2008 年 03 月 24 日

春分について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

2008 年の今年は 3 月 20 日が春分であったが、春分の日は固定しているのではなく、現在は国立天文台の観測によって毎年の春分の日が決められているそうである。

春分の定義としてよく耳にするのは「昼の長さと夜の長さが同じになる日」というものであるが、これが日本で祝日になっているのであれば、他の国でも春分は祝日なのだろうかと調べてみると、どうも日本では元々彼岸との関係で祝日 (祭日 ?) となっているらしく、つまり宗教的なものなので、他の国では別に祝日でもなんでもないようである。

ところで、そのようなことを考えているときに、「昼の長さと夜の長さが同じになる日」というのはどの国でも同じなんだろうか、緯度によって違いがあるのではないだろうか、と疑問に思い少し考えてみた。太陽光線が平行にくるとすれば確かにどの国でも同じになりそうな気がするのであるが、ついでに、地球から見た場合の太陽の軌道が傾いていることや、季節によるその軌道の変化についてベクトル解析風に考えてみた (したがって、通常の説明よりもずっとややこしい) ので、それらをここにまとめておく。

2 仮定

簡単のため、太陽の大きさは考えず一点として考える、言いかえれば太陽の中心を見ると考え、それが 3 次元空間の原点にあるとし、地球はその太陽の回りを円運動 (公転) しているとする。なお、本当は地球は太陽の周りを楕円を描いて回っているのであるが、今回はその軌道の形は直接は関係なく、実際には地球と太陽の距離しか考えないので、円運動をしているとみてもそれほど問題ではない。

地球は、完全な球であるとし (これも本当は楕円体であるが)、xy 平面上を公転運動しているとする。また、地球の地軸 (自転軸) は z 軸とはずれがあるが、それは一定の方向を向いているとする (図 1)。理科年表 [1] によれば、このずれの角度は $\alpha = 23.44^\circ$ 位のようである。

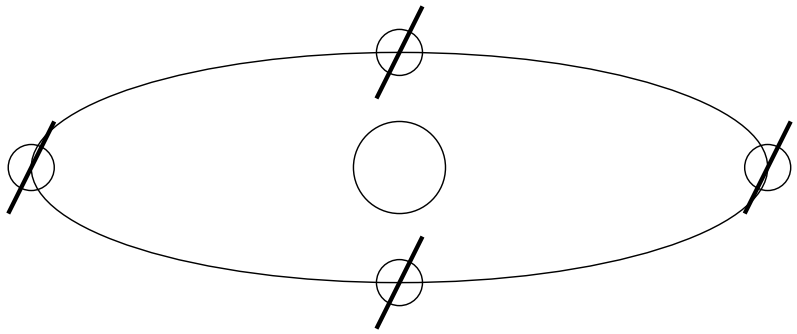

図 1: 地軸の向き

地球の中心を Q とし、OQ$=\rho$, 地球の半径を r とする。Q は xy 平面上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (\rho\cos\beta, \rho\sin\beta, 0)$$

のように書ける。また、地軸方向の単位ベクトル (上向き) を

$$\boldsymbol{\omega} = (0, \sin\alpha, \cos\alpha)$$

とする。これは仮定により、β によらず一定なベクトルである。

地球上の緯度経度は、公転面ではなく、傾いた地軸を元に作られている。観測点 P の緯度は θ $(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$ であるとし、北緯を正、南緯を負と考えることにする。この θ は、地球の中心から P を見た場合の、地球赤道面に対する仰角に等しい (図 2)。

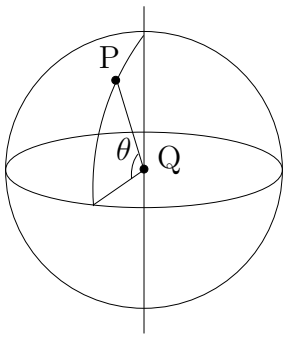

図 2: 緯度

公転によって Q の位置、すなわち β が変化するが、その β を固定した上で、地球の

自転による太陽の見た目の軌道を求め、それが β によってどのように変化するかを考えていくことにする。

太陽の見える位置は P から見れば $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ となるが、それを地球表面の観測者の座標系で考える必要があるので、観測点でのあらたな座標系を導入する必要もある。

3 観測点の位置

まず、観測点 P の位置を式で表すことにする。

地球の自転に伴って、P はその点を通る緯線上を円運動する。その緯線の円の中心を A とすると、A は地軸上にあり、QP と $\boldsymbol{\omega}$ のなす角は $\pi/2-\theta$ であるから、$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}| = r\sin\theta$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{QA}} = (r\sin\theta)\boldsymbol{\omega}$$

となる (図 3)。

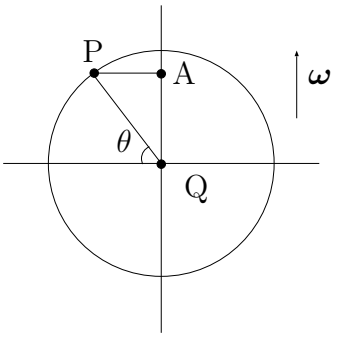

図 3: A,P,Q を通る断面

次に $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を表現するために、このベクトルの乗る平面を表すベクトル、すなわち自転軸に垂直な単位ベクトルを 2 つ取る。それは $\boldsymbol{\omega} = (0, \sin\alpha, \cos\alpha)$ に垂直なベクトルであるから、$\boldsymbol{e_x} = (1,0,0)$ と

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e_x} = (0, \sin\alpha, \cos\alpha) \times (1,0,0) = (0, \cos\alpha, -\sin\alpha)$$

を取ればよい。なお、$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e_x}$ としているので、この $\boldsymbol{e_x}$ から $\boldsymbol{\tau}$ への回転の向きは、緯線上を東経が増える方向に向いていて、これは実際の地球の自転方向と同じ向きになっている (図 4)。

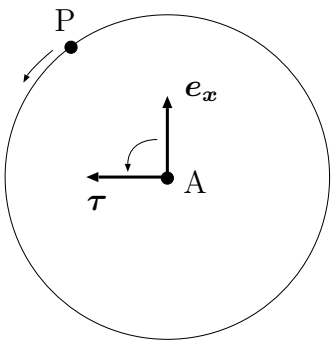

図 4: $\boldsymbol{e_x}$ から $\boldsymbol{\tau}$ への回転方向

この緯線の半径は $r\cos\theta$ であり、P はこの円周上を等速に進んでいくから、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ はパラメータ t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = r\cos\theta(\boldsymbol{e_x}\cos t + \boldsymbol{\tau}\sin t)$$

と表される。これは、t の増加に伴って、$\boldsymbol{e_x}$ から $\boldsymbol{\tau}$ の方向に回転するので、2π を 1 日と考えれば t はほぼ時刻のパラメータと見ることができる。

これらにより、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \rho(\cos\beta, \sin\beta, 0) + r\boldsymbol{\omega}\sin\theta + r(\boldsymbol{e_x}\cos t + \boldsymbol{\tau}\sin t)\cos\theta \qquad (1)\end{aligned}$$

と書けることになる。

4 観測点での座標系

地球上の点 P での座標系は、P での地球の接平面 (以後これを地表平面と呼ぶことにする) 上の 2 軸と P での真上の軸、すなわち QP 方向の軸から構成される。地表平面上の軸は、緯線に沿って東経の増える方向 (つまり東向き) と、経線に沿って北緯の増

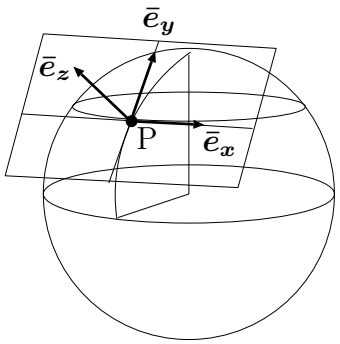

図 5: 観測点での座標系

える方向 (つまり北向き) に取る。この東向き、北向き、および真上の方向の単位ベクトルをそれぞれ $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$, $\bar{e}_z$ とする (図 5)。

$\bar{e}_x$ は、P を通る緯線に接して東へ向くベクトルなので、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をパラメータ t で微分した導関数と同じ向きになる。(1) より、

$$\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r(-\boldsymbol{e_x}\sin t + \boldsymbol{\tau}\cos t)\cos\theta$$

となり、$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ より $\cos\theta \ge 0$ であり、

$$|-\boldsymbol{e_x}\sin t + \boldsymbol{\tau}\cos t| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

なので、よって、$\bar{e}_x$ は $\partial\overrightarrow{\mathrm{OP}}/\partial t$ を $r\cos\theta$ で割ったもの、つまり

$$\bar{e}_x = -\boldsymbol{e_x}\sin t + \boldsymbol{\tau}\cos t \tag{2}$$

となる。同様に、$\bar{e}_y$ は、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をパラメータ θ で微分した導関数と同じ向きになるから、

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\boldsymbol{\omega}\cos\theta - r(\boldsymbol{e_x}\cos t + \boldsymbol{\tau}\sin t)\sin\theta$$

で、

$$|\boldsymbol{\omega}\cos\theta - (\boldsymbol{e_x}\cos t + \boldsymbol{\tau}\sin t)\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \cos^2 t\sin^2\theta + \sin^2 t\sin^2\theta} = 1$$

なので、$\bar{e}_{\boldsymbol{y}}$ は $\partial\overrightarrow{\mathrm{OP}}/\partial\theta$ を r で割ったもの、つまり

$$\bar{e}_{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{\omega}\cos\theta - \boldsymbol{e_x}\sin\theta\cos t - \boldsymbol{\tau}\sin\theta\sin t \tag{3}$$

となる。$\bar{e}_{\boldsymbol{z}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と同じ向きの単位ベクトルで、

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = r\boldsymbol{\omega}\sin\theta + r(\boldsymbol{e_x}\cos t + \boldsymbol{\tau}\sin t)\cos\theta$$

であり、$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}| = r$ より、$\bar{e}_{\boldsymbol{z}} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}/r$、すなわち

$$\bar{e}_{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{\omega}\sin\theta + \boldsymbol{e_x}\cos\theta\cos t + \boldsymbol{\tau}\cos\theta\sin t \tag{4}$$

となる。なお、

$$\begin{aligned}
&\bar{e}_{\boldsymbol{x}} \times \bar{e}_{\boldsymbol{y}} \\
&= (-\boldsymbol{e_x}\sin t + \boldsymbol{\tau}\cos t) \times (\boldsymbol{\omega}\cos\theta - \boldsymbol{e_x}\sin\theta\cos t - \boldsymbol{\tau}\sin\theta\sin t) \\
&= -\boldsymbol{e_x} \times \boldsymbol{\omega}\cos\theta\sin t + \boldsymbol{e_x} \times \boldsymbol{\tau}\sin\theta\sin^2 t + \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\omega}\cos\theta\cos t \\
&\quad - \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{e_x}\sin\theta\cos^2 t
\end{aligned}$$

であり、$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e_x}$ より $\boldsymbol{e_x} \times \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{e_x}$ なので、

$$\begin{aligned}
\bar{e}_{\boldsymbol{x}} \times \bar{e}_{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{\tau}\cos\theta\sin t + \boldsymbol{\omega}\sin\theta\sin^2 t + \boldsymbol{e_x}\cos\theta\cos t + \boldsymbol{\omega}\sin\theta\cos^2 t \\
&= \boldsymbol{\omega}\sin\theta + \boldsymbol{e_x}\cos\theta\cos t + \boldsymbol{\tau}\cos\theta\sin t = \bar{e}_{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}$$

もわかる。

5 太陽の軌道

P の地表平面に立つ観測者はこの $\bar{e}_{\boldsymbol{x}}$, $\bar{e}_{\boldsymbol{y}}$, $\bar{e}_{\boldsymbol{z}}$ を基本ベクトルとする座標系で観測するから、P から太陽への位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ をこの $\bar{e}_{\boldsymbol{x}}$, $\bar{e}_{\boldsymbol{y}}$, $\bar{e}_{\boldsymbol{z}}$ で表すことで太陽の見た目の軌道が得られる。

$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = r\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ であり、よって、

$$\overrightarrow{\mathrm{PO}} = -\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - r\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \tag{5}$$

であるから、この $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\bar{e}_{\boldsymbol{x}}, \bar{e}_{\boldsymbol{y}}, \bar{e}_{\boldsymbol{z}}$ で表せばよい。実際には、それぞれの方向への成分を求めればよいが、それはそれぞれのベクトルとの内積で計算できる。

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \rho(\cos\beta, \sin\beta, 0)$ であるから、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \rho(\cos\beta, \sin\beta, 0) \cdot (0, \sin\alpha, \cos\alpha) = \rho\sin\alpha\sin\beta, \\
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} &= \rho(\cos\beta, \sin\beta, 0) \cdot (1, 0, 0) = \rho\cos\beta, \\
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{\tau} &= \rho(\cos\beta, \sin\beta, 0) \cdot (0, \cos\alpha, -\sin\alpha) = \rho\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

となるので、よって、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} &= -\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \sin t + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cos t \\
&= \rho(-\cos\beta\sin t + \cos\alpha\sin\beta\cos t), \\
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{\omega}\cos\theta - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \sin\theta\cos t - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{\tau} \sin\theta\sin t \\
&= \rho(\sin\alpha\sin\beta\cos\theta - \cos\beta\sin\theta\cos t - \cos\alpha\sin\beta\sin\theta\sin t), \\
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} &= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{\omega}\sin\theta + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}} \cos\theta\cos t + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cos\theta\sin t \\
&= \rho(\sin\alpha\sin\beta\sin\theta + \cos\beta\cos\theta\cos t + \cos\alpha\sin\beta\cos\theta\sin t)
\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}})\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} + (\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}})\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} + (\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}})\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\
&= \rho(-\cos\beta\sin t + \cos\alpha\sin\beta\cos t)\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} \\
&\quad + \rho(\sin\alpha\sin\beta\cos\theta - \cos\beta\sin\theta\cos t - \cos\alpha\sin\beta\sin\theta\sin t)\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} \\
&\quad + \rho(\sin\alpha\sin\beta\sin\theta + \cos\beta\cos\theta\cos t + \cos\alpha\sin\beta\cos\theta\sin t)\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\
&= \rho\cos t(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}\cos\alpha\sin\beta - \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}\cos\beta\sin\theta + \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}\cos\beta\cos\theta) \\
&\quad + \rho\sin t(-\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}\cos\beta - \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}\cos\alpha\sin\beta\sin\theta + \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}\cos\alpha\sin\beta\cos\theta) \\
&\quad + \rho\sin\alpha\sin\beta(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}\cos\theta + \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}\sin\theta)
\end{aligned} \tag{6}$$

と表されることになる。今、

$$\boldsymbol{\mu} = \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}\cos\theta + \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}\sin\theta, \quad \boldsymbol{\xi} = -\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}\sin\theta + \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}\cos\theta \tag{7}$$

とすると、$\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}$ は、$\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ の含まれる平面上、これらのベクトルを $\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$ から $\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ の方向へそれぞれ θ だけ回転したものに等しい (図 6)。

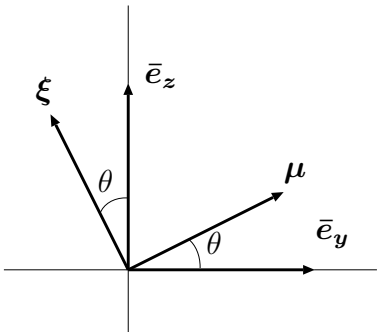

図 6: $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\xi}$

よって、$\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}$ は互いに垂直な単位ベクトルで、$\boldsymbol{\xi} = \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{\mu}$ となる。この $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi}$ を用いれば、(6) は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \rho\cos t(\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}\cos\alpha\sin\beta + \boldsymbol{\xi}\cos\beta) + \rho\sin t(-\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}\cos\beta + \boldsymbol{\xi}\cos\alpha\sin\beta) \\ &\quad + \rho\boldsymbol{\mu}\sin\alpha\sin\beta \\ &= \rho\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(\cos\alpha\sin\beta\cos t - \cos\beta\sin t) + \rho\boldsymbol{\xi}(\cos\beta\cos t + \cos\alpha\sin\beta\sin t) \\ &\quad + \rho\boldsymbol{\mu}\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

と書ける。この式の $\cos t, \sin t$ の係数を見るとわかるが、

$$\cos\gamma = \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta}}, \quad \sin\gamma = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta}}$$

となる γ を取って合成すれば、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \rho\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta}\{\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}\cos(t+\gamma) + \boldsymbol{\xi}\sin(t+\gamma)\} + \rho\boldsymbol{\mu}\sin\alpha\sin\beta$$

と書けることがわかる。よって、$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ は (5) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PO}} &= -\rho\boldsymbol{\mu}\sin\alpha\sin\beta - r\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} \\ &\quad - \rho\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta}\{\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}\cos(t+\gamma) + \boldsymbol{\xi}\sin(t+\gamma)\} \qquad (8)\end{aligned}$$

と書けることになる。今、

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = -\rho\boldsymbol{\mu}\sin\alpha\sin\beta - r\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}, \quad R = \rho\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta}, \quad \gamma' = \gamma + \pi$$

と書くことにすれば、(8) は、

$$\overrightarrow{\mathrm{PO}} = \overrightarrow{\mathrm{PS}} + R\{\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}\cos(t+\gamma') + \boldsymbol{\xi}\sin(t+\gamma')\} \tag{9}$$

となる。つまり t を動かしたときの P から見た太陽の中心 O の軌道は、点 S を中心とし、S を通り $\bar{e}_{\boldsymbol{x}}, \xi$ に平行な平面上で半径 R の円運動 ($\bar{e}_{\boldsymbol{x}}$ から $\boldsymbol{\xi}$ へ向かう方向への回転) をすることになる。

6 公転による変化

この節では、(9) を元に太陽の軌道の季節による変化を考えてみることにする。

まず、地球と太陽の距離 ρ と地球の半径 r は、理科年表 [1] によれば $\rho \approx 2.35 \times 10^4 r$ くらいであり、$\rho \gg r$ なので、r の項を無視して考え、その場合の太陽の位置を $\bar{\mathrm{O}}$、回転の中心を $\bar{\mathrm{S}}$ と書くことにすると、

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = -\rho\boldsymbol{\mu}\sin\alpha\sin\beta, \quad \overrightarrow{\mathrm{PO}} = \overrightarrow{\mathrm{PS}} + R\{\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}\cos(t+\gamma') + \boldsymbol{\xi}\sin(t+\gamma')\} \tag{10}$$

となる。

$\bar{\mathrm{S}}$ は、P を通り $\boldsymbol{\mu}$ に平行な直線上にあり、この直線は太陽の軌道面とは垂直になり、$\bar{e}_{\boldsymbol{y}}$ とは角度 θ をなす。この $\bar{\mathrm{S}}$ の位置は、公転によって変化する $\sin\beta$ の値とともにこの直線上を移動し、例えば北半球 $(0 < \theta < \pi/2)$ では、$\boldsymbol{\mu}$ は斜め上向きのベクトルになるから、$\sin\beta < 0$ のときにその中心は地表平面より上に、$\sin\beta > 0$ のときには地表平面より下にあり、$\sin\beta = 0$ のときに P に一致する。つまり、$\sin\beta < 0$ の季節は昼の方が長く、$\sin\beta > 0$ の季節は夜の方が長く、$\sin\beta = 0$ のときが春分、秋分、ということになる。よってこの春分、秋分は緯度 θ にはよらず、β のみで決定することがわかる。

一方太陽の軌道は、$\bar{e}_{\boldsymbol{x}}$ と $\boldsymbol{\xi}$ を通る平面に平行な面上での円軌道であり、すなわち回転軸が $\boldsymbol{\mu}$ であるので、これは緯度 θ の分だけ傾いた軌道を描く (図 7)。太陽軌道面の傾きは季節 β には関係なく、緯度によって決定する。

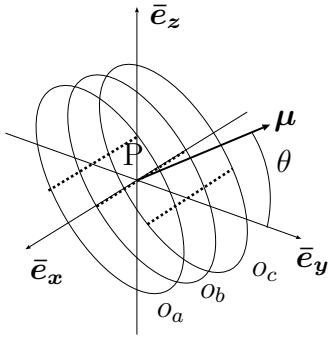

図 7: 太陽の軌道 (点線は各軌道の地表平面の高さ)

図 7 でいうと、軌道 o_a は地表に出ている部分が短く (冬)、o_c は地表に出ている部分が長い (夏)。o_b が春分、秋分のときを表している。この春分、秋分のときは、太陽は真東から登り、真西に沈み、最も高い方向は $\boldsymbol{\xi}$ の方向に等しくなる。円軌道面はそれぞれが平行なのであるが、P から観測すると冬の太陽は小さい仰角、夏の太陽は大きい仰角のところにあがることになる。

緯度による変化を考えると、高緯度地域、例えば北極に向えば θ が $\pi/2$ に近づくので、$\boldsymbol{\mu}$ は $\bar{e}_z$ に近づく。よって太陽軌道面は水平面 (地表平面) に近づくので太陽は上には上がらず、横に転がるような運動となる。その軌道面は季節によって上下に移動するので、その転がる軌道面が 1 日中地表平面の上に出ている季節が「白夜」となる[1]。

逆に赤道では、$\theta = 0$ であるから $\boldsymbol{\mu} = \bar{e}_y$、$\boldsymbol{\xi} = \bar{e}_z$ となり、軌道面は傾かずに $\bar{e}_x$, $\bar{e}_z$ に平行な面となる。この場合は、中心 $\bar{\mathrm{S}}$ は、常に $\bar{e}_y$ 軸上にあるので、春分に限らず毎日昼と夜の長さが等しいことになる。つまり赤道では、春分、秋分は「昼と夜の長さが等しい」日ではなく、むしろ「太陽が真東から登り、真上で最高点に達し、真西に沈む日」ということになる。逆に春分、秋分以外では太陽は真上までは登らないので、赤道ではこの春分、秋分の時期が最も暑い真夏、ということになりそうである。

実は太陽の軌道の半径 $R = \rho\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta}$ も季節 β によって変化する。

$$\begin{aligned} R &= \rho\sqrt{\cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta} = \rho\sqrt{(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta + (1-\sin^2\beta)} \\ &= \rho\sqrt{1 - \sin^2\alpha\sin^2\beta} \end{aligned}$$

と変形すればわかるように、これは $\sin\beta = 0$ (春分、秋分) のときに最大 $(R = \rho)$ と

[1]その半年後には、軌道面が 1 日中地表平面下にくるが、それは「黒昼」とでも言うのであろうか。

なり、$\sin\beta = \pm 1$ のときに最小となる。その最小値は、

$$R = \rho\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \rho\cos\alpha = \rho\cos 23.44^\circ = 0.92\rho$$

となるから、R の季節による変化はそれほど大きいわけでもなさそうである。

7 白夜と真上の太陽の条件

最後に、6 節で触れた、白夜と、太陽が真上に来るための条件を求めてみる。なお、以後の議論はいずれも北半球 $(\theta \geq 0)$ で考えることにする。

まず白夜の方であるが、太陽は $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ に垂直な面上で、中心 $\bar{\mathrm{S}}$ の円運動であり、その最下点を H とする (図 8) と、(10) より、

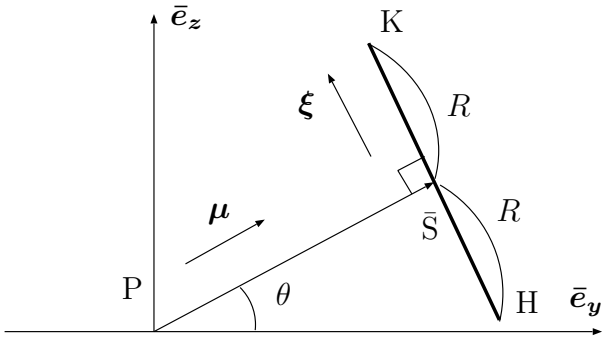

図 8: $\bar{e}_y$, $\bar{e}_z$ 面で見た太陽の軌道面

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = \overrightarrow{\mathrm{PS}} + \overrightarrow{\bar{\mathrm{S}}\mathrm{H}} = -\rho\boldsymbol{\mu}\sin\alpha\sin\beta - R\boldsymbol{\xi}$$

となることがわかる。よって、このベクトルの $\bar{e}_z$ 成分が正であることが白夜の条件であるから、(7) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\bar{e}_z &= -\rho\sin\alpha\sin\beta\sin\theta - R\cos\theta \\ &= -\rho\sin\alpha\sin\beta\sin\theta - \rho\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}\cos\theta \geq 0\end{aligned}$$

すなわち

$$-\sin\alpha\sin\beta\tan\theta \geq \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$$

が条件となる。これは $\sin\beta < 0$ の場合で、このとき、

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha\sin^2\beta\tan^2\theta \geq 1 - \sin^2\alpha\sin^2\beta \\
&\sin^2\alpha\sin^2\beta(1+\tan^2\theta) \geq 1 \\
&\sin^2\alpha\sin^2\beta \geq \cos^2\theta
\end{aligned}$$

となるので、よって

$$-\sin\beta \geq \frac{\cos\theta}{\sin\alpha} \tag{11}$$

のときに白夜となることがわかる。なお、これは

$$\frac{\cos\theta}{\sin\alpha} \leq 1$$

でなければ起こり得ず、逆にこのときはそのような季節が存在する。そしてこの不等式は、

$$\cos\theta \leq \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

より、

$$\theta \geq \frac{\pi}{2} - \alpha = 90^\circ - 23.44^\circ = 66.56^\circ \tag{12}$$

となる。よってこの (12) を満たす高緯度地帯で、(11) が満たされる季節が白夜、ということになる。

次に、太陽が真上に来るのはどういう場所であるかを考えてみる。これは、図 8 の軌道最上点 K 以外は、$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ は $\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$ 成分を持つので真上にはこず、(10) より

$$\overrightarrow{\mathrm{PK}} = \overrightarrow{\mathrm{PS}} + \overrightarrow{\mathrm{SK}} = -\rho\boldsymbol{\mu}\sin\alpha\sin\beta + R\boldsymbol{\xi}$$

となり、このベクトルの $\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$ 成分が 0 になるときが真上にくる条件、ということになる。(7) より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PK}}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}} &= -\rho\sin\alpha\sin\beta\cos\theta - R\sin\theta \\
&= -\rho\sin\alpha\sin\beta\cos\theta - \rho\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}\sin\theta = 0
\end{aligned}$$

となるので、

$$-\sin\alpha\sin\beta = \sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\beta}\tan\theta$$

という場合になる。これは $\sin\beta < 0$ のときで、

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha\sin^2\beta = (1-\sin^2\alpha\sin^2\beta)\tan^2\theta \\
&\sin^2\alpha\sin^2\beta(1+\tan^2\theta) = \tan^2\theta \\
&\sin^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\theta
\end{aligned}$$

となるので、よって、

$$-\sin\beta = \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \tag{13}$$

のとき、ということがわかる。なお、これは

$$\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} \leq 1$$

でなければこれは起こり得ず、逆にこのときはそのような季節が存在する。そしてこの不等式は、

$$\theta \leq \alpha = 23.44^\circ \tag{14}$$

を意味する。この緯度 23.44° は 北回帰線 と呼ばれている。よって、この北回帰線を越えて赤道に近い方にいけば、(13) を満たす日には太陽を真上に見ることができることになる。

8 最後に

今回、地球上の観測点を固定して、逆に太陽が動いていると見るとどう見えるのだろう、ということを考え、それをベクトルを使って表現してみたが、太陽の軌道面の傾きや、白夜、北回帰線などの説明は、ベクトルなどを使わずとも図を用いてもっと易しく中学校などでも教えられているだろう (多分)。そういう意味では、本稿はあまり

意味がないのであるが、ベクトル解析の応用例としての意味くらいはあるかなと考えている。

個人的には、太陽の軌道に関する私のあいまいな知識を式の上で確認できたし、また北回帰線の意味などについても知ることができたのでよかった。素数のふるい法でも知られるギリシャ時代の学者エラトステネス (BC.276–BC.194) が、ある場所では真夏の真昼に真上から太陽が井戸の底を照らす、という話を聞いて、そのある場所からアレキサンドリアまでの距離を用いて地球の大きさを計った、という有名な話があるが、今までは私はその「ある場所」というのはぼんやりと「赤道」上のことなのかと思っていたが、それは今回の確認によって赤道ではなく、北回帰線以南であればよいことを知ることもできた[2]。

参考文献

[1] 国立天文台編、「理科年表 (平成 2 年)」(1990)、丸善

[2] 調べてみると実際は丁度北回帰線上あたりのアスワン付近らしい。