2022 年 08 月 25 日

正規母集団の標本平均と平方和の独立性

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

正規母集団の母平均の検定、推定をするのに、t 分布が使われるが、その根拠となるのが、

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t(n-1) \quad (= \text{自由度 } (n-1) \text{ の } t \text{ 分布}) \tag{1}$$

という事実である。そしてこれは、

$$u = \frac{\bar{x}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1), \quad v = \frac{S}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \tag{2}$$

から、

$$t = \frac{u}{\sqrt{\frac{v}{n-1}}} \tag{3}$$

となることから来ているが、t 分布の定義 ([3]) からすると、(2) の u と v が「独立である」ということも必要になる。そこは、講義では示していなかったので、本稿で [2],[4] に基いて示す。

2 独立性

前提は、$x_1, \ldots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ で独立である、ということだが、[2],[4] で示したことにより、

$$A = \begin{bmatrix} \vec{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_{n-1} \\ \vec{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 1/\sqrt{n} & \cdots & 1/\sqrt{n} \end{bmatrix}$$

が直交行列であれば

$$u_1 = \vec{\alpha}_1 \vec{x}, \ldots, u_{n-1} = \vec{\alpha}_{n-1} \vec{x}, u_n = \vec{\beta}\vec{x} \quad \left(\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)$$

は独立であることがわかる。そして、これを用いると、[4] で示したことにより、u, v は

$$\begin{cases} u &= \sqrt{\dfrac{n}{\sigma^2}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \vec{\beta}\vec{x} - \mu \right) = \dfrac{1}{\sigma}(u_n - \mu\sqrt{n}), \\ v &= \dfrac{1}{\sigma^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2 = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} (\vec{\alpha}_i \vec{x})^2 = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 \end{cases} \tag{4}$$

と変形できる。$u_1, \ldots, u_n$ は独立なので、あとは一般に、

$$X = f(u_1, \ldots, u_k), \quad Y = g(u_{k+1}, \ldots, u_n)$$

のように u_j が共通に含まれない関数から作られる確率変数が独立であることを示せばよい。今の場合、$u_j \sim N(\mu, \sigma^2)$ なので、その密度関数を $g(u)$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\{X \leq t,\ Y \leq s\} &= \iint_{\{X \leq t, Y \leq s\}} g(u_1) \cdots g(u_n) d\vec{u} \\ &= = \int_{\{X(u_1, \ldots, u_k) \leq t\}} g(u_1) \cdots g(u_k) du_1 \cdots du_k \\ &\quad \times \int_{\{Y(u_{k+1}, \ldots, u_n) \leq s\}} g(u_{k+1}) \cdots g(u_n) du_{k+1} \cdots du_n \\ &= \mathrm{Prob}\{X \leq t\} \mathrm{Prob}\{Y \leq s\} \end{aligned}$$

となるので、独立となる。

なお、この最後の独立性の部分は、u_j の密度関数が共通でなくても言えるし、X, Y 2 つでなくても、共通に u_j が含まれない変数のグループの関数で作られる確率変数同士についても成立する。

参考文献

[1] 竹野茂治「多次元確率分布と独立性」(2022)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/graduate/data/ndimrandvar1.pdf

[2] 竹野茂治「正規確率変数の一次式の独立性」(2022)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/graduate/data/normal2.pdf

[3] 竹野茂治「t 分布の密度関数」(2022)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/graduate/data/tdist1.pdf

[4] 竹野茂治「正規母集団の平方和の標本分布」(2022)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/graduate/data/chi2.pdf