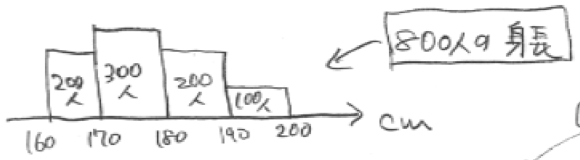
◎連続分布の平均のイメージ




代表値 (階級値)

$$\Rightarrow \text{平均} \fallingdotseq \frac{165\times 200+175\times 300+185\times 200+195\times 100}{800}$$

$\mathrm{Prob}\{170\le x\le 180\}$

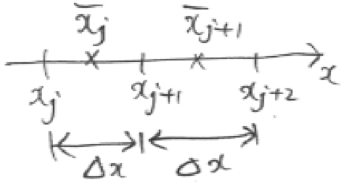
$$= 165\times \mathrm{Prob}\{160\le x\le 170\}+175\times \mathrm{Prob}\{170\le x\le 180\}+\cdots$$

この幅を細かくしていけば 誤差 $\longrightarrow 0$ となる(と考えられる)

$$\therefore \text{平均} = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\bar{x}_j\,\mathrm{Prob}\{x_j\le x\le x_{j+1}\} \quad —①$$

となる。ここで

$$\begin{cases} x_j = j\Delta x \quad (j=0,\pm1,\pm2,\cdots) \\ \bar{x}_j = \dfrac{x_j+x_{j+1}}{2} \end{cases}$$




とする。

密度関数 $f(x)$ を用いると

$$\bar{x}_j\,\mathrm{Prob}\{x_j\le x\le x_{j+1}\} = \bar{x}_j\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$$

$$= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \bar{x}_j f(x)\,dx \fallingdotseq \int_{x_j}^{x_{j+1}} x f(x)\,dx \quad —②$$

( $\Delta x \fallingdotseq 0$ のとき, $x_j\le x\le x_{j+1}$ では $\bar{x}_j \fallingdotseq x$ )

なので ② より

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\bar{x}_j\,\mathrm{Prob}\{x_j\le x\le x_{j+1}\} \fallingdotseq \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{x_j}^{x_{j+1}} x f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

となる。

$\Delta x \longrightarrow 0$ とすると ① より

$$\begin{cases} \text{左辺} \longrightarrow E[x]\ (\text{平均}) \\ \text{両辺の誤差} \longrightarrow 0 \end{cases}$$

となるので

$$\therefore E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

---

命題2 連続の場合も次が成り立つ。

(1) $y=\phi(x) \Rightarrow E[y]=E[\phi(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)f(x)\,dx$

($y$の平均を$x$で計算できる)

(2) $z=\psi(x,y) \Rightarrow E[z]=E[\psi(x,y)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy$$

2次元確変 $(x,y)$ の密度関数