, x に書き直してみると、

$$\begin{aligned}
&(1-\mu f')\ddot{x} + (f'+\mu)(\ddot{x}f' + (\dot{x})^2 f'' + g) = 0 \\
&\left(1+(f')^2\right)\ddot{x} + (f'+\mu)f''(\dot{x})^2 + g(f'+\mu) = 0
\end{aligned}$$

より、

$$\ddot{x} + \frac{(f'+\mu)f''}{1+(f')^2}(\dot{x})^2 + \frac{(f'+\mu)g}{1+(f')^2} = 0 \tag{65}$$

という 2 階の非線形の微分方程式となる。これに何らかの積分因子をかけることで、この式を 1 回積分することは可能かもしれないがかなり難しいだろう。少なくとも今のところ私には良くわからない。

つまり、摩擦のある場合は、摩擦のない場合の (11) の式のような、変分法が使える積分の式を導くことも容易ではない。

次は、摩擦の代わりに空気抵抗がある場合について考えてみる。この場合は (60) の摩擦力 $\boldsymbol{G}_1$ を空気抵抗力 $\boldsymbol{G}_2$ に変えればよい。

空気抵抗力 $\boldsymbol{G}_2$ は、運動の逆方向、すなわち斜面の接線方向で運動の逆方向に働くところまでは $\boldsymbol{G}_1$ と同じだが、その大きさは速さ $v = |\boldsymbol{v}| = |(\dot{x}, \dot{y})|$ の関数 (増加関数) と考えることができる。よく用いられるのは、速さに比例すると考えた式、あるいは速さの 2 乗に比例すると考えた式である。ここでは、簡単のため速さに比例するとする。この場合、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}_2 &= -\frac{(1,f')}{\sqrt{1+(f')^2}}(kv) = -k\frac{(1,f')}{\sqrt{1+(f')^2}}\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2} \\ &= -k\frac{(1,f')}{\sqrt{1+(f')^2}}\sqrt{1+(f')^2}\,\dot{x} = -k(1,f')\dot{x} = -k(\dot{x},\dot{y})\end{aligned}$$

となる。ここで、$k\ (>0)$ は比例定数だが、抵抗力の大きさが速さに比例するのではない場合は、k を v の関数と考えればよい。

この場合は、

$$\ddot{x} = -\frac{f'}{\sqrt{1+(f')^2}}\frac{N}{m} - \frac{k}{m}\dot{x}, \quad \ddot{y}+g = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\frac{N}{m} - \frac{k}{m}\dot{y} \tag{66}$$

となるので、N を消去すると、

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \left(\ddot{y} + g + \frac{k}{m}\dot{y}\right)f' = 0 \tag{67}$$

が得られる。この場合もエネルギーを考えると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2\} + gy\right) = -\frac{k}{m}\left((\dot{x})^2+(\dot{y})^2\right) \tag{68}$$

すなわち、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + gy\right) + \frac{k}{m}v^2 = 0 \tag{69}$$

となるが、これも (64) と同様にきれいには積分できない。k が定数でなく v の関数である場合も、残念ながらあまりうまくいくような気はしない。

(67) を $x,\ f$ のみの式に書き換えてみると、

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,\dot{x} + \left(\ddot{x}f' + (\dot{x})^2 f'' + g + \frac{k}{m}\,\dot{x}f'\right) f' = 0$$
$$\left(1 + (f')^2\right)\ddot{x} + f'f''(\dot{x})^2 + \frac{k}{m}\left(1 + (f')^2\right)\dot{x} + gf' = 0$$

より、

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,\dot{x} + \frac{ff''}{1 + (f')^2}\,(\dot{x})^2 + \frac{gf'}{1 + (f')^2} = 0 \tag{70}$$

という 2 階の非線形の微分方程式が得られるが、これもやはり積分因子を見つけることは容易ではなさそうである。

さらに、摩擦と空気抵抗の両方を考えた式を作ることもできるが、それも簡単に解けそうな方程式にはならない。

11　初速度が正の場合

次は、初速度が 0 ではない場合を考える。少し勢いをつけて斜面に投げるようなイメージである。この場合は、元の式 (1)〜(5) のうち、(4) が、

$$v(0) = \sqrt{(\dot{x}(0))^2 + (\dot{y}(0))^2} = v_0 \ \ (> 0) \tag{71}$$

に変わるが、それにより (10) が、

$$\frac{1}{2}\{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\} + gy = \frac{1}{2}\,v_0^2 + gH \tag{72}$$

に変わるので、(11) は

$$T = \int_0^L \sqrt{\frac{1 + (f')^2}{2g(H - f) + v_0^2}}\,dx \tag{73}$$

となる。この場合は、オイラー方程式 (19) は、

$$(1 + (f')^2)\left(H - f + \frac{v_0^2}{2g}\right) = c_0 \tag{74}$$

となるので、$H - f + v_0^2/(2g) = h$ とすれば (20) と同じ方程式

$$(1 + (h')^2)h = c_0$$

が得られる。この場合、$h(0) = H - f(0) + v_0^2/(2g) = v_0^2/(2g)$ となるので、(22) は、

$$\int_{h(0)}^{h} \sqrt{\frac{h}{c_0 - h}}\, dh = x$$

となり、

$$d_0 = \int_0^{h(0)} \sqrt{\frac{h}{c_0 - h}}\, dh = \frac{c_0}{2}(\theta_5 - \sin\theta_5) \tag{75}$$

とすれば

$$\int_0^{h} \sqrt{\frac{h}{c_0 - h}}\, dh = x + d_0$$

となり、よって、

$$h = \frac{c_0}{2}(1 - \cos\theta), \quad x + d_0 = \frac{c_0}{2}(\theta - \sin\theta), \quad f(x) = H - h + \frac{v_0^2}{2g} \tag{76}$$

となる。これは、前の逆さサイクロイドを x 方向に $-d_0$ 平行移動したものになっている。

$\hat{H} = H + v_0^2/(2g)$ とすると、

$$\frac{m}{2} v_0^2 + mgH = mg\hat{H}$$

となるので、(76) より、これは曲線を負の方に少し伸ばして $(x, y) = (-d_0, \hat{H})$ から速度 0 でスタートして、$x = 0$ の場所で速さが v_0 になったものと同じ状況になっていることがわかる。また、この解は $x = 0$ では $f'(+0) = -\infty$ ではなく、有限な傾きになっている $(図\ 9)$。

次に、この解が一つに決まるかを考えてみよう。すなわち、与えられた H, L, v_0 に対して、

$$f(x) = H + \frac{v_0^2}{2g} - \alpha_0 \mathrm{cyc}\left(\frac{x + d_0}{\alpha_0}\right) \tag{77}$$

となる $\alpha_0 > 0,\ d_0 > 0$ が一意に存在するかどうかを調べてみる。実際には、(77) の $x = 0$ と $x = L$ で境界条件 (5) を満たすことが α_0, d_0 の条件なので、

$$\frac{v_0^2}{2g} = \alpha_0 \mathrm{cyc}\left(\frac{d_0}{\alpha_0}\right), \quad H + \frac{v_0^2}{2g} = \alpha_0 \mathrm{cyc}\left(\frac{L + d_0}{\alpha_0}\right) \tag{78}$$

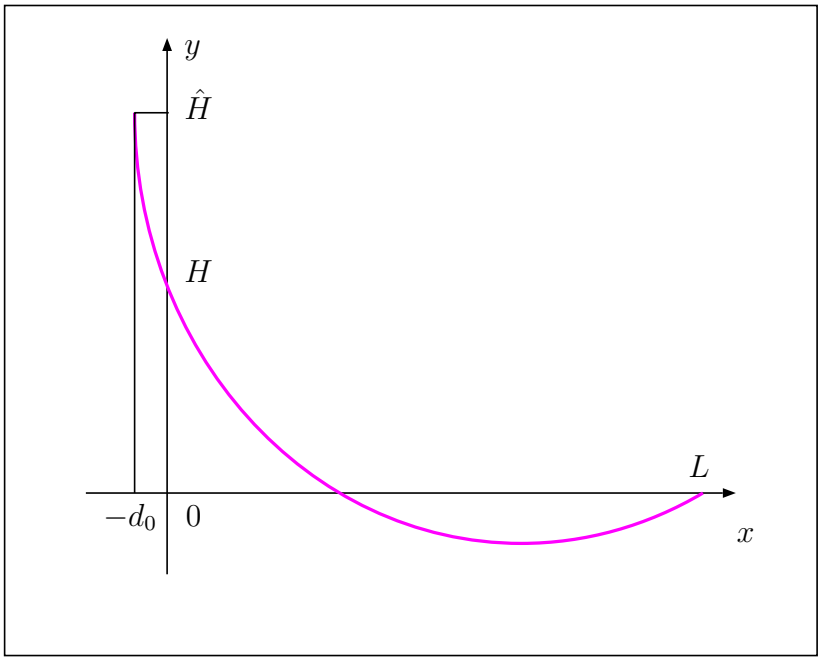

図 9: α_0, d_0 の条件

となる α_0, d_0 が一意に存在するかどうかを考えればよい (図 10)。

(78) を 2 つのパラメータを用いて

$$\begin{cases} \dfrac{v_0^2}{2g} = \alpha_0(1-\cos\theta_6), & d_0 = \alpha_0(\theta_6 - \sin\theta_6), \\ H + \dfrac{v_0^2}{2g} = \alpha_0(1-\cos\theta_7), & L + d_0 = \alpha_0(\theta_7 - \sin\theta_7) \end{cases} \tag{79}$$

と表し、それを 4 未知数 α_0, d_0, θ_6, θ_7 の 4 本の方程式と考え、逆関数定理を用いて解の存在を示す、という方針もあるが、ここでは、別の形で (78) の解を考えていくことにする。

まず、α_0 は、サイクロイドが $\hat{H}$ まで達しなければいけないので、

$$2\alpha_0 \geq \hat{H} = H + \frac{v_0^2}{2g} \tag{80}$$

である必要がある。このとき、サイクロイド $y = \alpha_0 \mathrm{cyc}(x/\alpha_0)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ と水平線 $y = v_0^2/(2g)$, $y = \hat{H}$ との交点の x 座標を、小さい方から順に $x_1(\alpha_0)$, $x_2(\alpha_0)$, $x_3(\alpha_0)$, $x_4(\alpha_0)$ とすると (図 11)、

サイクロイドは $\alpha_0\pi$ で左右に対称なので、

$$\alpha_0\pi \leq x_3(\alpha_0) = 2\alpha_0\pi - x_2(\alpha_0) < x_4(\alpha_0) = 2\alpha_0\pi - x_1(\alpha_0) < 2\alpha_0\pi$$

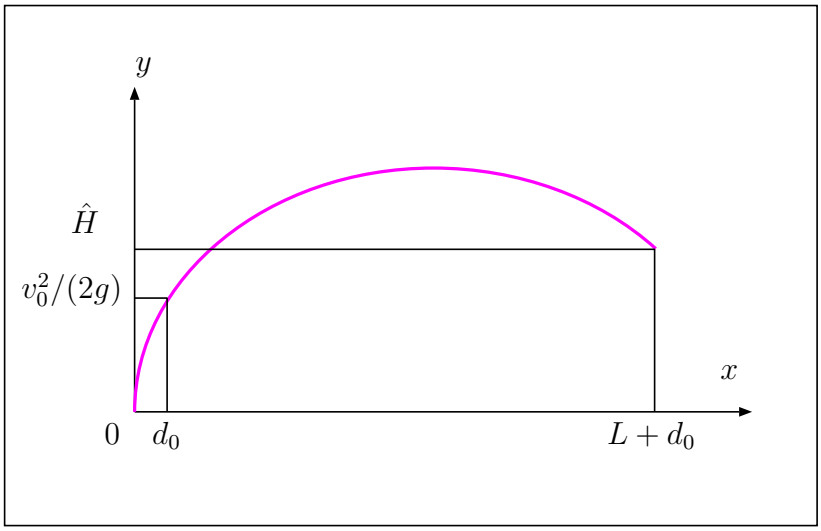

図 10: α_0, d_0 の条件

となり、$\alpha_0 = \hat{H}/2$ のときは、そしてそのときだけ $x_2(\hat{H}/2) = x_3(\hat{H}/2) = \pi\hat{H}/2$ となる。そして、満たすべき条件 (78) は、$x_1(\alpha_0) = d_0$ と $x_2(\alpha_0)$ か $x_3(\alpha_0)$ のいずれかが $L + d_0$ となればよいので、結局任意の $H > 0$, $L > 0$, $v_0 > 0$ に対して、

$$x_2(\alpha_0) - x_1(\alpha_0) = L, \quad \text{または} \quad x_3(\alpha_0) - x_1(\alpha_0) = L \tag{81}$$

となるような α_0 が存在すること、と同じことになる。そのような α_0 が取れれば、d_0 は $d_0 = x_1(\alpha_0)$ とすればよい。よって、(81) を満たす α_0 がただ一つ存在することを示せばよいが、それは $x_1(\alpha_0)$ と $x_2(\alpha_0)$ の増減を調べればよく、一意存在のためには以下のことが言えればよい。

> 「$x_1(\alpha_0)$, $x_2(\alpha_0)$ は α_0 に関して減少関数で、$x_1(\infty) = x_2(\infty) = 0$ であること、および $x_2(\alpha_0) - x_1(\alpha_0)$ も減少関数であること」

もし、これが示されれば、$p = x_2(\alpha_0) - x_1(\alpha_0)$ の (80) での値の範囲は $0 \le p \le x_2(\hat{H}/2) - x_1(\hat{H}/2)$ で、その対応は 1 対 1 となる。

一方 $x_3(\alpha_0) = 2\alpha_0\pi - x_2(\alpha_0)$ は増加関数で $x_3(\infty) = \infty$ となるので $p = x_3(\alpha_0) - x_1(\alpha_0)$ も増加関数で、(80) での値の範囲は $x_3(\hat{H}/2) - x_1(\hat{H}/2) \le p < \infty$ で、やはり 1 対 1 となる。

$x_3(\hat{H}/2) - x_1(\hat{H}/2) = x_2(\hat{H}/2) - x_1(\hat{H}/2)$ であるから、よってこれにより (81) を満たす α_0 がただ一つ存在することがわかる。

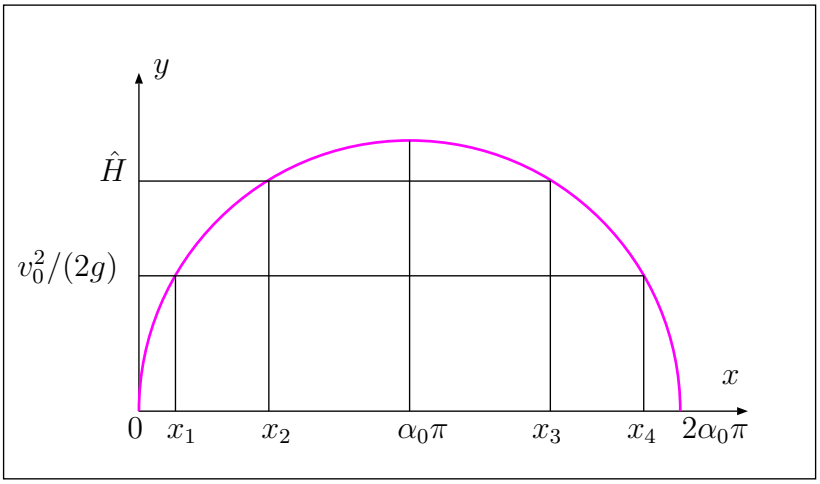

図 11: $x_j(\alpha_0)$

$x_1(\alpha_0)$ と $x_2(\alpha_0)$ の増減や $\alpha_0 = \infty$ での値の性質は同じなので、それについてはとりあえず $x_1(\alpha_0)$ の方のみを考える。$x_1(\alpha_0)$ はパラメータを用いて、

$$\begin{aligned} &\frac{v_0^2}{2g} = \alpha_0(1-\cos\phi_1), \quad x_1(\alpha_0) = \alpha_0(\phi_1 - \sin\phi_1), \\ &0 < x_1(\alpha_0) < \alpha_0\pi, \ \ 0 < \phi_1 < \pi \end{aligned} \tag{82}$$

と表される。ここから、

$$\alpha_0 = \frac{v_0^2}{2g}\,\frac{1}{1-\cos\phi_1}$$

となり、$\phi_1 \in (0,\pi)$ と $\alpha_0 \in (v_0^2/(4g),\infty)$ が 1 対 1 に単調 (減少) に対応し、よって $x_1(\alpha_0)$ をパラメータ ϕ_1 で表現できることになる。(82) より

$$x_1(\alpha_0) = \frac{v_0^2}{2g}\,\frac{\phi_1 - \sin\phi_1}{1-\cos\phi_1} = \frac{v_0^2}{2g}\,p_1(\phi_1)$$

と表されるので、

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(\alpha_0)}{d\alpha_0} &= \frac{\dfrac{dx_1(\alpha_0)}{d\phi_1}}{\dfrac{d\alpha_0}{d\phi_1}} = \frac{p_1'(\phi_1)}{\left(\dfrac{1}{1-\cos\phi_1}\right)'} = \frac{2-2\cos\phi_1-\phi_1\sin\phi_1}{-\sin\phi_1} \\ &= -2\,\frac{1-\cos\phi_1}{\sin\phi_1} + \phi_1 \end{aligned}$$

より、

$$x_1'(\alpha_0) = 2\left(\frac{\phi_1}{2} - \tan\frac{\phi_1}{2}\right) \tag{83}$$

となる。$y = \tan x$ の $x = 0$ での傾きは 1 なので、$(0, \pi/2)$ では $\tan x > x$ であり、よって (83) より $0 < \phi_1 < \pi$ では $x_1'(\alpha_0) < 0$ となることがわかる。よって $x_1(\alpha_0)$ は $(v_0^2/(4g), \infty)$ で減少する。また、両端の値が、

$$x_1\left(\frac{v_0^2}{4g} + 0\right) = \frac{v_0^2}{2g}\, p_1(\pi - 0) = \frac{v_0^2 \pi}{4g}, \quad x_1(\infty) = \frac{v_0^2}{2g}\, p_1(+0) = 0$$

となることもわかる。$x_2(\alpha_0)$ の増減、端点の値も同様なので、あとは $x_2(\alpha_0) - x_1(\alpha_0)$ の減少性を示せばよい。

$x_2(\alpha_0)$ もパラメータを用いて、

$$\begin{aligned} &\hat{H} = \alpha_0(1 - \cos\phi_2), \quad x_2(\alpha_0) = \alpha_0(\phi_2 - \sin\phi_2), \\ &0 < x_2(\alpha_0) < \alpha_0\pi, \ \ 0 < \phi_2 < \pi \end{aligned} \tag{84}$$

と表せば、(83) より

$$\frac{d}{d\alpha_0}(x_2(\alpha_0) - x_1(\alpha_0)) = 2\left(\frac{\phi_2}{2} - \tan\frac{\phi_2}{2}\right) - 2\left(\frac{\phi_1}{2} - \tan\frac{\phi_1}{2}\right)$$

となる $(0 < \phi_1 < \phi_2 < \pi)$。ここで、

$$(x - \tan x)' = 1 - (1 + \tan^2 x) = -\tan^2 x < 0$$

なので、ここから $(x_2(\alpha_0) - x_1(\alpha_0))' < 0$ がわかる。これで $x_2(\alpha_0) - x_1(\alpha_0)$ が減少関数であることもわかり、よって、以上で (81) を満たす α_0 がただひとつ存在することが言え、初速が正の場合の逆さサイクロイド解がただ一つ存在することが示されたことになる。

12 ころがる場合

次は、すべらずにころがる場合を考える。この場合も細かく考えると色々問題がある。

- 問題 1.
  ころがる場合は、基本的には「摩擦力」が働いているが、それは 10 節で考察した「動摩擦力」ではなく、物体と斜面の接点がすべらない「静止摩擦力」が働く。そして、すべらないためには、その摩擦力が最大摩擦力である $\mu_0 N$ を越えてはいけないので、ある程度垂直抗力が大きくなければいけない。よって、初速度 0 ですべる場合の最速解のように出発点の傾きが $-\infty$ となることは許されず、静止摩擦係数 μ_0 による制限 (下限) がつく。$x > 0$ の場所では、斜面の傾きの変化による遠心力の反作用も垂直抗力に加わるので、すべらないための条件はさらにややこしくなる。

- 問題 2.
  ころがる場合は、モーメントのつりあいも考える必要があるが、ころがる物体 (通常は円柱や球) の慣性モーメント I_0 は、円柱 $(I_0 = mr^2/2)$ にしても球 $(I_0 = 2mr^2/5)$ にしても、小さいながらも半径 r を持つ物体であり、運動方程式はその物体の重心、すなわち斜面 $y = f(x)$ から距離 r だけ離れた点に対して考える必要があり、そのため重心の移動は $y = f(x)$ とは少し異なる軌跡となる。このような曲線の等距離曲線は、一般にはかなり厄介で、元の曲線が簡単な式であっても等距離曲線はかなり難しい式になることが多い。

- 問題 3.
  物体の半径 r を無視せずに正の値と考える場合、斜面の曲率 $1/\rho$ にも制限がつく。物体が常に 1 点で接する状態でないと、滑らかな運動にはならないし、運動が止まる可能性もあるので、曲率半径 ρ は r より大きくなければならない。

以上の問題点を考慮に入れ、改めて運動方程式から検討し直す。

物体と斜面との接点は今まで通り $(x(t), y(t))$ (点 $\mathrm{P}(t)$) とし、物体の重心を $(X(t), Y(t))$ (点 $\mathrm{Q}(t)$) と書くことにする (図 12)。物体の回転半径を r、慣性モーメントを $I_0 = b_0 mr^2$

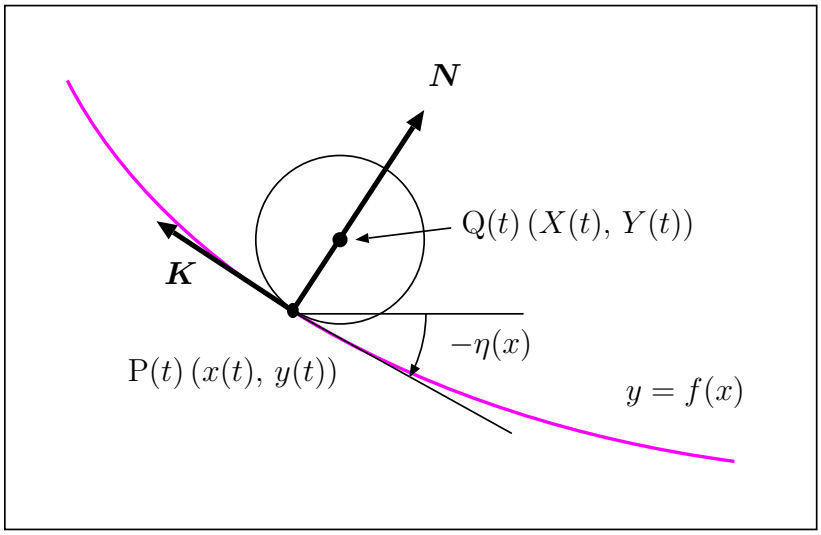

図 12: ころがる場合

とする。b_0 は円柱ならば $1/2$、球ならば $2/5$ なので $0 < b_0 < 1$ の定数としておく。

初速度は 0 とし、境界条件は、$\mathrm{P}(t)$ に対して成り立つとしておく。

$$
\begin{aligned}
&(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (\dot{X}(0), \dot{Y}(0)) = 0, \\
&(x(0), y(0)) = (0, H), \quad (x(T), y(T)) = (L, 0)
\end{aligned}
\tag{85}
$$

まず、$\mathrm{Q}(t)$ は $\mathrm{P}(t)$ から見て斜面の垂直方向にあるので、その関係は

$$(X(t), Y(t)) = (x(t), y(t)) + \frac{(-f'(x(t)), 1)}{\sqrt{1 + (f'(x(t)))^2}}\, r \tag{86}$$

となる。運動方程式は、重心に対して立てると、

$$m(\ddot{X}, \ddot{Y}) = m(0, -g) + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{K} \tag{87}$$

であり、$\boldsymbol{N}$ は垂直抗力、$\boldsymbol{K}$ は $\mathrm{P}(t)$ に働く静止摩擦力で、$\boldsymbol{N}$ は斜面の垂直方向、$\boldsymbol{K}$ は接線方向なので、$N = |\boldsymbol{N}|$, $K = |\boldsymbol{K}|$ とすれば

$$\boldsymbol{N} = \frac{(-f', 1)}{\sqrt{1 + (f')^2}}\, N, \quad \boldsymbol{K} = -\frac{(1, f')}{\sqrt{1 + (f')^2}}\, K \tag{88}$$

となり、問題 1 で述べたように静止摩擦力は、最大静止摩擦力 $\mu_0 N$ よりも小さくなくてはならない。

$$K < \mu_0 N \tag{89}$$

一方、回転に対する運動方程式は、β を回転の角加速度とすれば

$$I_0 \beta = rK \tag{90}$$

となる。これを少し細かく見てみる。出発時からの回転角を $\psi = \psi(t)$ とし (時計回り)、ω をその角速度とすると、

$$\omega = \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}, \quad \beta = \dot{\omega} = \ddot{\psi}$$

となる。直線斜面ではないのでこの ψ もやや複雑であるが、それを求めるため、各 x での斜面の仰角を $\eta = \eta(x)$ (反時計回り) とする $(-\pi/2 < \eta < \pi/2)$。

$$\eta = \eta(x) = \arctan f'(x) \tag{91}$$

少なくとも $x = 0$ では $\eta(0) < 0$ となる。

出発点で $\mathrm{A}(0, H)$ と接していた円周上の点を R_0、$(x, f(x))$ での円周上の接点を R_1 とすると (図 13)、A から $(x, f(x))$ までの曲線路の長さ s は

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + (f')^2}\, dx$$

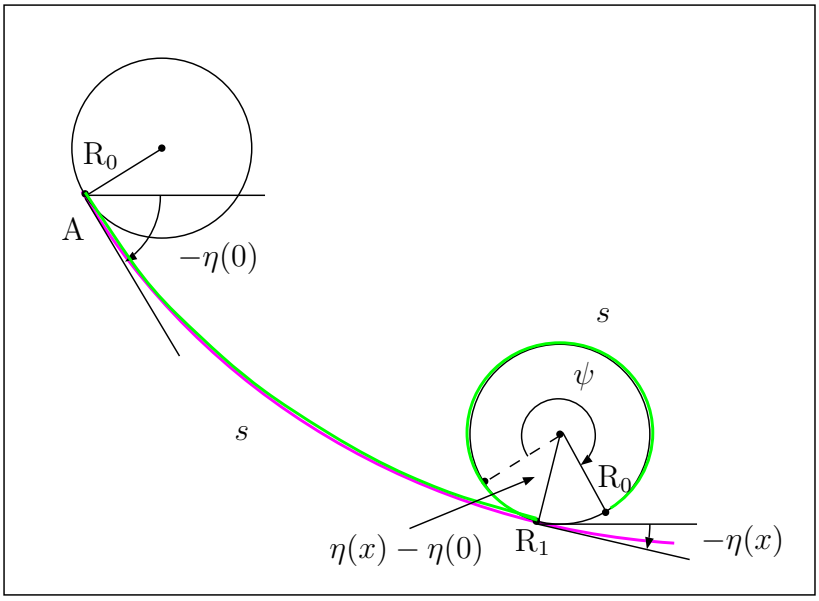

図 13: 回転角と斜面の角度の関係

であり、これは円周上の $\mathrm{R}_0\mathrm{R}_1$ の弧長に等しい。回転角 $\psi(x)$ は、その弧の中心角から、斜面の垂直方向の角度の差 $(\eta(x)-\eta(0))$ を引いたものになるので、

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{s}{r} - (\eta(x)-\eta(0)) \\ &= \frac{1}{r}\int_0^x \sqrt{1+(f')^2}\,dx - \arctan f'(x) + \arctan f'(0) \end{aligned} \tag{92}$$

となる。よって、角速度 ω は

$$\omega = \dot{\psi} = \frac{d\psi}{dx}\dot{x} = \left(\frac{\sqrt{1+(f')^2}}{r} - \frac{f''}{1+(f')^2}\right)\dot{x} = \frac{\sqrt{1+(f')^2}}{r}\left(1-\frac{r}{\rho}\right)\dot{x} \tag{93}$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f''}{(1+(f')^2)^{3/2}} \tag{94}$$

は曲線 $y=f(x)$ の曲率、ρ は曲率半径である。本節冒頭の問題 3 より $r<\rho$ でないといけないから (93) の係数 $(1-r/\rho)$ は正となる。

次に、今までと同様に、(87) から N を消去してエネルギー保存の式を導くことを考える。(87) を成分でみると、

$$\begin{cases} \ddot{X} &= -\dfrac{f'}{\sqrt{1+(f')^2}}\dfrac{N}{m} - \dfrac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\dfrac{K}{m}, \\ \ddot{Y}+g &= \dfrac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\dfrac{N}{m} - \dfrac{f'}{\sqrt{1+(f')^2}}\dfrac{K}{m} \end{cases}$$

なので、N, K を消去すると、それぞれ次の式が得られる。

$$\ddot{X} + (\ddot{Y} + g)f' = -\sqrt{1 + (f')^2}\,\frac{K}{m} \tag{95}$$

$$\ddot{X}f' - (\ddot{Y} + g) = -\sqrt{1 + (f')^2}\,\frac{N}{m} \tag{96}$$

この (95) をエネルギー保存則の形に変形することを考えるが、そのためにまず

$$\dot{Y}(t) = f'(x(t))\dot{X}(t) \tag{97}$$

が成り立つことを示す。(91) より $f'(x) = \tan\eta(x)$ なので、

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f')^2}} = \cos\eta, \quad \frac{f'}{\sqrt{1 + (f')^2}} = \sin\eta$$

と書け、よって (86) より

$$(X, Y) = (x, y) + \frac{(-f', 1)}{\sqrt{1 + (f')^2}}\,r = (x, y) + r(-\sin\eta, \cos\eta)$$

となるから、

$$(\dot{X}, \dot{Y}) = (\dot{x}, \dot{y}) - r(\cos\eta, \sin\eta)\dot{\eta} = \dot{x}(1, f') - r\dot{\eta}\,\frac{(1, f')}{\sqrt{1 + (f')^2}} \tag{98}$$

となり、これは $(1, f')$ に平行なので、確かに (97) が成り立つことがわかる。

なお、

$$\dot{\eta} = (\arctan f')^{\cdot} = (\arctan f')'\dot{x} = \frac{f''\dot{x}}{1 + (f')^2}$$

なので、(98) の重心の移動速度 $\boldsymbol{V} = (\dot{X}, \dot{Y})$ は、

$$\boldsymbol{V} = (\dot{X}, \dot{Y}) = \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)\dot{x}(1, f') = \left(1 - \frac{r}{\rho}\right)\boldsymbol{v} \tag{99}$$

となる。これと (93)、および $1 - r/\rho > 0$ より、

$$r\omega = \sqrt{1 + (f')^2}\,\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)\dot{x} = |\boldsymbol{v}|\left(1 - \frac{r}{\rho}\right) = |\boldsymbol{V}| \tag{100}$$

もわかる。

さて、(95) に戻るが、この式を $\dot{X}$ 倍すると、(97) より、

$$\dot{X}\ddot{X} + \dot{Y}\ddot{Y} + g\dot{Y} = -\dot{X}\sqrt{1+(f')^2}\,\frac{K}{m} = -\sqrt{\left(\dot{X}\right)^2 + \left(\dot{Y}\right)^2}\,\frac{K}{m} = -|\boldsymbol{V}|\frac{K}{m} \qquad (101)$$

となるが、この右辺と回転エネルギー $I_0\omega^2/2$ との関係を見てみる。このエネルギーを m で割ったものを t で微分すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2m}I_0\omega^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{b_0 r^2}{2}\omega^2\right) = b_0 r^2\omega\dot{\omega}$$

であり、(90) より

$$\frac{K}{m} = \frac{I_0\beta}{mr} = b_0 r\dot{\omega}$$

なので、(100) より

$$b_0 r^2\omega\dot{\omega} = b_0 r\dot{\omega} r\omega = \frac{K}{m}|\boldsymbol{V}|$$

となる。よって、結局 (101) は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2 + gY + \frac{1}{2m}I_0\omega^2\right) = 0 \qquad (102)$$

と変形できることがわかる。これは運動エネルギーと位置エネルギーと回転エネルギーの総和が保存されることを意味する (物理学なら、むしろここからスタートするだろう)。

これを積分すれば、

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{V}|^2 + gY + \frac{1}{2m}I_0\omega^2 = gY(0) \qquad (103)$$

となる。ここで、

$$Y(0) = y(0) + \frac{r}{\sqrt{1+(f'(0))^2}} = H + \frac{r}{\sqrt{1+(f'(0))^2}} \qquad (104)$$

である。(100) より、

$$\frac{1}{2m}I_0\omega^2 = \frac{b_0}{2}r^2\omega^2 = \frac{b_0}{2}|\boldsymbol{V}|^2$$

なので、(103) は、

$$\frac{1+b_0}{2}|\boldsymbol{V}|^2 + gY = gY(0)$$

となり、これは

$$|\boldsymbol{V}| = \sqrt{\frac{2g}{1+b_0}(Y(0)-Y)} \tag{105}$$

と変形できるが、(99) より

$$\begin{aligned} Y &= y + \frac{r}{\sqrt{1+(f')^2}} = f(x) + \frac{r}{\sqrt{1+(f')^2}}, \\ |\boldsymbol{V}| &= \left(1-\frac{r}{\rho}\right)|v| = \left(1-\frac{r}{\rho}\right)\sqrt{1+(f')^2}\,\dot{x} \end{aligned}$$

なので、

$$\dot{x} = \frac{1}{\left(1-\frac{r}{\rho}\right)\sqrt{1+(f')^2}}\sqrt{\frac{2g}{1+b_0}\left(Y(0)-f(x)-\frac{r}{\sqrt{1+(f')^2}}\right)}$$

と書ける。よって、A から B までころがり落ちる時間 T は

$$T = \int_0^L \sqrt{\frac{1+b_0}{2g}}\frac{(1-r/\rho)\langle f'\rangle}{\sqrt{Y(0)-f-r/\langle f'\rangle}}\,dx \tag{106}$$

と表わされることになる。ρ は (94) の式で f' と f'' で与えられるため、この右辺の被積分関数は $F(f,f',f'')$ の形をしていることがわかる。よって、この積分の最小値を与える関数 f がころがる場合の最速降下線となる。

なお、ここまでは $r>0$ であるとして、重心が曲線上にないとして方程式を考えてきたが、通常のように r が十分小さいとして無視する、すなわち $r\to+0$ としてみると、(106) は

$$T = \int_0^L \sqrt{\frac{1+b_0}{2g}}\frac{\langle f'\rangle}{\sqrt{H-f}}\,dx \tag{107}$$

となり、これはすべる場合の時間 (11) と $\sqrt{1+b_0}$ 倍の違いしかないことがわかる。よって、その場合の最速解はやはり逆さサイクロイドとなる。しかし、それは出発点の傾きが $-\infty$ になってしまい、本節の最初に述べた問題 1 の条件を考えればその逆さサイクロイドの解は適切ではない。

この、 $r=0$ と見た場合に、(89) の条件を満たす最速解があるかどうかはよくわからない。

さて、$r>0$ の場合に戻って、(106) の変分を考える。f が右辺の積分の最小値を与える解であるとき、$0, L$ の付近で 0 となる ϕ に対して、

$$I(f+\delta\phi) = \int_0^L F(f+\delta\phi, f'+\delta\phi', f''+\delta\phi'')\,dx$$

は、$\delta = 0$ で極小となるから、

$$\left.\frac{dI(f+\delta\phi)}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \int_0^L (F_f\phi + F_{f'}\phi' + F_{f''}\phi'')\,dx = 0$$

となる。よって部分積分をすれば、

$$\int_0^L \left(F_f - (F_{f'})' + (F_{f''})''\right)\phi\,dx = 0$$

となるので、この場合のオイラー方程式は、

$$F_f - (F_{f'})' + (F_{f''})'' = 0 \tag{108}$$

となることがわかる。やや複雑だが、(106) に対してこの式を計算してみる。なお、F に定数倍として含まれている $\sqrt{(1+b_0)/(2g)}$ の部分はもちろん無視してよい。(94) より F は f'' に関して 1 次式なので

$$F = \frac{(1-r/\rho)\langle f'\rangle}{\sqrt{Y(0)-f-r/\langle f'\rangle}} = f''\hat{F}(f,f') + \hat{G}(f,f')$$

として計算を行う。ここで、

$$\hat{F}(f,f') = -r\langle f'\rangle^{-2}S^{-1/2},\ \ \hat{G}(f,f') = \langle f'\rangle S^{-1/2},\ \ S = Y(0) - f - r\langle f'\rangle^{-1} \tag{109}$$

である。

(108) の左辺は F に関して線形だから、$\hat{F}$ に関する式 ($= U_1$ とする) と $\hat{G}$ に関する式 ($= U_2$ とする) の和に分けることができ、まずそのそれぞれを計算してみる。U_2 は

$$U_2 = \hat{G}_f - \left(\hat{G}_{f'}\right)'$$

となるが、これは 4 節の (18) を導くところで見たように、f' 倍すれば

$$f'U_2 = \left(\hat{G} - f'\hat{G}_{f'}\right)'$$

と変形できる。一方 U_1 は、

$$U_1 = f''\hat{F}_f - \left(f''\hat{F}_{f'}\right)' + \left(\hat{F}\right)'' \tag{110}$$

となるが、

$$f''\hat{F}_{f'} = f''\hat{F}_{f'} + f'\hat{F}_f - f'\hat{F}_f = (\hat{F})' - f'\hat{F}_f$$

と変形すれば、

$$U_1 = f''\hat{F}_f - \left((\hat{F})' - f'\hat{F}_f\right)' + \left(\hat{F}\right)'' = f''\hat{F}_f + \left(f'\hat{F}_f\right)'$$

となるから、これを f' 倍すれば

$$f'U_1 = f'f''\hat{F}_f + f'\left(f'\hat{F}_f\right)' = \left((f')^2\hat{F}_f\right)' \tag{111}$$

となることがわかる。結局、(108) を f' 倍したものは、

$$\left((f')^2\hat{F}_f + \hat{G} - f'\hat{G}_{f'}\right)' = 0$$

と書けることになり、よって

$$(f')^2\hat{F}_f + \hat{G} - f'\hat{G}_{f'} = \text{定数} \tag{112}$$

と積分できる。今の場合、

$$S_f = -1, \quad S_{f'} = r\langle f'\rangle^{-2}\frac{f'}{\langle f'\rangle} = rf'\langle f'\rangle^{-3}$$

なので、

$$\begin{aligned}
(f')^2\hat{F}_f &= -r(f')^2\langle f'\rangle^{-2}\frac{1}{2}S^{-3/2}, \\
\hat{G}_{f'} &= \frac{f'}{\langle f'\rangle}S^{-1/2} + \langle f'\rangle\left(-\frac{1}{2}\right)S^{-3/2}rf'\langle f'\rangle^{-3} \\
&= f'\langle f'\rangle^{-1}S^{-1/2} - \frac{1}{2}rf'\langle f'\rangle^{-2}S^{-3/2}, \\
\hat{G} - f'\hat{G}_{f'} &= \langle f'\rangle S^{-1/2} - (f')^2\langle f'\rangle^{-1}S^{-1/2} + \frac{1}{2}r(f')^2\langle f'\rangle^{-2}S^{-3/2} \\
&= \langle f'\rangle^{-1}S^{-1/2} + \frac{1}{2}r(f')^2\langle f'\rangle^{-2}S^{-3/2}
\end{aligned}$$

となり、結局 (112) は、

$$\langle f'\rangle^{-1}S^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+(f')^2}}\frac{1}{\sqrt{Y(0) - f - r/\langle f'\rangle}} = \text{定数} \tag{113}$$

だけが残る。ここで、$Y(0) - f(x) = h(x)$ とすれば、

$$(1+(h')^2)\left(h - \frac{r}{\langle h'\rangle}\right) = c_0 \tag{114}$$

と、(20) に対応した h の 1 階変数分離形の方程式が得られることになる。しかし、これを積分して h を x の式で表すのは容易ではない。

(114) を展開すれば、

$$h\langle h'\rangle^2 - r\langle h'\rangle - c_0 = 0$$

となるが、$h > 0$, $c_0 > 0$, $r > 0$, $\langle h'\rangle > 0$ より、

$$\langle h'\rangle = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4c_0 h}}{2h}$$

となり、

$$(h')^2 = \left(\frac{r + \sqrt{r^2 + 4c_0 h}}{2h}\right)^2 - 1 = \frac{2r^2 + 4c_0 h - 4h^2 + 2r\sqrt{r^2 + 4c_0 h}}{4h^2}$$

となるので、

$$h' = \pm\frac{\sqrt{2r^2 + 4c_0 h - 4h^2 + 2r\sqrt{r^2 + 4c_0 h}}}{2h}$$

が得られる。しかし、見てわかるように、この方程式の求積は容易ではない。

なお、$Y(0)$ は (104) で与えられるので、

$$h(0) - \frac{r}{\langle h'(+0)\rangle} = Y(0) - f(0) - \frac{r}{\langle f'(0)\rangle} = 0$$

となるから、(114) を展開した

$$\langle h'\rangle h = r + \frac{c_0}{\langle h'\rangle}$$

で $x \to +0$ とすると $h'(+0) = \infty$ でなければいけないことがわかる。つまり、この (114) の解による f は $f'(+0) = -\infty$ となり、やはり問題 1 の条件は満たさない。

すなわち、ころがりの問題を考えると、変分法で得られる関数は問題 1 の条件に適する解にはならないので、問題 1 を満たしながら (106) を最小にする解は存在しない可能性もあるが、よくはわからない。問題 1 の条件を満たすような解を存在させるためには、例えば 11 節のように、正の初速度を与える必要があるかもしれない。

また上では、斜面上の接点 $\mathrm{P}(t)$ $(x(t), y(t))$ の軌跡に関する方程式を考えたが、その解に対する重心 $\mathrm{Q}(t)$ $(X(t), Y(t))$ の軌跡をついでに考えてみよう。

その軌跡が $Y(t) = \xi(X(t))$ で表されるとすると、これを t で微分すれば、

$$\dot{Y}(t) = \xi'(X(t))\dot{X}(t)$$

となるが、(97) より、

$$\xi'(X(t)) = f'(x(t)) \tag{115}$$

であることがわかる。また、(86) より

$$Y(t) = \xi(X(t)) = y(t) + \frac{r}{\sqrt{1+(f'(x(t)))^2}} = f(x(t)) + \frac{r}{\sqrt{1+(f'(x(t)))^2}}$$

なので、これらを (113) に代入すると

$$(1+(\xi')^2)(Y(0)-\xi) = c_0 \tag{116}$$

となるので、よって $\gamma(x) = Y(0) - \xi(x)$ とすれば γ は (20) と同じ方程式を満たし、γ はサイクロイド (の $c_0/2$ 倍) を平行移動したものになることがわかる。

すなわち、ころがる場合のオイラー方程式の解は、重心が逆さサイクロイドを平行移動した軌道を取り、斜面はそこから距離 r だけ下に離れた等距離曲線となる。もちろん、問題 1 の条件を満たさない問題があるので、これにより最速解が決定したとは言いづらいが、問題 1、すなわち条件 (89) を無視すればこれが解となる。

実は、重心の軌道がサイクロイドとなることは、式 (105) からも示唆される。

なお、この等距離曲線、すなわちサイクロイド $y = \alpha\mathrm{cyc}(x/\alpha)$ から r だけ上に離れた曲線を表す式 (h の方) を以下で求めてみる (図 14)。このサイクロイド

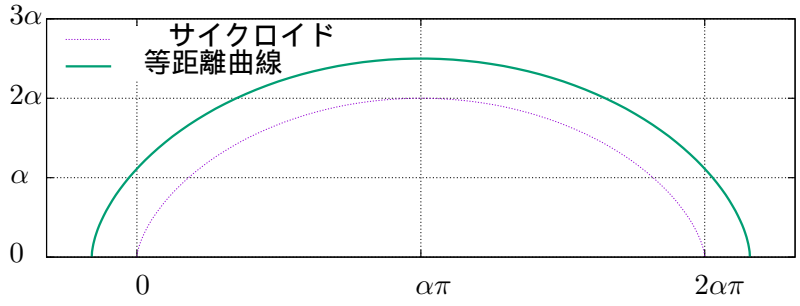

図 14: サイクロイドの等距離曲線

$$\begin{cases} y &= \alpha(1-\cos\theta) \\ x &= \alpha(\theta - \sin\theta) \end{cases} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

の、パラメータ θ に対応する点での傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

なので、その法線方向は

$$(-\sin\theta,\ 1-\cos\theta) = 2\sin\frac{\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

となる。よって、サイクロイドから r だけ上に離れた関数は、

$$\begin{cases} x &= \alpha(\theta-\sin\theta) - r\cos\dfrac{\theta}{2} \\ y &= \alpha(1-\cos\theta) + r\sin\dfrac{\theta}{2} \end{cases} \qquad (0\le\theta\le 2\pi) \tag{117}$$

とパラメータ表示されることがわかる。これを $y=u(x)$ と書くことにする。

この $u(x)$ が、実際に $h=u(x)$ として方程式 (114) を満たすことを示そう。

$$u' = \frac{du/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\alpha\sin\theta + \dfrac{r}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{\alpha(1-\cos\theta)+\dfrac{r}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}} = \frac{\left(2\alpha\sin\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{r}{2}\right)\cos\dfrac{\theta}{2}}{\left(2\alpha\sin\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{r}{2}\right)\sin\dfrac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$$

より、

$$1+(u')^2 = 1+\cot^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{2}{1-\cos\theta}$$

となるので、

$$u - \frac{r}{\langle u'\rangle} = \alpha(1-\cos\theta) + r\sin\frac{\theta}{2} - r\sin\frac{\theta}{2} = \alpha(1-\cos\theta)$$

となり、よって

$$(1+(u')^2)\left(u-\frac{r}{\langle u'\rangle}\right) = 2\alpha$$

となるので、$\alpha = c_0/2$ の α に対して $u(x)$ は (114) を満たす解となる。あとは境界条件を満たすよう適宜平行移動すれば、問題 1 の条件を無視したものではあるが、(106) を最小化する解が得られることになる。

13 最後に

1 節にも書いたが、テレビで何度か「直線よりもサイクロイドの方が速いんですよ」という実験を紹介しているものを見たことがある。しかし、その曲線は $x=0$ では傾き

が有限で (垂直ではない)、かつ初速度は 0 だった。だから、多分正確には最速降下線ではなかっただろう。もしかしたらサイクロイドでもなかったのかもしれない。サイクロイドを滑り台にすれば、すごく早く落ちるんです、とも言っていたように記憶しているが、実際に最速降下の $\theta = 0$ からの逆さサイクロイドを滑り台にしたら、出発点が垂直なので、多分子供は怖がって誰も滑ろうとはしないだろう。

12 節のころがる場合の最速降下線は、問題 1 の話を除けば重心が逆さサイクロイドになる、ということがわかったが、これは多分かなり難しいだろうと思ったのでやや意外であった。ただ、問題 1 の条件を考える場合は、「不等式による制限付き変分問題」となり、多分かなり難しい問題になると思われるが、その方面 (変分法、最適問題) の専門家ではないのでよくはわからない。

なお、今回これを書いている途中で、あらためて検索してみたら色々な解説、論文に出くわした。特に「brachistocrone」(最速降下線) で検索すると、今でも研究対象になっているのか割と最近の論文まで出てくることに驚いた。元々最速降下線の問題は、ベルヌーイ、ニュートン、ライプニッツらの 17 世紀の時代の問題なので、とっくに解ける問題とそうでないものが区別された枯れた分野なのかと思っていたが、そうでもないのかもしれない。当然私はその方面の専門家ではないので、どこまでが解かれていて、どこからが知られていないのかはよくはわからない。

最後に、参考文献をいくつか紹介しておく。

[1], [2], [4] は、最速降下線の変分問題の標準的な解説であるが、[2] はフェルマーの原理との関係や最小性の証明など、かなり詳しい話が書いてあり、関連問題や参考文献なども丁寧に紹介している。その問題のいくつかは個人的にも興味があり、また機会があれば計算してみたいと考えている。

[3], [5] は、サイクロイドの等時性やサイクロイド振り子の解説であるが、[5] には歴史の話やホイヘンスのサイクロイド時計の図なども紹介されている。

[6], [7] は、シュワルツの不等式を利用したサイクロイドが最速解であることの初等的な証明であるが、9 節で説明したように、[7] の方がやや一般的である。なお、[7] には、[6] の証明は知らずに書いた、と書かれている。

[8] は Mathematica という数式処理ソフトを作っている Wolfram という会社のサイトであり、数学の色々な話題を取り上げている中に最速降下線の話もあった。ただし、10 節にも書いたように、ここに書かれている「摩擦を入れた方程式の解」はあくまで近似的なものである。

[9] には、最速降下線の問題に摩擦、空気抵抗の考察を入れた話が書かれているが、純粋に変分法というよりはフェルマーの原理で押しているようで、ちょっと内容は良く把握できなかった。

[10] には、丁度 12 節と同じ話が書いてある (私もこれを書いてから知った)。

また、丁度今月号 (2016 年 1 月号) の「数学セミナー」の特集記事が変分学で、[11] に最速降下線の問題が書かれている。著者は変分法に関する本も書いている方で、短い

解説であるが、[6] なども紹介していてやや詳しい。

参考文献

[1] 西山豊、「最速降下問題」
http://www.osaka-ue.ac.jp/zemi/nishiyama/math2010j/cycloid_j.pdf

[2] 佃修一、「最速降下線 (Brachistocrone)」2004 年 10 月
http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/kaihoussh.pdf

[3] CO、「サイクロイド振り子」(2005-03-14)
http://hooktail.sub.jp/mechanics/cycloidpendulum/index.pdf
(物理のかぎしっぽサイト)

[4] Joh、「最速降下曲線」(2005-03-28)
http://hooktail.sub.jp/mathInPhys/brachisto/index.pdf
(物理のかぎしっぽサイト)

[5] 斎藤基彦、「サイクロイドと等時性」
http://www.geocities.jp/saitohmoto/physics/cycloid/cycloid.html

[6] D.C.Benson, An elementary solution of the brachistochrone problem, American Mathematical Monthly **76** (1969), 890-984

[7] E.Balder, The brachistochrone problem made elementary,
http://www.staff.science.uu.nl/~balde101/talks/vanbeek.pdf
(2002)

[8] "Brachistochrone Problem", (Wolfram Mathworld),
http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html

[9] A.S.Parnovsky, Some generalisations of brachistochrone problem, Acta Physica Polonica-Series A General Physics **93**, (1998), 55-64
http://www.ifpan.edu.pl/firststep/aw-works/fsV/parnovsky/

[10] V.P.Legeza, Brachistochrone for a rolling cylinder, Mechanics of Solids **45**, (2010) 27-33
http://hades.mech.northwestern.edu/images/e/e6/
Legeza-MechofSolids2010.pdf

[11] 高桑昇一郎、「変分法への入門」、数学セミナー **1**, (2016) 8-12