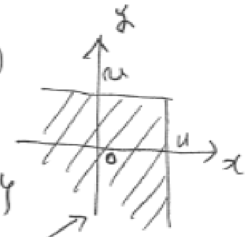
◎ 連続

標	変	密度関数	分布関数
$(-\infty, \infty)$	x	$g(x)$	$G(x)$
$(-\infty, \infty)$	y	$h(y)$	$H(y)$

- すべての $A, B \subset (-\infty, \infty)$（部分集合）に対して、
$\mathrm{Prob}\{x \in A$ かつ $y \in B\}$ $\left(= \mathrm{Prob}\{(x, y) \in \underbrace{A \times B}_{\{(a,b);\, a \in A \text{ かつ } b \in B\}}\}\right)$
を考えることができるとき、
<u>2次元確率変数</u> (x, y) を作ることができる。

- (x, y) の分布関数は？



①

$F(u, v) =$ (x, y) の<u>分布関数</u>

$\overset{\text{定義}}{=} \mathrm{Prob}\{x \le u$ かつ $y \le v\}$

$\left(= \mathrm{Prob}\{(x, y) \in (-\infty, u] \times (-\infty, v]\}\right)$

（1次元：$G(t) = \mathrm{Prob}\{x \le t\}$ ）

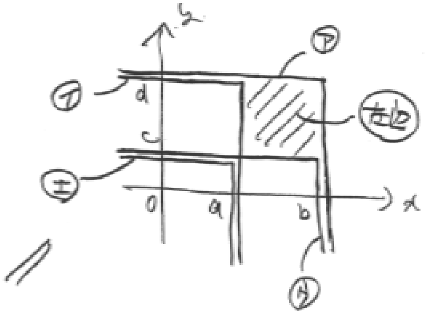
- $\mathrm{Prob}\{a \le x \le b$ かつ $c \le y \le d\}$

$= \underset{\text{ア}}{F(b, d)} - \underset{\text{イ}}{F(a, d)} - \underset{\text{ウ}}{F(b, c)} + \underset{\text{エ}}{F(a, c)}$ —②

（1次元：$\mathrm{Prob}\{a \le x \le b\} = G(b) - G(a) = \int_a^b g(x)\,dx$ ）

∵ ア ＝ 左辺 ＋（イ − エ）
＋（ウ − エ）＋ エ
＝ 左辺 ＋ イ ＋ ウ − エ

∴ 左辺 ＝ ア − イ − ウ ＋ エ



- (x, y) の密度関数

②の右辺 $= \left[F(b, y) - F(a, y)\right]_{y=c}^{y=d}$

$= \int_c^d \frac{d}{dy}\{F(b, y) - F(a, y)\}\,dy$

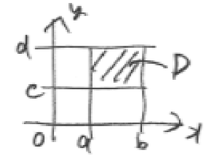
$= \int_c^d \{F_y(b, y) - F_y(a, y)\}\,dy$ （F_y：yに関する偏微分）

$\Big($ $F_y(b, y) - F_y(a, y) = \left[F_y(x, y)\right]_{x=a}^{x=b}$

$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} F_y(x, y)\,dx = \int_a^b F_{yx}(x, y)\,dx$

$= \int_c^d \int_a^b F_{yx}(x, y)\,dx\,dy$

$=$ D上の2重積分



$\Longleftrightarrow f(x, y) = F_{xy}(x, y) =$ 2次元<u>密度関数</u>

$(F_{xy} = F_{yx})$

$\begin{cases} F(u, v) = \mathrm{Prob}\{x \le u \text{ かつ } y \le v\} & (0 \le F \le 1) \\ f(x, y) = F_{xy}(x, y) & (f \ge 0) \\ \mathrm{Prob}\{a \le x \le b \text{ かつ } c \le y \le d\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dx\,dy & \end{cases}$

- x, y が<u>独立</u>
$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ すべての a, b, c, d $(a < b, c < d)$ に対して
$\mathrm{Prob}\{a \le x \le b$ かつ $c \le y \le d\} = \mathrm{Prob}\{a \le x \le b\}\mathrm{Prob}\{c \le y \le d\}$

$\Longleftrightarrow$ すべての u, v に対し $F(u, v) = G(u)H(v)$

$\Longleftrightarrow$ すべての u, v に対し $f(u, v) = g(u)h(v)$

（証 → wwwページ）