2022 年 06 月 21 日

金管楽器の自然倍音について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、金管楽器の自然倍音の基本的な話と、それに関するホルンとホースによる実際のデータを紹介する。

2 管楽器

管楽器は大きく分けて木管楽器と金管楽器の 2 種類があり、その発音方式にはだいぶ違いがある。

木管楽器は、木星の振動板などで構成される「リード」と呼ばれる部分で原音を発生させ、それを木管の共鳴管で共鳴音を生成する。リコーダーと同様、音高は原音を発生するリード部分で変更するのではなく、管に開けた穴を開けたり閉じたりして擬似的に共鳴管の長さを変更する (短くする) ことで、共鳴音の音高を変える仕組みを取っている。よって、一般に木管楽器には共鳴管に多くの穴が開いている。

それに対し、金管楽器は原音はマウスピース内での唇の振動で作成していて、原音の音高を自発的に変更することが可能になっていて、例えばマウスピースだけで演奏すれば、連続的に音高を変更できる。しかしマウスピースを楽器本体につなげると、その連続的な原音のうち、金属管で共鳴する音しか生成できないようになっていて、逆にそれによって、特定の安定した音高のみが生成される仕組みになっている。

現在の金管楽器では、バルブなどの仕組みにより迂回路を使うことで金属管の長さを変更でき (長くする)、それにより音高を変更できるようになっているが、トランペットやシングルホルンのように 3 つのバルブしかない楽器ではそれによる音高の変更の幅はそれほど多くはない。3 つのバルブの役割は、おおまかに言って以下のようになっている。

- 1 番バルブ (中位の迂回路): 1 音 (半音 2 つ分) 下げる

- 2 番バルブ (最短の迂回路): 半音 1 つ分下げる
- 3 番バルブ (最長の迂回路): 1 音半 (半音 3 つ分) 下げる

よって、これによって変更できる音高の種類は、0～6 半音下げる 7 通りしかない。これで、例えば 2 オクターブ以上の音階の半音をすべて実現するためには、ひとつの管長で複数の高さの音を演奏できる必要があるが、それが「自然倍音」である。

3 自然倍音

前節で述べたように、金管楽器のマウスピースでは、唇の張り具合や息のスピードなどの調節により自発的に音高を連続的に変更でき、そこから楽器本体の金属管によって共鳴する音高のみが選別されるようになっているが、ひとつの管長に対して共鳴できる音高は複数存在する。

高校の物理の気柱の話で学ぶように、片側が閉じている「閉管」では気柱の共鳴周波数は

$$f_n^c = \frac{2n-1}{2}\,p_0 = (n-0.5)p_0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

となるのだが、これは管の断面積が一定である直管の場合であり、金管楽器は直管ではなく、出口に向かって内径が徐々に広がり、出口付近では急激に広がる形をしているため、共鳴周波数はいわゆる「開管」の場合の

$$f_n^o = np_0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

にほぼ近い形になることが知られている ([1], [3])。この周波数を持つ音の列を「自然倍音」と呼ぶ。

唇で生成する原音を変化させることで、ひとつの管長に対して自然倍音列の複数の高さの音を作ることができ、さらにバルブの操作を加えることで、自然倍音から少しずつ下がった音を生成できるため、金管楽器は数オクターブに渡る音階のすべての半音を出すことができるようになっている。

なお、バルブのない時代のトランペット (バロックトランペット) やホルン (ナチュラルホルン) は、音高が近い高次、すなわち大きい n の自然倍音列を利用することで出せる音の高さの種類を増やしたり、さらにホルンでは出口に手を

入れて出口の長さや広さを手の形で操作することで半音から 1 音程度の音高を下げる奏法などを使うことで多くの高さの音を出したりすることが行われていたようである ([4])。

以下に自然倍音の音高を示すが、周波数が 2 倍になると音高は丁度 1 オクターブ上がり、1 オクターブには半音が 12 音入っているので、1 半音上げることは周波数を $2^{1/12} = \sqrt[12]{2}$ 倍することに対応する (平均律音階の場合)。すなわち、自然倍音 (2) の周波数 f_n^o に対して、「音階数」m_n^o を

$$m_n^o = \log_{2^{1/12}} \frac{f_n^o}{p_0} = 12 \log_2 \frac{f_n^o}{p_0} = 12 \log_2 n \tag{3}$$

とすれば、その値が、半音単位での p_0 との音の高さの差、すなわち p_0 を基音とする半音階の音程を表現することになる。その数値が整数に近ければその半音階に良く沿った音であるが、整数から遠い場合はその半音階からは少し外れた音であることになる。なお、本稿の「音階数」という呼び名は一般的なものではない。

表 1 に、自然倍音列の音高を示す。なお、音名の表記は、1 オクターブ (ドからその上のシまで) の 12 音に C から G, および A, B で

C = ド、C♯ = ド♯、D = レ、D♯ = レ♯、E = ミ、F = ファ、
F♯ = ファ♯、G = ソ、G♯ = ソ♯、A = ラ、A♯ = ラ♯、B = シ

としていて、その後ろにオクターブ番号、すなわち 1 大きいと 1 オクターブ上の高さの音を意味する数字を追加した形で表している。なお、表 1 の右端の「実周波数」($= f_n^r$ と書く) とは、F 管のシングルホルンの場合のバルブを使わない管長での p_0 から計算した周波数 (理論上の値) である。これは以下のように計算している。

F 管シングルホルンでは、通常のホルンの楽譜の「下のド」(F 管なので C 調のピアノで言えば F の音) は f_4^r で、「上のド」は f_8^r になる。よく基準音として使われる 440Hz の C 調での A (ラ) は、ホルンで言えば f_8^r の F の 2 音 (4 半音) 上の音になるので、

$$f_8^r \times 2^{4/12} = f_1^r \times 8 \times 2^{1/3} = 440$$

となり、よって f_1^r は

$$f_1^r = 55 \times 2^{-1/3} = 43.654\text{Hz} \tag{4}$$

周波数 f_n^o	音階数 m_n^o	音名	実周波数 (Hz)
f_1^o	0.000	C0	43.654
f_2^o	12.000	C1	87.307
f_3^o	19.020	G1	130.961
f_4^o	24.000	C2	174.614
f_5^o	27.863	E2	218.268
f_6^o	31.020	G2	261.921
f_7^o	33.688	A♯2	305.575
f_8^o	36.000	C3	349.228
f_9^o	38.039	D3	392.882
f_{10}^o	39.863	E3	436.535
f_{11}^o	41.513	F♯3	480.189
f_{12}^o	43.020	G3	523.842
f_{13}^o	44.405	G♯3	567.496
f_{14}^o	45.688	A♯3	611.149
f_{15}^o	46.883	B3	654.803
f_{16}^o	48.000	C4	698.456

表 1: 自然倍音と音階数

となる。あとは開管の式 (2) に従ってその整数倍 $f_n^r = nf_1^r$ により計算したものである。

さて、表 1 を見ると、例えば以下のようないくつかのことがわかる。

1. f_n^o と f_{2n}^o は 1 オクターブ違う音高になる ($m_{2n}^o = m_n^o + 12$)。
2. 小さい n では音階としての (周波数ではなく音階数としての) 音高の間隔が広く、大きい n では音高の間隔が狭い。
3. f_3^o, f_5^o, f_9^o などは整数とのずれがそれほど大きくはないので、ある程度音階に沿った音高だが、$f_7^o, f_{11}^o, f_{13}^o$ などは整数とのずれが大きく、音階からかなり外れた音になる。

このうち、1. は (3) から当然従い、2. も m_n^o が n の対数なので、n の増加に伴って m_n^o の増加速度が遅くなることによる。そしてそのことにより、以下の性質が生まれる。

- 低い自然倍音列の方でオクターブの半音を全部出すには、f_1^o と f_2^o の間では 3 つのバルブだけでは不可能。

- f_2^o と f_4^o の間なら、3 つのバルブでもすべての半音を実現可能 (f_3^o から 6 半音下げれば C♯1 が出せ、f_4^o から 4 半音下げれば G♯1 が出せる)。
- f_4^o と f_8^o の間は、f_2^o と f_4^o の間よりも自然倍音が多いので、その分バルブ操作も少なくできる。
- しかし逆に f_4^o と f_8^o の方が f_2^o と f_4^o の間よりも自然倍音同士が近いので、唇で適切な自然倍音を選別するのが難しくなる

例えば、トランペット (通常 B♭ 管) では「下のド」と「上のド」は f_2^o と f_4^o に対応し、F 管のシングルホルンでは f_4^o と f_8^o に対応しているため、トランペットの方が指使いは多少複雑だが、音程は安定しやすく、ホルンの方が指使いはシンプルだが、音程が安定せず、狙った音を外しやすい性質がある。そのためホルンはオーケストラ内で最も難しい楽器の一つと呼ばれることもある。

4 実際のホルンでの実験

金管楽器の自然倍音は、ほぼ開管の周波数 (2) になるが、実際には完全に一致するわけではない。それがどれくらい近いのか、また逆にどれくらいずれているのかを、実際の楽器の音で確認する実験を行った。

音は、F 管のシングルホルンで、バルブを使用しない自然倍音列 $f_1^o \sim f_{13}^o$ を、各 10 秒位演奏し、その各音源から出だし付近を除いた安定している 3 秒程度の部分を使用した。

なお、ホルンでの録音には YAMAHA サイレントブラスのピックアップミュートを使用したので、実際にはそのミュートの影響によってミュートのない状態とは若干音高が違っている可能性はある。また、演奏者の技量は高くはなく、中高の部活の学生レベルである。

そしてその音源 (WAV フォーマット、2 チャンネル、サンプリング周波数 44100Hz) の安定部分を FFT (高速離散フーリエ変換) にかけて周波数解析した。FFT は $N = 2^{17} = 131072$ 分割をしているので、周波数分解能は $44100/131072 = 0.34$Hz 程度である。

例えば、f_1^o に対するホルンの実音を FFT にかけた結果の周波数グラフは図 1 のようになる。なお、すべてのグラフ、およびこれに使用した音声データは、Web ページ [2] の方にあげる予定である。

少しグラフの見方について説明する。横軸は各音の周波数で、7 次倍音まで含まれる程度の範囲に取っている。

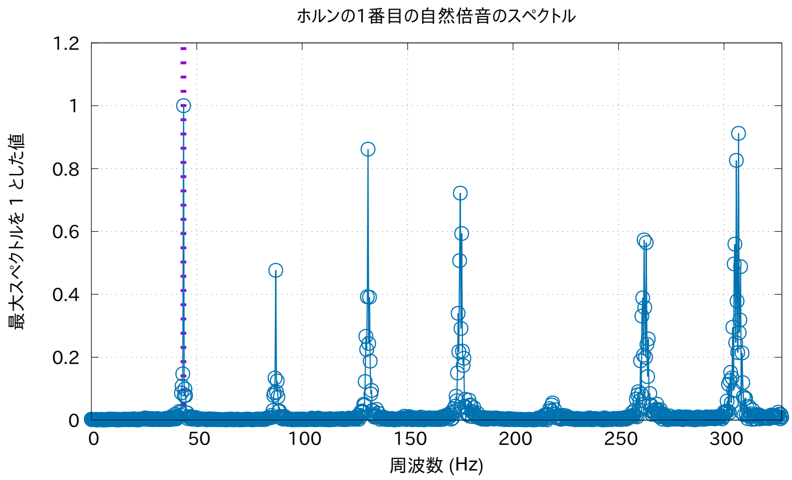


図 1: f_1^o のホルンの実音の周波数グラフ

縦軸は、FFT の結果のパワースペクトル s_p であるが、その最大値を 1 としたグラフにしている。なお、s_p は、通常は FFT の結果の複素数値 $s_r + is_i$ に対して、その大きさ

$$s_p = |s_r + is_i| = \sqrt{s_r^2 + s_i^2} \tag{5}$$

とするが、今回使用した音声データは 2 チャンネルのステレオデータ (本来はモノラルでよい) なので、左右のパワースペクトル

$$s_p^l = \sqrt{(s_r^l)^2 + (s_i^l)^2}, \quad s_p^r = \sqrt{(s_r^r)^2 + (s_i^r)^2} \tag{6}$$

に対して、さらにそれらの自乗和の平方根

$$s_p = \sqrt{(s_p^l)^2 + (s_p^r)^2} = \sqrt{(s_r^l)^2 + (s_i^l)^2 + (s_r^r)^2 + (s_i^r)^2} \tag{7}$$

としたが、s_p^l と s_p^r の平均 s_p'、あるいは FFT 前にステレオデータの平均を取ってモノラル化したデータを使って計算した s_p'' を使っても良かったかもしれないが、

$$s_p' = \frac{s_p^l + s_p^r}{2} \tag{8}$$

と s_p には、$s_p^l \geq 0$, $s_p^r \geq 0$ より容易にわかるように

$$\sqrt{2}\, s_p' \leq s_p \leq 2s_p'$$

の関係が成り立つので、s_p と s'_p はどちらを使っても大きな違いはない。一方、s''_p は

$$s''_p = \left| \frac{s^l_r + s^r_r}{2} + \frac{s^l_i + s^r_i}{2} i \right| = \frac{1}{2}\sqrt{(s^l_r + s^r_r)^2 + (s^l_i + s^r_i)^2} \tag{9}$$

なので、

$$\sqrt{2}\, s''_p \leq s_p$$

となるが、$s''_p \geq \alpha s_p$ の形の不等式は成り立たない。それは例えば左右のデータが丁度逆位相だった場合は $s^l_r = -s^r_r$, $s^l_i = -s^r_i$ となるので $s''_p = 0$ となるが、$s^l_p = s^r_p > 0$ なので s_p は $s_p = \sqrt{2}\, s^l_p = \sqrt{2}\, s^r_p$ となる。今回の目的で言えば、逆位相は起きないだろうが、逆位相のデータがキャンセルされて 0 になってしまう s''_p よりも、むしろ左右のスペクトルをちゃんと拾う s_p の方が適しているだろうと思う。

また、グラフの鉛直な点線は、表 1 で示した理論的な周波数 f^r_1 の位置を示す。

楽器の実音には、完全な正弦波の純音とは違い多くの倍音成分が含まれる。すなわち、一つの実音は、aHz の 1 次成分と 2aHz の 2 次の倍音成分 (1 次成分の 1 オクターブ上の音)、3aHz の 3 次の倍音成分 (1 次成分の 1 オクターブ半上の音)、などの和で構成される。図 1 のグラフは、一つの音に含まれる各次数成分の割合をグラフの高さで表現したものと見ればよい。ただし、一番高いところが 1 となるようにスケール変換している。

例えば、図 1 の f^o_1 に対するホルンの実音は、1 次成分の周波数 ($= f^H_1$ と書く) がほぼ f^r_1 に等しく、そしてその高さが 1 ということはこの 1 次成分が最大であり、そしてそれ以外の倍音成分、すなわち f^H_1 の自然数倍の周波数の音もかなり強いレベルで、しかもかなり高次成分まで含まれていることがわかる。

実際、同じグラフをもっと先の高次成分まで表示したものが図 2 のグラフであるが、これによれば、8 倍成分くらいまでかなり大きく、また 14,15 倍成分も大きくなっていて、かなり高い周波数成分まで含まれていることがわかる。逆に言えば、より大きな n に対する f^o_n の実音に比べるとあまり純粋な音ではない、と言えるかもしれない。

$n = 2, 4, 8$ および $n = 13$ のグラフを図 3, 4 に示す。 $n \geq 2$ 以降のグラフは、n が大きくなるにつれ形はより単純になり、ほぼ 1 次成分 f^H_n が一番強く、2 次以降の倍音成分は 1 次成分に比べかなり小さくなっていき、5 次成分以降はほとんど含まれなくなる。ただし、f^o_2, f^o_3, f^o_5 の実音では、例外的に 1 次成分より

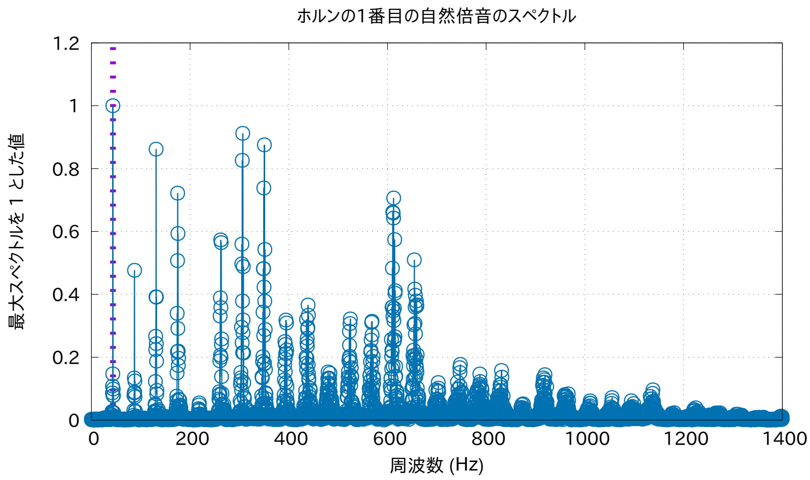


図 2: より広い周波数幅で表示したもの

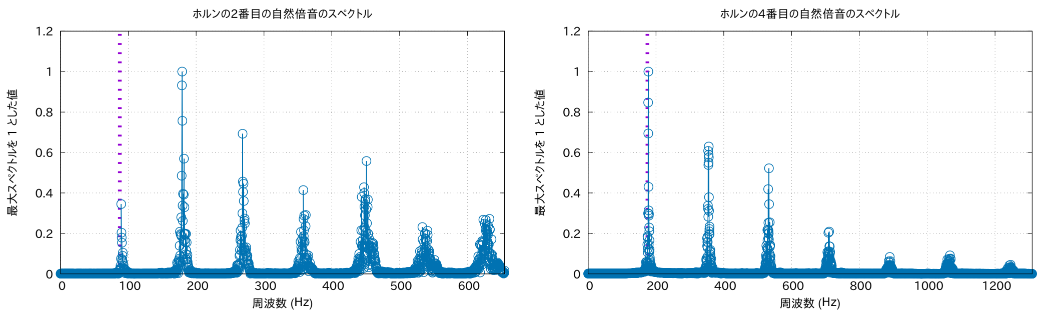


図 3: f_2^o, f_4^o のグラフ

2 次成分の方が強かった。よって大きい n に対する高い自然倍音の実音の方が純粋な音に近いようにも見える。

また、実際のホルンの音 f_n^H と理論値 f_n^r とは、n が大きくなると少しずれが見えてくる。それにはいくつかの原因が考えられるが、例えば、演奏者の技量もその要因の一つだろう。

また、実際のホルンの自然倍音は完全に開管の (2) の形になるわけではなく、あくまでそれに近い形になるだけで ([1])、特に高次の自然倍音ではそこからのずれが大きくなることが f_n^H と f_n^r とのずれの原因となりうる。

他にも、f_n^r は基準音の A を 440Hz として計算したのであるが、金管楽器は 440Hz よりも少し高い音を基準として設計されている可能性があり、それも原因の一つかもしれない。温度などの環境変化によって、主に音速 c が変わることによって管楽器の音高は少し変わるが、その調整のために金管楽器には「チュー

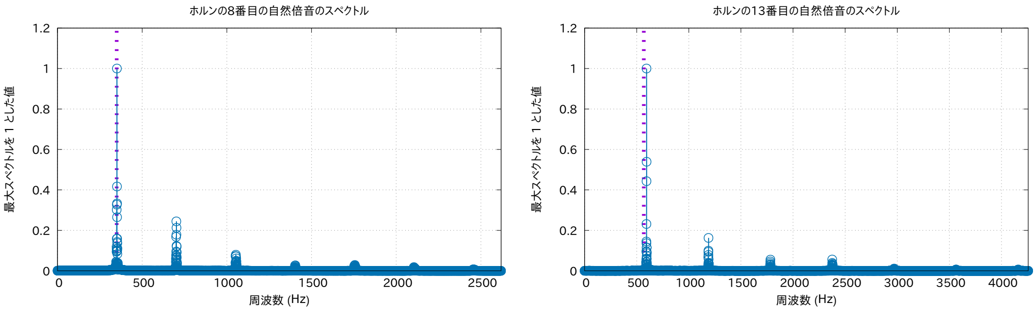


図 4: f_8^o, f_{13}^o のグラフ

ニング管」というものがついていて、それを少し抜くことで管全体の長さを長くして全体の音高を少し下げることができる。しかし、これは長くして下げることができるだけで、短くすることはできず、上げる方向には調整できないので、元々楽器の基準が少し高めに設定されている、という可能性が考えられるが、詳しくはわからない。この基準の高めの設定の可能性については、6 節でまた考える。

今回の実験で得られた、実際のホルンの f_n^H の値、すなわち自然倍音の 1 次成分周波数を表 2 に示す。なお、表 2 の 3 列目は、表 1 の右端に示した f_n^r の値、すなわち A=440Hz から計算した F 管ホルンの自然倍音の理論的な開管周波数、音高差は f_n^H と f_n^r のセント単位での音高差、すなわち音階数の差の 100 倍

$$\left(12\log_2\frac{f_n^H}{f_n^r}\right)\times 100$$

の値であり、100 セントで 1 半音差を意味する。

f_n^H が f_n^r より低い音もあるが、全般的にはやや高めである。これについても、6 節で考察する。また、これが開管の式 (2) とどれくらい合っているかについては、5 節で他の実験結果と合わせて考察する。

5 ホースでの実験

今回、以下の疑問に答えるために、もう一つの実験を行った。

> 管が直管の場合にホルンと同様の演奏を行うと、自然倍音の周波数は閉管の周波数 f_n^c になるだろうか

n	f_n^H (Hz)	f_n^r (Hz)	音高差
1	43.7	43.7	3.4
2	89.5	87.3	42.9
3	131.6	131.0	7.8
4	177.6	174.6	29.8
5	223.1	218.3	37.7
6	259.4	261.9	−16.7
7	299.4	305.6	−35.1
8	350.9	349.2	8.4
9	401.1	392.9	35.7
10	445.8	436.5	36.4
11	494.3	480.2	50.0
12	542.0	523.8	59.1
13	594.2	567.5	79.6

表 2: 実際のホルンの自然倍音周波数 f_n^H

金管楽器の自然倍音が、(2) の開管周波数 f_n^o のような音になるのは、金管楽器が直管ではなく、徐々に広がっているから ([1],[3]) という話があるが、直管と徐々に広がる管に果たしてそんなに違いが出るのだろうかとまず単純に疑問に感じた。

また直管の閉管で共鳴周波数が f_n^c になるというのは、通常は止まっている気体に対して外から可変な音を鳴らして共鳴する周波数を探す、という方法で調べるもので、いわゆる金管楽器の演奏とはだいぶ異なる。金管楽器は、マウスピースから息を吹きこんで演奏するので、管内の気体は常に出口に向かって動いていて、よって外側に出る音波と出口から反射してマウスピース側に戻る音波の速度には違いがあるだろうから、それが定常波を作って共鳴するための条件は、止まっている気体の場合とはずれる可能性があるような気がする。そもそも外から入れた音による共鳴、例えば金管楽器に向かって「アー」という声を入れた場合と、管楽器の演奏による共鳴、すなわち唇の振動と連続的な息の投入によるかなり大きな音による演奏では、エネルギーの強さなどからしても現象自体にかなり違いがあるような気がするので、共鳴音にも違いがあってもおかしくはない。

そこで、実際に直管で、金管楽器同様に演奏して自然倍音を発生させて、その周波数を調べてみることにした。直管としては、水道管の蛇口につける、内径 14mm、長さ 4m 強 (4.16m) の家庭用のホースを使った。F 管のホルンの全長は約 3.7m 位らしいが、1 番バルブを押すと管長は 45cm 位長くなるようなので、長さだけみればほぼそれに近い。

そのホースにホルンのマウスピースを刺した状態で、ホースを巻いた状態でホルンと同じように演奏し、音が出せる 1 番低い自然倍音 (その 1 次成分を f_1^h とする) から 16 番目の自然倍音 (1 次成分が f_{16}^h) までを録音した。ただし、演奏者は前節のホルンの場合と同じで、技量は高くはない。音は、各自然倍音で 10 秒程度演奏し、ほぼホルンの場合と同条件で録音したが、サイレントブラスやミュートは用いていない。

この場合の、1 番目、8 番目、16 番目の実音の FFT による周波数のグラフを図 5、図 6 に示す。 ホースの場合も、低い自然倍音には、高次成分がかなり多く

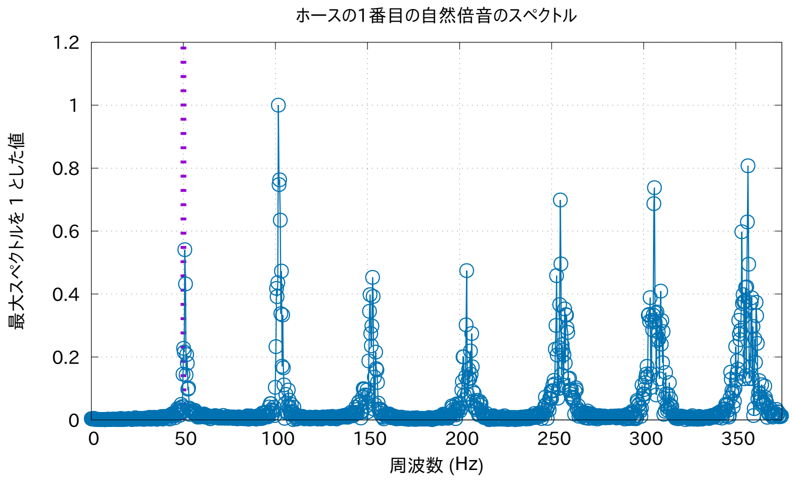
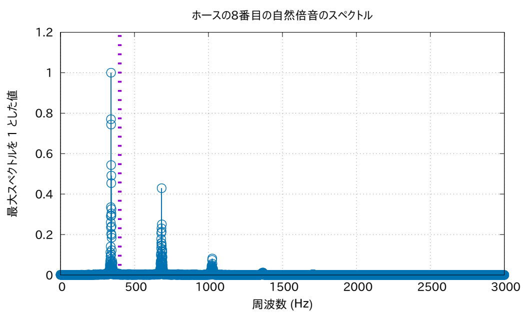


図 5: ホースの 1 番低い自然倍音のグラフ



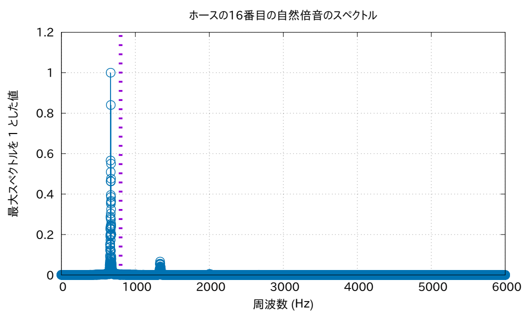


図 6: ホースの 8 番目、16 番目の自然倍音のグラフ

含まれるが、高い自然倍音にはそれらはなくなってくる。

さて、こちらのグラフで示した点線の周波数 (f_n^r) は、ホースの 1 次倍音成分 f_n^h に近くなるよう、とりあえず 1 番目のグラフでは 50Hz とし、その後はそれを n 倍したものを書いているが、明らかに大きい n に対しては f_n^h と f_n^r にはずれ

がある。すなわち、ホースの自然倍音は、f_n^h は開管 (2) の形とは違っていることが予想される。実際、今回のデータから得た f_n^h は表 3 のようになる。なお、3 列目、5 列目は $L = 4.16\text{m}$ の管長から理論的に計算される共鳴周波数の値

$$f_n^o = 41.1\,n, \quad f_{n+1}^c = 41.1(n+1-0.5) = 41.1(n+0.5) \tag{10}$$

であり、4 列目、6 列目は f_n^h とそれらとの単純差を計算したものである。ここで、閉管 (1)、開管 (2) の p_0 はいずれも、気温 18°C 位の音速 $c = 342\text{m/s}$ と管長 $L = 4.16\text{m}$ に対して、

$$p_0 = \frac{c}{2L} = \frac{342}{8.32} = 41.1 \tag{11}$$

となる。なお、f_{n+1}^c と n を一つ増やしている理由は後述する。これを見ると、

n	f_n^h (Hz)	f_n^o (Hz)	$f_n^h - f_n^o$	f_{n+1}^c (Hz)	$f_n^h - f_{n+1}^c$
1	50.8	41.1	9.7	61.7	−10.9
2	97.6	82.2	15.4	102.8	−5.2
3	137.9	123.3	14.6	143.9	−5.9
4	173.9	164.4	9.5	185.0	−11.0
5	216.3	205.5	10.8	226.1	−9.7
6	263.8	246.6	17.1	267.2	−3.4
7	301.5	287.7	13.7	308.3	−6.8
8	341.5	328.8	12.7	349.4	−7.9
9	387.3	370.0	17.3	390.5	−3.2
10	417.5	411.1	6.5	431.6	−14.1
11	463.3	452.2	11.1	472.7	−9.4
12	499.3	493.3	6.0	513.8	−14.5
13	550.4	534.4	16.1	554.9	−4.5
14	586.8	575.5	11.3	596.0	−9.3
15	631.9	616.6	15.3	637.1	−5.3
16	666.2	657.7	8.5	678.2	−12.1

表 3: ホースの自然倍音周波数 f_n^h

すべての n で $f_n^o < f_n^h < f_{n+1}^c$ となっていること、および f_n^h の値は、そのどちらに近いとも言えないことがわかる。

さて、ホルンの自然倍音の 1 次成分の周波数 f_n^H と、ホースの自然倍音の 1 次成分の周波数 f_n^h をグラフにしたものが図 7 である。 どちらも綺麗に直線的に

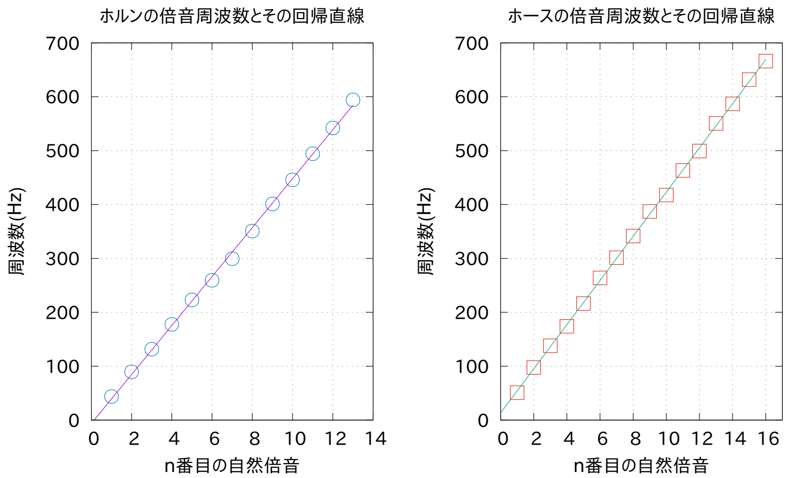


図 7: ホルンとホースの周波数グラフ

並んでいて、間違いなく途中の抜けのない自然倍音列になっていることがわかるが、表 3 から考えると、一番低い自然倍音が抜けている可能性はあり、特にホースの方がもし閉管だとすれば、f_1^h は f_1^c ではなく f_2^c の実音であり、f_n^h はむしろ f_{n+1}^c に対応する、というように見える。

ホルンの実音とホースの実音が、閉管形の式 (1)、あるいは開管形の式 (2) のいずれに対応するのかを見るために、それぞれの相関係数や回帰直線を計算すると、その結果は表 4 のようになり、図 7 に描かれている直線がそれぞれの回帰直線である。

楽器	相関係数	回帰直線
ホルン	0.9995	$\bar{f}_n^H = 45.4n - 6.26 = 45.4(n - 0.138)$
ホース	0.9998	$\bar{f}_n^h = 41.0n + 13.2 = 41.0(n + 0.322)$

表 4: 相関係数、回帰直線

見てわかるように、相関係数は非常に 1 に近く、ほぼ直線になっていることがわかり、よって回帰直線の信頼度もかなり高い。

ホルンの回帰直線は、定数項はあるもののある程度小さく、傾きの 13% 程度であるが、ホースの方は傾きの 32% 程度の数値なので無視できる値ではなく、0 よりもむしろ 0.5 に近い。つまり、f_n^H の方は p_0n という式にある程度近いが、f_n^h の方はどちらかといえば $p_0(n + 1/2)$ に近い形になっている。

ただ、0.322 がもっと 0.5 に近ければ、f_n^h は閉管 (1) 形で、$f_n^h = f_{n+1}^c$ と一つずれた形であることがはっきりするのだが、18% も違いがあるとそこまで明確に

は述べられない。一方で、この回帰直線の n の係数である 41.0Hz は、(11) の p_0 の値によく対応していて、よって 0.322 と 0.5 のずれは、誤差というよりも、何らかの理由により起きている差だと感じられる。

とりあえず、f^h_n には、今回は出せなかったが多分 f^c_1 に対応する f^h_0 の一番低い音があって、よってそこから数えるとホースの自然倍音は

$$\bar{f}^h_{n-1} = p_0(n - 0.678) = 41.0(n - 0.678) \tag{12}$$

という式で表現され、閉管に近いが 18% くらいずれがある形になることがわかる。

この 18% 位ずれている部分が、もしかしたら本節の始めに述べた、止まっている空気の閉管と流れている空気の演奏の違いや、共鳴現象自体の違いによるものなのかもしれないが、詳しいことはわからない。

また、ホルンの方も $f^o_n = p_0\,n$ の形にある程度近い、とはいうものの、13% 程度のずれがあることは完全に無視できるような値ではない。しかし、これも今回使用した楽器の癖や演奏者の技量による影響なのか、楽器の構造上完全に $p_0\,n$ に一致しないことの影響なのかはわからない。

例えば、やや苦しそうな f^H_{13} の音を除くと、回帰直線は $y = 45.0(x - 0.093)$ と 9% 位のやや小さいずれになるので、技量による要因も小さくない気がする。

6 ホルンの基準の設定

本節では、4 節の途中で述べたチューニング管の仕組みのためにホルンの基準の設定が高めなのではないかという話と、4 節の最後に述べた、f^H_n が f^r_n より全般的に高めであることについて考察してみる。

とりあえず表 4 の f^H_n に対する回帰直線を用いて、この回帰直線での A (440Hz) の音を計算してみると、それは $n = 8 \times 2^{1/3}$ での周波数に対応するので、

$$\bar{f}^H_n = 45.4 \times 8 \times 2^{1/3} - 6.263 = 451.3\text{Hz}$$

となる。誤差を考えても約 450Hz 程度なので、やはり楽器の基準の設定は、A = 440Hz よりやや高めに設定してあって、チューニング管の調整で多少下げられるようにしてある、という想像はあながち間違いではないかもしれない。

もし A = 450Hz として f_n^r を計算し直すと、f_n^r は 450/440 倍され、音高差は $1200\log_2(450/440) = 38.9$ が引き算されるので、表 2 は表 5 のようになる。

n	f_n^H (Hz)	f_n^r (Hz)	音高差
1	43.7	44.6	−35.5
2	89.5	89.3	4.0
3	131.6	133.9	−31.1
4	177.6	178.6	−9.1
5	223.1	223.2	−1.2
6	259.4	267.9	−55.6
7	299.4	312.5	−74.0
8	350.9	357.2	−30.5
9	401.1	401.8	−3.3
10	445.8	446.5	−2.5
11	494.3	491.1	11.1
12	542.0	535.7	20.2
13	594.2	580.4	40.6

表 5: ホルンの自然倍音と 450Hz 基準の自然倍音の差

前の 440Hz の方の計算の表 2 では、30 セント以内のずれの音は 5 つだったが、こちらは 7 つなのでこちらの方がわずかに f_n^r に近い。ただし、それでもなお 50 セント以上ずれている音が 2 つもあり、しかもその一方がかなり標準的な音である真ん中のソの音 (f_6^H) であることはかなり問題な気がする。

もう一方の f_7^H は通常は使わないが、74 セントも下がるため表 1 の m_7^o から計算しても $33.688 - 0.740 = 32.948$ となるので、A♯2 (ラ♯) ではなく A2 (ラ) になってしまう。これは実際にそのようで、通常の奏法のラ、すなわち $1+2$ 番バルブで f_8^H から 3 半音下げた音と、f_7^H はほぼ同じ音、少なくとも音名としてはどちらもラに聞こえる。

また、上のドである f_8^H も 30 セントもずれているが、f_6^H, f_8^H はかなり重要な音なので、これらが大きくずれているということは、演奏者の技量に問題があるのかもしれない。金管楽器の場合、出る音が完全に一定なわけではなく、同じ音でもマウスピースから送る音の調整によって出る音の高さには多少ゆらぎ、幅のようなものがある。次に、その一つの音に対する幅のようなものを測定してみた。上でかなりずれていた f_6^H (ソの音) に対して、高めのソの音と低めのソの音を同じホルンで演奏し、録音したデータの周波数を調べてみた。

一度フラットに中程度に演奏したものと、低めと高めに演奏したものをそれぞ

れ 2,3 録音し、1 次成分を拾ってみたところ、A=450Hz での $f_6^r = 267.9$Hz との差は表 6 のようになった (音高差はセント単位)。

高めか低めか	周波数	音高差
中	261.8	−40.0
低め	260.4	−48.9
高め	262.4	−35.5
高め	264.5	−22.2
低め	259.1	−57.8
高め	263.8	−26.7

表 6: ホルンのソの音 (f_6^H) の音と $f_6^r = 267.9$Hz との差

結局、高め、低めの音は出るといっても、その最大の幅は 35 セント程度であり、f_6^r を越える高さのものは安定して出せることはなく、それより高い音を出そうとすると、次の倍音 f_7^r にはずれてしまっていた。

つまり、この f_6^H が、f_6^r に比べてかなり低いのは、演奏者の技量というよりも、少なくとも今回に使用した楽器に起こる現象のように思える。ただし、これが今回使用した楽器固有の癖なのか、それとも F 管ホルン全般に共通して起こることなのかはわからない。ただし、F 管ホルンといっても、管が太くなっていく形は、例えば YAMAHA のホルンだけでも何種類かあり (細ベル、太ベル等)、そのそれぞれで自然倍音の周波数は変わるだろうから、どのホルンでも今回の実験と同じようになるとは言えないように思う。

7 最後に

本稿では、金管楽器の自然倍音の一般的な話と、ホルンとホースによる実際の自然倍音の演奏音を簡単に調べて考察してみた。もちろんひとつの楽器に対するひとりの演奏結果では一般的なことは何も言えず、信頼度は低い内容であるから、より正確な内容に興味があるなら、より専門的な本 ([3],[5],[6],[7],[8]) や、その方面の学術雑誌に掲載されている論文をあたるべきだろうし、本稿で述べた内容もそちらの方面では既知のことばかりではないかと思う。

個人的には、これまで疑問に感じていたことやこうではないかと思っていたことが半分ほどは解決したので良かったと思うが、まだよくわからないことや新たに出てきた疑問もあるので、機会があればまた考察してみたいと思う。

参考文献

[1] 竹野茂治、「直管ではない管の自然倍音について」 (2022)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/data/nozzle2.pdf

[2] 「音について」(情報数学 II) の Web ページ
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/info2/info2.html

[3] 竹内明彦、「こうして管楽器はつくられる」、ヤマハミュージックエンターテイメントホールディングス (2019)

[4] 佐伯茂樹、「カラー図解 楽器の歴史」、河出書房新社 (2008)

[5] N.H. フレッチャー、T.D. ロッシング (岸憲史、久保田秀美、吉川茂訳)、「楽器の物理学」 シュプリンガー・フェアラーク東京 (2002)

[6] 早坂寿雄、「楽器の科学」、電子情報通信学会 (1992)

[7] 安藤由典、「楽器の音響学」、音楽之友社 (1996)

[8] 吉川茂、「ピアノの音色はタッチで変わるか」、日経サイエンス社 (1997)