◎ 高階線形非斉次の定数変化法

$n=2$ で説明する。

非斉 $y''+f_1y'+f_0y=g$

斉 $y''+f_1y'+f_0y=0$

とし、$\{\varphi,\psi\}$ を 斉 の基本解系とすると

$y=C_1\varphi+C_2\psi$ は 斉 の一般解（定理6）

$\Downarrow$ $\Downarrow$ ← 定数変化法

$y=\underset{=}{u}\varphi+\underset{=}{v}\psi$ として 非斉 の解を求める。

未知関数

注 未知なものは u,v の2つなので決めるには2本の式が必要

{ ◦ 非斉 に代入した式 → (2)

{ ◦ 都合のいいものを1本追加する。 → (1)

未知関数の微分の項

$y=u\varphi+v\psi$ —①

$y'=(u\varphi)'+(v\psi)'=\boxed{u'\varphi+v'\psi}+u\varphi'+v\psi'$

$=u\varphi'+v\psi'$ —②　　　$\boxed{u'\varphi+v'\psi}=0$ としたものを (1) とする

$y''=(u\varphi')'+(v\psi')'$

$=(u'\varphi'+v'\psi')+(u\varphi''+v\psi'')$ —③

①,②,③ を 非斉 に代入

$y''+f_1y'+f_0y$

$=u'\varphi'+v'\psi'+u\underbrace{(\varphi''+f_1\varphi'+f_0\varphi)}_{=0}$ ←（φは 斉 の解）

$+v\underbrace{(\psi''+f_1\psi'+f_0\psi)}_{=0}$（$\psi$は 斉 の解）

$=u'\varphi'+v'\psi'$

$=g$ —(2)

よって
$$\begin{cases} u'\varphi+v'\psi=0 & \text{—(1)} \\ u'\varphi'+v'\psi'=g & \text{—(2)} \end{cases}$$
の連立方程式

から u',v' を求めて（φ,ψ,g は既知）

それを積分すれば u,v が求まる

→ ①より $y=u\varphi+v\psi$ が求まる。

(1) (2) は $\begin{bmatrix}\varphi & \psi\\ \varphi' & \psi'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u'\\ v'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ g\end{bmatrix}$ となり、φ,ψ が基本解系ならば

$\begin{vmatrix}\varphi & \psi\\ \varphi' & \psi'\end{vmatrix}=W(\varphi,\psi)\neq 0$（命題7）となるので

ちゃんと u',v' が求まる。一般化すると次のようになる。

定理13 斉 のひとつの基本解系 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n\}$ に対し

$$\begin{bmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n\\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n'\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1'\\ u_2'\\ \vdots\\ u_n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ g\end{bmatrix}$$ を満たす

$u_1,\cdots,u_n$ に対し

$y=u_1\varphi_1+\cdots+u_n\varphi_n$ は 非斉 のひとつの解となる。