2022 年 08 月 02 日

t 分布の密度関数

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、講義で証明を省略した、自由度 n の t 分布 $t(n)$ の密度関数が

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \tag{1}$$

となることを示す。ここで $\Gamma(p)$ はガンマ関数 ([1])。

2 t 分布

自由度 n の t 分布とは、確率変数 u, v が独立で、$u\sim N(0,1)$, $v\sim\chi^2(n)$ であるときに、

$$t=\frac{u}{\sqrt{v/n}} \tag{2}$$

が従う確率分布として定義される。

u, v が独立なので、2 次元確率分布 (u,v) の密度関数 ([2]) は、$N(0,1)$ の密度関数 $f_0(u)$, $\chi^2(n)$ の密度関数 $f_\chi(v)$ により、

$$f_0(u)f_\chi(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\dfrac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}v^{n/2-1}e^{-v/2} & (v>0)\\ 0 & (v<0)\end{cases} \tag{3}$$

となる。よって、t の分布関数 $F(t)$ は、

$$\begin{aligned}F(s) &= \mathrm{Prob}\{t\le s\} = \mathrm{Prob}\{u/\sqrt{v/n}\le s\} = \mathrm{Prob}\{u\le s\sqrt{v/n}\}\\ &= \iint_{\{(u,v)|\ u\le s\sqrt{v/n}\}} f_0(u)f_\chi(v)dudv = \int_0^\infty f_\chi(v)dv\int_{-\infty}^{s\sqrt{v/n}} f_0(u)du\end{aligned}$$

となる。よって、t の密度関数 $f(t)=F'(t)$ は、

$$f(t)=\int_0^\infty f_\chi(v)f_0\left(t\sqrt{\frac{v}{n}}\right)\sqrt{\frac{v}{n}}\,dv \tag{4}$$

となる。ここで、この被積分関数は

$$\begin{aligned} f_\chi(v)f_0\left(t\sqrt{\frac{v}{n}}\right)\sqrt{\frac{v}{n}} &= \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)}\,v^{n/2-1}e^{-v/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-t^2v/(2n)}\sqrt{\frac{v}{n}} \\ &= \frac{2^{-(n+1)/2}}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma(n/2)}\,v^{(n-1)/2}e^{-(1+t^2/n)v/2} \end{aligned} \tag{5}$$

となる。よって、$(1+t^2/n)v/2=y$ と置換すれば、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^{(n-1)/2}e^{-(1+t^2/n)v/2}dv &= \int_0^\infty y^{(n-1)/2}e^{-y}dv\,2^{(n+1)/2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \\ &= \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)2^{(n+1)/2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \end{aligned} \tag{6}$$

となるので、結局 $f(t)$ は、(4), (5), (6) より、

$$f(t)=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

となって、(1) が得られる。

参考文献

[1] 竹野茂治「カイ自乗分布の密度関数」(2022)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/graduate/data/chi1.pdf

[2] 竹野茂治「多次元確率分布と独立性」(2022)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/graduate/data/ndimrandvar1.pdf