平成 17 年 9 月 23 日

CD の溝の長さについて

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

CD (compact disk) の溝の間隔は一定の幅になっているそうです。そこから CD の溝の総延長距離を計算することはできそうですが、2 通りの考えかたでやってみたら別な式が出てきました。

そのそれぞれの式を数値で検証したことも合わせて、ここにまとめておきます。

2 面積による考え方

溝の間隔を d として、CD の内径を r、外径を R、溝の総延長を L とします (図 1)。

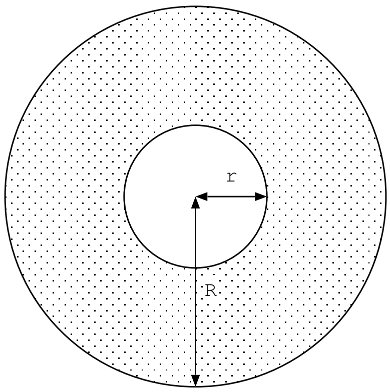

図 1: 内径と外径

CD の溝のある部分の面積は、半径 R の円の面積から半径 r の円の面積を引けば得られるので $\pi(R^2-r^2)$ です。

一方、溝を真っ直ぐに伸ばすと、長さ L、幅 d の細長い長方形ができますから面積は Ld、よって、

$$L=\frac{\pi(R^2-r^2)}{d} \tag{1}$$

となります。この式の右辺を L_1 とします。

3 らせんの弧長

溝は円のように回っていますが、実際には少しずつ半径が変化していて、一周すると d だけずれることになります。

最も内側からスタートするとして中心からの距離 ρ と回転角 θ の関係を考えてみます。角度の増加に対し均等に中心からの距離が増えると仮定すると、ρ は回転角 θ の一次式で表わされ

ます。一周で d だけ増えるわけですから、単位角度 (1 ラジアン) 辺りの ρ の増加は $d/2\pi$ となります。よって、$\theta = 0$ のとき $\rho = r$ とすれば ρ は

$$\rho = r + \frac{d}{2\pi}\theta \tag{2}$$

という式で表わされることになります。$\rho = R$ のときの θ は

$$R = r + \frac{d}{2\pi}\theta, \quad \theta = \frac{2\pi(R-r)}{d}$$

より、θ の動く範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi(R-r)/d$ となります。

一般に曲線上の点が $\rho = f(\theta)$ で表わされているとき、$\theta = a$ から $\theta = b$ の範囲の曲線の長さ L は次の式で求められます。

$$L = \int_a^b \sqrt{f(\theta)^2 + \{f'(\theta)\}^2}\, d\theta \tag{3}$$

この公式の説明は 4 節で行ないます。この公式より、L は以下のようになります。

$$L = \int_0^{2\pi(R-r)/d} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \{\rho'(\theta)\}^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi(R-r)/d} \sqrt{\left(r + \frac{d}{2\pi}\theta\right)^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2}\, d\theta$$

この式を置換積分で変形していきます。

$$\begin{aligned}
L &= \int_r^R \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d}{2\pi}\right)^2}\, \frac{2\pi}{d} d\rho \quad \left(r + \frac{d}{2\pi}\theta = \rho\right) \\
&= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d}{2\pi}\sqrt{\tan^2\phi + 1}\, \frac{d\phi}{\cos^2\phi} \\
&\quad \left(\rho = \frac{d}{2\pi}\tan\phi,\ \frac{d}{2\pi}\tan\phi_1 = r,\ \frac{d}{2\pi}\tan\phi_2 = R,\ 0 < \phi < \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{d}{2\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{\cos^3\phi} = \frac{d}{2\pi}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{\cos\phi\, d\phi}{(1-\sin^2\phi)^2} \\
&= \frac{d}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(1-t^2)^2} \quad (\sin\phi = t,\ \sin\phi_1 = t_1,\ \sin\phi_2 = t_2)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-t^2)^2} &= \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-t)(1+t)} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1+t)^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1+t)^2}
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(1-t^2)^2} dt \\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{1-t} - \frac{1}{4}\log|1-t| + \frac{1}{4}\log|1+t| - \frac{1}{4}\frac{1}{1+t} + C \\
&= \frac{1}{2}\frac{t}{(1-t)(1+t)} + \frac{1}{4}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{\sin\phi}{1-\sin^2\phi}+\frac{1}{4}\log\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}+C=\frac{1}{2}\frac{\sin\phi}{\cos^2\phi}+\frac{1}{4}\log\frac{(1+\sin\phi)^2}{1-\sin^2\phi}+C\\
&= \frac{1}{2}\frac{\tan\phi}{\cos\phi}+\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\phi}{\cos\phi}+C=\frac{1}{2}\frac{\tan\phi}{\cos\phi}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\cos\phi}+\tan\phi\right)+C\\
&= \frac{1}{2}\tan\phi\sqrt{1+\tan^2\phi}+\frac{1}{2}\log(\sqrt{1+\tan^2\phi}+\tan\phi)+C\\
&= \frac{1}{2}\frac{2\pi}{d}\rho\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d}\rho\right)^2}+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d}\rho\right)^2}+\frac{2\pi}{d}\rho\right)+C
\end{aligned}
$$

となります。結局、

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{d}{2\pi}\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{(1-t^2)^2}\\
&= \frac{d}{4\pi}\left[\frac{2\pi}{d}\rho\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d}\rho\right)^2}+\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d}\rho\right)^2}+\frac{2\pi}{d}\rho\right)\right]_{\rho=r}^{\rho=R}\\
&= \frac{d}{4\pi}\left\{\frac{2\pi}{d}R\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d}R\right)^2}-\frac{2\pi}{d}r\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d}r\right)^2}\right\}+\frac{d}{4\pi}\log\frac{\frac{2\pi}{d}R+\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d}R\right)^2}}{\frac{2\pi}{d}r+\sqrt{1+\left(\frac{2\pi}{d}r\right)^2}} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となることがわかります。この式の最後の右辺を L_2 とします。

4 曲線の長さの公式の説明

曲線の長さの公式 (3) の説明をします。

中心を原点とし、角度が 0 の方向を x 軸ととり、角度が $\pi/2$ 増加した方向を y 軸ととれば、$\rho=f(\theta)$ が意味する点は x,y 座標では

$$(x,y)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=(f(\theta)\cos\theta,f(\theta)\sin\theta)$$

となります。この最後の式を $(x(\theta),y(\theta))$ と書くことにします。

θ を非常に小さい値 $\Delta\theta$ だけ増やしたときの x,y の増加をそれぞれ Δx, Δy と書けば、

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= x(\theta+\Delta\theta)-x(\theta)=f(\theta+\Delta\theta)\cos(\theta+\Delta\theta)-f(\theta)\cos\theta\\
&= \{f(\theta)\cos\theta\}'\Delta\theta+O(\Delta\theta^2)=\{f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta\}\Delta\theta+O(\Delta\theta^2),\\
\Delta y &= y(\theta+\Delta\theta)-y(\theta)=f(\theta+\Delta\theta)\sin(\theta+\Delta\theta)-f(\theta)\sin\theta\\
&= \{f(\theta)\sin\theta\}'\Delta\theta+O(\Delta\theta^2)=\{f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta\}\Delta\theta+O(\Delta\theta^2)
\end{aligned}
$$

となります。ここで、$O(\Delta\theta^2)$ は、$\Delta\theta^2$ と同程度に (またはそれよりも) 小さい誤差項です。

よって、$(x,y)=(x(\theta),y(\theta))$ から $(x+\Delta x,y+\Delta y)=(x(\theta+\Delta\theta),y(\theta+\Delta\theta))$ までの直線距離は

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\\
&= \Delta\theta\sqrt{(f'\cos\theta-f\sin\theta)^2+(f'\sin\theta+f\cos\theta)^2+O(\Delta\theta)}\\
&= \Delta\theta\sqrt{(f'\cos\theta-f\sin\theta)^2+(f'\sin\theta+f\cos\theta)^2}+O(\Delta\theta^2)\\
&= \Delta\theta\sqrt{(f')^2+f^2}+O(\Delta\theta^2) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

となります。

$\theta = a$ から $\theta = b$ までの範囲を n 等分して、$\Delta\theta = (b-a)/n$, $\theta_j = a + j\Delta\theta$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ とすると、L は各分点 $(x(\theta_j), y(\theta_j))$ を結ぶ折れ線の長さの $n \to \infty$ の極限となりますので、(5) より、

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\Delta\theta\sqrt{\{f'(\theta_j)\}^2 + f(\theta_j)^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\{f'(\theta)\}^2 + f(\theta)^2}\, d\theta \end{aligned}$$

の公式が得られることになります。

5 数値計算

式 (1) と式 (4) とではかなり見た目に違いがありますが、実際どれくらい違うのか数値計算してみました。

まず、式 (1) の L_1 と式 (4) の L_2 は、

$$F(x) = x^2, \quad G(x) = x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

とすると、それぞれ

$$L_1 = \frac{d}{4\pi}\{F(\hat{R}) - F(\hat{r})\}, \quad L_2 = \frac{d}{4\pi}\{G(\hat{R}) - G(\hat{r})\} \quad \left(\hat{R} = \frac{2\pi}{d}R,\ \hat{r} = \frac{2\pi}{d}r\right)$$

と書けます。よって、$F(x)$ と $G(x)$ が近ければ、この L_1 と L_2 両者の値も近くなりますが、$F(x)$, $G(x)$ のグラフを並べて書いてみると図 2, 3 のようになります。見てわかる通り、$x = 0$

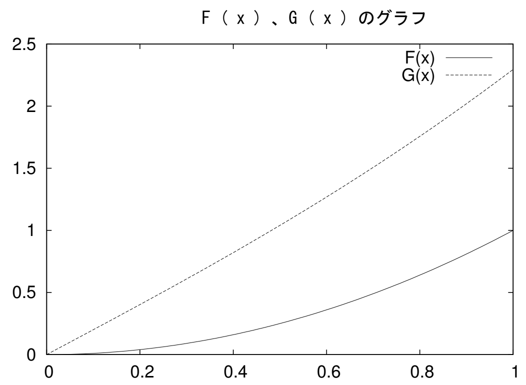

図 2: $0 \le x \le 1$ のグラフ

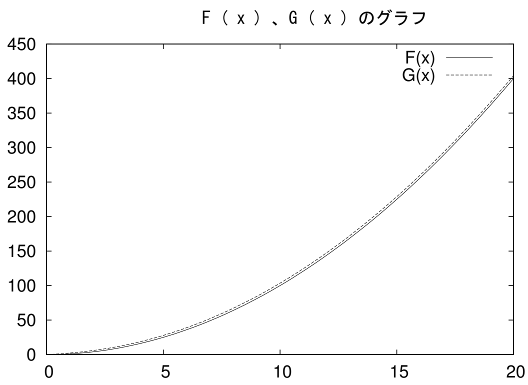

図 3: $0 \le x \le 20$ のグラフ

の近くでは多少違いがあるようですが、大きい x に対しては、$F(x)$ や $G(x)$ の値に比べてその違いはごく小さなものになります。

実際に計算してみるとわかりますが、

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x, \\ G'(x) &= \sqrt{1+x^2} + x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2\sqrt{1+x^2}, \\
G(x)-F(x) &= x(\sqrt{1+x^2}-x) + \log(x+\sqrt{1+x^2}) \\
&= \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} + \log(x+\sqrt{1+x^2})
\end{aligned}
$$

なので、

$$\{G(x)-F(x)\}' = 2\sqrt{1+x^2} - 2x \geq 0$$

より、$G(x)-F(x)$ は $x \geq 0$ で常に 0 以上で、かつ増加する関数ですが、

$$G(20)-F(20) = 4.189, \quad G(100)-F(100) = 5.798, \quad G(1000)-F(1000) = 8.101$$

のようにその増加は非常にゆっくりです。

実際の CD の場合、$d = 1.6\mu\mathrm{m} = 0.0016\mathrm{mm}$ のようで、$R,\ r$ は簡単に測ってみたところ、$R = 55\mathrm{mm},\ r = 22\mathrm{mm}$ くらいのようですから、

$$\hat{R} = \frac{2\pi}{d}R \approx 2.16\times 10^5, \quad \hat{r} = \frac{2\pi}{d}r \approx 8.64\times 10^4, \quad \frac{d}{4\pi} \approx 1.27\times 10^{-4}$$

として計算してみると、

$$
\begin{aligned}
L_2 - L_1 &= \frac{d}{4\pi}\{G(\hat{R})-G(\hat{r})\} - \frac{d}{4\pi}\{F(\hat{R})-F(\hat{r})\} \\
&= \frac{d}{4\pi}\{G(\hat{R})-F(\hat{R})\} - \frac{d}{4\pi}\{G(\hat{r})-F(\hat{r})\} \\
&= 1.27\times 10^{-4} \times (13.476 - 12.560) = 1.16\times 10^{-4}\mathrm{mm} = 0.116\mu\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

というごく小さい値になります。

なお、L 自体の長さは、

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \frac{d}{4\pi}\{F(\hat{R})-F(\hat{r})\} \\
&= 1.27\times 10^{-4} \times (4.67\times 10^{10} - 7.46\times 10^9) = 4.98\times 10^6\mathrm{mm} = 4.98\mathrm{km}
\end{aligned}
$$

となります。

よって、(1) と (4) は CD の場合は非常に近い、と言えるのではないかと思います。

6 数値計算の際の注意

5 節で紹介した数値計算の計算値は電卓、及びコンピュータ上での電卓程度のもので求めましたが、実は、単に $G(x)$ や $F(x)$ に直接値を代入して引き算したものではありません。それだと引き算する両者がかなり大きな値になって、本来出てくる小さい値は誤差が大きくなってしまいます (いわゆる桁落ち)。

5 節でも桁落ちが起こらない、引き算を整理した式

$$G(x)-F(x) = \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} + \log(x+\sqrt{1+x^2})$$

を紹介しましたが、実はこれも使っていません。

電卓を使ってみればわかりますが、例えば $x = \hat{R} = 216000$ のときに $\sqrt{1+x^2}$ を計算するのはあまり得ではなくて、代わりに x を使えば十分です。つまり、実際には数式をそのまま計算に使用しているのでなく、必要な桁数を考えながら近似式を使って計算しています。

この節では、$G(x)-F(x)$ が大きな x に対してどのような近似式で近似できるかを考えてみます。x が小さければテイラー展開で済みますが、今回は x は大きな値なのでそうはいきません。

まず、$G(x)-F(x)$ の後ろの対数の項ですが、$\sqrt{1+x^2} \approx x$ と思えば

$$\log(x+\sqrt{1+x^2}) \approx \log(x+x) = \log 2 + \log x$$

となります。実際にこの誤差がどれくらいであるか見てみます。誤差を

$$\begin{aligned}
&\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \log 2x \\
&= \log\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{2x} = \log\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{2} \quad \left(h = \frac{1}{x}\right) \\
&= \log(1+p(h)) \quad \left(p(h) = \frac{\sqrt{h^2+1}-1}{2}\right)
\end{aligned}$$

のように変形すると、$p(0)=0$ なので、x が大きい、つまり h が小さいときは $p(h)$ も小さくなります。

良く知られているように X が小さいときは

$$\sqrt{1+X} = 1 + \frac{X}{2} + O(X^2)$$

ですから (マクローリン展開)、

$$p(h) = \frac{1+h^2/2+O(h^4)-1}{2} = \frac{h^2}{4} + O(h^4)$$

となります。一方で、

$$\log(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + O(X^3)$$

ですから、

$$\log(1+p(h)) = p(h) - \frac{p(h)^2}{2} + O(p(h)^3) = \frac{h^2}{4} + O(h^4)$$

よって、

$$\log(x+\sqrt{1+x^2}) = \log 2 + \log x + \frac{1}{4x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \tag{6}$$

となります。

今度は $G(x)-F(x)$ の最初の項ですが、これも $\sqrt{1+x^2} \approx x$ と思えば、

$$\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} \approx \frac{1}{2}$$

となりますので、この誤差を考えます。

$$\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{2(x+\sqrt{1+x^2})} = -\frac{1}{2(x+\sqrt{1+x^2})^2}$$

となるので、$x = 1/h$ とすれば、

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + O(X^2)$$

および $\sqrt{h^2+1} = 2p(h) - 1$ より

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} &= \frac{h}{1+\sqrt{h^2+1}} = \frac{h}{2+2p(h)} = \frac{h}{2}\{1 - p(h) + O(p(h)^2)\} \\ &= \frac{h}{2}\left(1 - \frac{h^2}{4} + O(h^4)\right) = \frac{h}{2} - \frac{h^3}{8} + O(h^5)\end{aligned}$$

となり、よって

$$\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - \frac{h^3}{8} + O(h^5)\right)^2 = -\frac{h^2}{8} + O(h^4) = -\frac{1}{8x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \tag{7}$$

となります。結局、(6),(7) により

$$G(x) - F(x) = \log x + \frac{1}{2} + \log 2 + \frac{1}{8x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \tag{8}$$

となることがわかります。

このような、大きな x に対する関数の展開式を「漸近展開」と呼びます。実は 5 節の最後の計算ではこの式を用いて ($1/8x^2$ 以降の項を無視して)、

$$G(216000) - F(216000) - (G(86400) - F(86400)) \approx \log\frac{21600}{86400} = \log 2.50$$

のような計算を行いました。

$x = 8.64 \times 10^4$ のような大きな値の場合、$1/8x^2$ は 10^{-11} 程度の小さな値になりますからこれで問題はありません。

数値計算や数式の様子を調べる現場では、テイラー展開だけではなくて、このような漸近展開も広く使われています。

7 最後に

2 つの考え方で CD の溝の長さについて別な式が導かれました。これら数学的には違うものですが、実用上はどちらで計算しても問題ない程度の違いしかないことがわかりました (実は、差がこれほど小さいことがかなり意外でした)。

この場合は、問題の性格からしても、これらのどちらの考え方が正しいのか、といったものではなく、こういう考え方もある、といった程度の違いなのだと思います。