⑤ xが $B(n, p)$ に従う確率変数のとき、

$E[x] = np$, $V[x] = npq$ $(= np(1-p))$

(∵) 定義通りに

$E[x] = \sum_{x=0}^{n} x P(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

等を求めるのは（できなくはないが）かなり面倒

$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ —① を利用する。

$E[x] = E[x_1 + x_2 + \cdots + x_n] \underset{(演 7(i))}{=\!=} E[x_1] + E[x_2] + \cdots + E[x_n]$

$\left(\begin{array}{c|cc} x_k & 1 & 0 \\ \hline 確 & p & q \end{array} \Rightarrow E[x_k] = 1 \times p + 0 \times q = p \right)$

$= np$

$V[x] \underset{(演 4(iv))}{=\!=} E[x^2] - E[x]^2 = E[x^2] - n^2p^2$

$E[x^2]$は、例えば $n=3$ の場合

$x^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 = (x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3)$

$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$E[x_1^2] = 1^2 \times p + 0^2 \times q = p$ （命題1(1)）

$E[2x_1x_2] \underset{演 4(ii)}{=\!=} 2E[\underset{\substack{\uparrow \\ x_1, x_2 は独立}}{x_1x_2}] \underset{演 7(ii)}{=\!=} 2E[x_1]E[x_2]$

$= 2p \times p = 2p^2$

よって $E[x^2] \underset{演 7(i)}{=\!=} E[x_1^2] + E[x_2^2] + E[x_3^2]$

$+ E[2x_1x_2] + E[2x_1x_3] + E[2x_2x_3]$

$= 3 \times p + 3 \times 2p^2 = 3p + 6p^2$ となる。

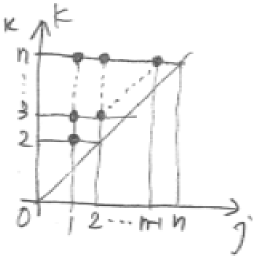
一般の n の場合

$x^2 = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$

$= \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}_{n個} + \underbrace{\sum_{j<k} 2x_jx_k}_{\binom{n}{2}個}$

（後者の和は詳しく書けば…

$\sum_{j<k} 2x_jx_k = \sum_{1 \le j < k \le n} 2x_jx_k = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} 2x_jx_k$



$= 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_1x_n$

$+ 2x_2x_3 + \cdots + 2x_2x_n$

$+ \cdots\cdots$

$+ 2x_{n-1}x_n$ ↖ $\binom{n}{2}$個 ）

より

$E[x^2] = n \times p + \binom{n}{2} \times 2p^2$ $(E[x_k^2] = p, E[2x_jx_k] = 2p^2)$

$= np + \frac{n(n-1)}{2} \times 2p^2 = np + (n^2 - n)p^2$

$\therefore V[x] = E[x^2] - n^2p^2$

$= np + (n^2-n)p^2 - n^2p^2$

$= np - np^2 = np(\underbrace{1-p}_{q}) = npq$ //