2012 年 4 月 13 日

連続曲線の交点

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

たいていの微積分の教科書には、連続関数の性質として、中間値の定理が紹介されている。

定理 1 (中間値の定理)

閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ は、その内部で $f(a)$ と $f(b)$ の間のすべての値を、少なくとも一度は取る。特に、$f(a)f(b)<0$ であれば ($f(a)$ と $f(b)$ が異符号)、$f(c)=0$ となるような c ($a<c<b$) が存在する。

これは、連続曲線の始点と終点が直線 $y=0$ の両側にあるとき、その曲線が必ずその直線と交わる、と見ることもできる。実際に以下を示すことは容易である。

命題 2

平面内の連続曲線 C の始点と終点が、同じ平面内の直線 ℓ のそれぞれ別の側にあるとき、C と ℓ とは交点を持つ。

ここで、連続曲線とは以下のようなものであると定義する:

> $x(t)$, $y(t)$ が閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数のとき、
>
> $$(x,y)=(x(t),y(t))\quad (a\le t\le b) \tag{1}$$
>
> で表される点の集合と $x(t)$, $y(t)$ をセットにして考えたものを **連続曲線** と呼び、$(x(a),y(a))$ を**始点**、$(x(b),y(b))$ を**終点** と呼ぶ。

(1) は、曲線の媒介変数表示と呼ばれるが、曲線 (の点集合) に対して媒介変数表示は一意ではなく、例えば逆向きの媒介変数表示

$$(x,y)=(x(-s),y(-s))\quad (-b\le s\le -a)$$

などもあるが、この場合は始点と終点が逆になってしまうので、ここでは媒介変数表示を一つ固定し、それを合わせて曲線と考えることにする。

連続曲線は、回転しても平行移動しても連続曲線なので、命題 2 は、連続曲線と x 軸 $(y=0)$ の関係に直して考えることができ、結局 $y=y(t)$ に対する中間値の定理によって命題 2 が成り立つことが示される。

ところが、命題 2 の直線の方もまた連続曲線である場合、すなわち連続曲線同士の交点の存在となるとどうであろうか。連続曲線にはペアノ曲線など、かなり複雑なものがあることも知られていて、例えば Jordan の閉曲線定理のように、「連続」という仮定しかないような曲線の性質の証明は結構難しい。

本稿では、その連続曲線同士の交点について考察する。

2 問題

問題を定式化すると、以下のようになる。

問題 1 平面上の正方形 ABCD 内に、A を始点とし C を終点とする連続曲線 C_1 と B を始点とし D を終点とする連続曲線 C_2 がある場合、その両者は ABCD 内に必ず交点を持つか。

もちろん、始点や終点の配置はより一般な形にも設定できるが、それを含むような正方形を取り、それらの始点や終点を正方形の頂点に延長 (延長線が交差しないように) することで、多くの問題は上の問題に帰着させることができるだろう。

さらに、適当な拡大・縮小や回転、平行移動により、正方形 ABCD は $[0,1]\times[0,1]$ と見ることができるので、以下のように連続関数を使って問題 1 を定式化できる。

問題 2 閉区間 $[0,1]$ 上の 4 つの連続関数 $x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t)$ があり、

$$\begin{aligned} &(x_1(0),y_1(0))=(0,0),\quad (x_1(1),y_1(1))=(1,1),\\ &(x_2(0),y_2(0))=(0,1),\quad (x_2(1),y_2(1))=(1,0) \end{aligned} \tag{2}$$

のとき、

$$(x_1(t_0),y_1(t_0))=(x_2(s_0),y_2(s_0))$$

となるような t_0, s_0 $(0<t_0<1,\ 0<s_0<1)$ が存在するか。

感覚的には、交点は明らかに存在するだろうと思われるし、Jordan の閉曲線定理よりは易しいが、こちらは自己交差を許すような曲線なので、Jordan の定理をそのまま使うことはできない。

また、中間値の定理が使えそうな気もするが、こちらは t_0, s_0 の 2 つの値の存在が問題なので、単純に中間値の定理だけではうまくはいかない。

ということで、ここでは問題 2 を、ブラウアーの不動点定理を用いて考えることにする。

3 ブラウアーの不動点定理と中間値の定理

ブラウアーの不動点定理は、以下のようなものである。

定理 3 (ブラウアーの不動点定理)

$D=[0,1]^n$ (n 次元の立方体) に対して、$f:\ D\rightarrow D$ が連続写像であるとき、f は D 内に不動点を持つ。すなわち、$f(x)=x$ となる $x\in D$ が存在する。

実はこの定理は、1 次元 ($n=1$) では中間値の定理と同等である。まず、それを紹介する。

$n=1$ の場合は、ブラウアーの定理の f は $f:[0,1]\rightarrow[0,1]$ の連続関数なので、中間値の定理からブラウアーの不動点定理を示すのは易しい。すなわち、この f に対して、$g(x)=f(x)-x$ とすれば、

$$g(0)=f(0)\geq 0,\quad g(1)=f(1)-1\leq 0$$

であり、もしこれらの一方で等号が成り立てばそれが明らかに f の不動点を与えているし、いずれも等しくなければ、$g(0)g(1)<0$ となるので、中間値の定理により $g(c)=0$ となる c $(0<c<1)$ が存在し、これが f の不動点となる。

問題はこの逆であるが、f を $[a,b]$ 上の連続関数とし、$f(a)>f(b)$ であるとする。中間値として、$f(a)>p>f(b)$ となる p を任意に取り、$f(c)=p$ となる c $(a<c<b)$ が存在するかどうかを考える。

まず、$[a,b]$ を $[0,1]$ と、および p を 0 としてよいことは容易にわかる。それは、必要ならば $f(x)$ の代わりに $h(t)=f(a+t(b-a))-p$ を考えればいいからである。よって、f は $[0,1]$ 上の連続関数で、$f(0)>0>f(1)$ であるとする。

次に、

$$g(x) = g(x;\epsilon) = x + \epsilon f(x) \tag{3}$$

とすると ($\epsilon > 0$)、ϵ を十分小さくとれば、すべての $x \in [0,1]$ に対して $0 \leq g(x) \leq 1$ となることを示す。

もしそうでなければ、どんな $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対しても $g(x; 1/n) = x + f(x)/n$ が $[0,1]$ に収まることはないので、

$$x_n + \frac{1}{n} f(x_n) \notin [0,1]$$

となるような点列 $\{x_n\} \subset [0,1]$ が存在することになるが、この場合、$x_n + f(x_n)/n$ は 1 より大きいか、0 より小さいかのどちらかなので、1 より大きくなるような x_n 全体と、0 より小さくなるような x_n 全体の、少なくとも一方は無限点列となる。

もし、

$$x_n + \frac{1}{n} f(x_n) > 1 \tag{4}$$

となる x_n が無限に存在するとすると、f は $[0,1]$ 上の連続関数なので有界だから、その点列の極限を考えれば (4) より

$$1 \geq x_n > 1 - \frac{1}{n} f(x_n) \to 1$$

となるので、x_n は 1 に収束することになる。よって、仮定より $f(1) < 0$ なので、$f(x_{n_0}) < 0$ となる n_0 が取れるはずであるが、(4) より

$$0 > f(x_{n_0}) > n_0(1 - x_{n_0}) \geq 0$$

となるので矛盾となる。

$$x_n + \frac{1}{n} f(x_n) < 0 \tag{5}$$

となる x_n が無限に存在するとしても、

$$0 \leq x_n < -\frac{1}{n} f(x_n) \to 0$$

より $x_n \to 0$ となり、$f(0) > 0$ なので $f(x_{n_0}) > 0$ となる n_0 が存在することになり、(5) より

$$0 < f(x_{n_0}) < -n_0 x_{n_0} \leq 0$$

となるので矛盾となる。

よって、ϵ を十分小さくとれば、すべての $x \in [0,1]$ に対して $0 \leq g(x) \leq 1$ となることがわかり、これにより g は $[0,1]$ から $[0,1]$ への連続関数となるから、ブラウアーの不動点定理を $g(x)$ に適用すれば、$g(c) = c$ となる $c \in [0,1]$ が存在することが言えることになり、

$$g(c) = c + \epsilon f(c) = c$$

より $f(c) = 0$ となる。$f(0) > 0 > f(1)$ なので、もちろん c は $0 < c < 1$ となるから、これでブラウアーの定理から中間値の定理が言えたことになる。

なお、$f(a) < f(b)$ の場合も同様であり、ϵ を $-\epsilon$ に変えて同じ議論をすればよい。

4 連続曲線の交点

前節と同様の方法で、2 次元のブラウアーの不動点定理を用いて、問題 2 を考えることにする。問題 2 の $(x_1(t), y_1(t))$ で表される曲線を C_1、$(x_2(s), y_2(s))$ で表される曲線を C_2 と書くこととし、2 変数関数 $X(s,t), Y(s,t)$ を

$$\left\{ \begin{array}{lll} X(s,t) & = X(s,t;\epsilon) & = s - \epsilon(x_2(s) - x_1(t)) + \epsilon(y_2(s) - y_1(t)), \\ Y(s,t) & = Y(s,t;\delta) & = t + \delta(x_2(s) - x_1(t)) + \delta(y_2(s) - y_1(t)) \end{array} \right. \tag{6}$$

と定める ($\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $s,t \in [0,1]$)。前節と同様に、ϵ, δ を十分小さく取れば、すべての $s,t \in [0,1]$ に対して、

$$0 \leq X(s,t) \leq 1, \quad 0 \leq Y(s,t) \leq 1 \tag{7}$$

となることを示すことが目標となる。もし、これが言えれば、2 次元のブラウアーの不動点定理を適用することで、

$$X(s_0,t_0) = s_0, \quad Y(s_0,t_0) = t_0$$

となる $s_0, t_0 \in [0,1]$ が存在し、そしてこれは (6) より明らかに

$$(x_1(t_0), y_1(t_0)) = (x_2(s_0), y_2(s_0))$$

を意味するので、C_1 と C_2 の交点の存在が示されることになる。

なお、今後は (7) を示すわけであるが、そのために C_1 と C_2 の交点が存在しない、と仮定してよいことに注意する。つまり、背理法で考え、C_1 と C_2 の交点が存在しないと仮定するとき、(7) が十分小さい ϵ, δ に対して言えてくれれば、上の論法でブラウアーの定理により交点の存在が言えてしまうので矛盾、となるからである。

前節と同じ論法で、もし $0 \leq X(s,t) \leq 1$ が言えないとすると、$X(s_n, t_n; 1/n) > 1$ か、$X(s_n, t_n; 1/n) < 0$ となる点列 $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ が取れることになるが、まず $X(s_n, t_n; 1/n) > 1$ となる n が無限にある場合を考えると、x_j, y_j は有界であるから、

$$X(s_n, t_n) = s_n + \frac{1}{n}(x_1(t_n) - x_2(s_n) + y_2(s_n) - y_1(t_n)) > 1 \tag{8}$$

より、

$$1 \geq s_n \geq 1 - \frac{1}{n}(x_1(t_n) - x_2(s_n) + y_2(s_n) - y_1(t_n)) \to 1$$

から $s_n \to 1$ が言える。一方、(8) より、

$$1 \geq x_1(t_n) - y_1(t_n) > (1 - s_n)n + x_2(s_n) - y_2(s_n) \geq x_2(s_n) - y_2(s_n)$$

であり、$s_n \to 1$ と (2) より $x_2(s_n) - y_2(s_n) \to 1$ となるので、よって $x_1(t_n) - y_1(t_n) \to 1$ となる。$\{t_n\}$ は有界無限点列であるから集積点を持ち、その集積点を $t_0 \in [0,1]$ とすれば、x_1, y_1 は連続であるから $x_1(t_0) - y_1(t_0) = 1$ となることが言える。これは、$x_1(t_0) = 1$, $y_1(t_0) = 0$ しかありえないが、この点 $(x_1(t_0), y_1(t_0)) = (1, 0)$ は C_1 上の点でかつ C_2 の終点であるから、両者の共有点となる。よって交点がないとしているので矛盾となる。

他の 3 通り ($X(s_n, t_n) < 0$, $Y(s_n, t_n) > 1$, $Y(s_n, t_n) < 0$) の場合も、同様の論法でいずれも (2) と x_j, y_j の連続性から矛盾が導きだせるので、結局 (7) とできることが言え、そこから連続曲線の交点の存在を示せることになる。

5 最後に

以前、周期関数に対するある性質を証明するのに問題 1 が成り立つ (交点が存在する) ことを使ったのであるが、ふと考えてみたら、実はあまり簡単でもないことに気がつ

いた。

色々考えて、本稿のようなブラウアーの定理を使う証明を思いついたのであるが、必要な性質をすべて丁度使っていて、それなりにきれいな形になっているように思う。

ただ、ブラウアーの定理の簡単な応用例としてもそれなりに意味はあるように思うが、どこかの本にこの手の話は既に載っていそうな気もする。どなたかご存じであればご連絡頂きたい。