2022 年 09 月 09 日

中心極限定理の証明 その 2

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

以前 [1] で、二項分布に関するド・モアブル＝ラプラスの中心極限定理の各点収束性について説明をした。

しかし、通常「ド・モアブル＝ラプラスの定理」は、各点収束性よりもむしろその分布関数の収束性を指すことも多いようで、ネットの情報や、数学辞典 [2] などにも見受けられる。一方で、その分布関数の収束性の証明もネットなどにいくつかあるが、残念ながらあまり厳密な証明 (と思えるもの) はないようで、各点収束の結果をそのまま積分したものや、有限区間での積分に関して証明して、それで終わりとするものなどが多いようだが、それらは極限の順序交換が行えることの保証を与えておらず、厳密な証明にはなっていないように思われる。

本稿では、その分布関数の収束性としてのド・モアブル＝ラプラスの中心極限定理の厳密な証明を紹介するとともに、[1] でのややあいまいな点の修正も行う。

2 定式化と問題点

まずあらためて [1] で示したこと、および本稿で示すことなどについて説明する。

[1] では、二項分布 $B(n,p)$ (n は自然数、$0<p<1$) に従う確率変数 x に対し、その平均 $\mu_n=np$、標準偏差 $\sigma_n=\sqrt{npq}$ ($q=1-p$) に対して $u=(x-\mu_n)/\sigma_n$ と p を固定したときに、その $n\to\infty$ のときの確率関数 $p_n(x)$ と σ_n の積の極限が、標準正規分布の密度関数 $f_0(u)$ に収束すること、すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n p_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n\left(\begin{array}{c}n\\x\end{array}\right)p^x q^{n-x}=f_0(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2} \tag{1}$$

を、スターリングの公式を用いて説明した。しかし、x は本来 $0\leq x\leq n$ の整数の値のみを取る変数であるが、

$$u=\frac{x-\mu_n}{\sigma_n}=\frac{x-np}{\sqrt{npq}} \tag{2}$$

と p を固定した場合には一般には x は整数にはならず、厳密にはその議論に修正が必要である。それは 5 節で行う。

また、(1) は各点収束の意味でのド・モアブル＝ラプラスの中心極限定理であるが、分布関数の意味での中心極限定理は、任意の実数 t に対して、

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Prob}\left\{\frac{x-\mu_n}{\sigma_n}\le t\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\le\mu_n+t\sigma_n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)p^kq^{n-k}=\int_{-\infty}^t f_0(u)du \tag{3}$$

が成り立つことである。(3) の右辺は、標準正規分布の分布関数なので、よって二項分布のある意味での標準化 ($(x-\mu_n)/\sigma_n$) の分布関数の極限が、標準正規分布の分布関数に収束することを意味している。

この式は、形式的にはほぼ各点収束の極限の式 (1) を、$(-\infty,t]$ の範囲で両辺積分した形になっているのであるが、その積分は無限幅での広義積分なので、その積分と n に関する極限との順序交換ができるという保証を与えなければその厳密な証明にはならない。$[s,t]$ のような有限な範囲での積分した形、すなわち

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Prob}\left\{s\le\frac{x-\mu_n}{\sigma_n}\le t\right\}=\int_s^t f_0(u)du$$

を示した上で $s\to-\infty$ とするのも同じで、やはり s の極限と n の極限の順序交換可能の保証が必要となる。

例えば、$g_0(x)=1/(1+x^2)$ は

$$\int_{\mathrm{R}} g_0(x)dx=\pi$$

なので、$g_n(x)=g_0(x-n)$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathrm{R}} g_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathrm{R}} g_0(x-n)dx=\pi \tag{4}$$

となるが、これは積分と n の極限を入れ替えた式

$$\int_{\mathrm{R}}\lim_{n\to\infty} g_n(x)dx=\int 0\,dx=0 \tag{5}$$

には一致しない。

積分範囲が有限であれば、関数が一様収束すれば積分の極限と極限の積分は一致するが、積分範囲が無限である広義積分ではそれでは不十分である。

本稿では、それを保証するために以下のルベーグ収束定理を用いる。

定理 1

$g_n(x)$ が各 x に対して

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = h_0(x) \tag{6}$$

に収束し、n に無関係な $h_1(x)$ があって、

$$0 \leq g_n(x) \leq h_1(x)\ \ (x \in \mathrm{R},\ n \geq 1), \quad \int_{\mathrm{R}} h_1(x)dx < \infty \tag{7}$$

となるとき、$g_n(x)$ も $h_0(x)$ も R 上可積分で、

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathrm{R}} g_n(x)dx = \int_{\mathrm{R}} h_0(x)dx \tag{8}$$

本来ルベーグ収束定理は、正でない値を取る関数にも適用できるのであるが、本稿では正の関数だけ考えれば十分であるので、この形で紹介しておく。また、上の $g_0(x) = 1/(1+x^2)$ の例の場合は、(6) は満たしているが、(7) を満たすような $h_1(x)$ を取ることができないため、(8) が成り立たない。

よって、分布関数の収束性を示すためには、(7) を満たすような $h_1(x)$ の存在を示すことが必要となる。それは 6 節で考える。

3 p, q の大小

(3) の証明を行う前に、(3) は $p \leq q$ の場合、すなわち $0 < p \leq 1/2$ の場合のみ証明すれば良いことを先に示しておく。なおその場合、厳密に言えば、(3) だけでなく、等号を除いたバージョン

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left\{\frac{x-\mu_n}{\sigma_n} < t\right\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k<\mu_n+t\sigma_n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) p^k q^{n-k} = \int_{-\infty}^{t} f_0(u)du \tag{9}$$

も必要になる。

もし、$0 < p \le 1/2$ の場合に (3), (9) が成り立てば、$1/2 < p < 1$ の場合は、$q = 1 - p < 1/2$ なので、$j = n - k$ とすれば

$$\mathrm{Prob}\left\{\frac{x-\mu_n}{\sigma_n} \le t\right\} = \sum_{k \le \mu_n + t\sigma_n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} = \sum_{j \ge n - \mu_n - t\sigma_n} \begin{pmatrix} n \\ n-j \end{pmatrix} q^j p^{n-j}$$
$$= \sum_{j \ge \tilde{\mu}_n - t\sigma_n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} q^j p^{n-j} = 1 - \sum_{j < \tilde{\mu}_n - t\sigma_n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} q^j p^{n-j}$$

となる。ここで $\tilde{\mu}_n = n - \mu_n = nq$ とした。ここから $\tilde{x} \sim B(n,q)$ とすると、

$$\mathrm{Prob}\left\{\frac{x-\mu_n}{\sigma_n} \le t\right\} = 1 - \mathrm{Prob}\left\{\frac{\tilde{x}-\tilde{\mu}_n}{\sigma_n} < -t\right\}$$

がいえることになり、$0 < q < 1/2$ なので、(9) によりその極限は

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left\{\frac{x-\mu_n}{\sigma_n} \le t\right\} = 1 - \int_{-\infty}^{-t} f_0(u)du$$

となるが、$f_0(u)$ は偶関数なので、

$$1 - \int_{-\infty}^{-t} f_0(u)du = 1 - \int_{t}^{\infty} f_0(u)du = \int_{-\infty}^{t} f_0(u)du$$

となって、これで $1/2 < p < 1$ の場合にも (3) が成り立つことになる。

よって、以後は $0 < p \le 1/2$ として任意の t に対して (3), (9) が成り立つことを示す。

4 有限和の積分化

まずは、(3) にルベーグ収束定理を適用するために、(3) の左辺の有限和の部分を、ある関数の積分の形に変形する。

以後、実数全体の部分集合 A の定義関数を $\chi_A(x)$ と書く。すなわち、

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases} \tag{10}$$

と定義する。また、$\lfloor x \rfloor$ を x 以下の最大の整数、$\lceil x \rceil$ を x 以上の最小の整数 ($\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$ =0 または 1) とするとき、t に対し

$$\alpha_n = \alpha_n(t) = \lfloor \mu + t\sigma_n \rfloor, \quad \beta_n = \beta_n(t) = \lceil \mu + t\sigma_n \rceil - 1 \tag{11}$$

とすると、$\beta_n = \alpha_n$ または $\beta_n = \alpha_n - 1$ であり、$k \leq \mu_n + t\sigma_n$ は $k \leq \alpha_n$ と同値で、$k < \mu_n + t\sigma_n$ は $k \leq \beta_n$ と同値になるので、

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\left\{\frac{x-\mu_n}{\sigma_n} \leq t\right\} &= \sum_{k=0}^{\alpha_n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ \mathrm{Prob}\left\{\frac{x-\mu_n}{\sigma_n} < t\right\} &= \sum_{k=0}^{\beta_n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \end{aligned} \tag{12}$$

と書ける。また、これらの和の $k=0$ の項を除外して、$k=1$ からの和にするが、その場合 $k=0$ の項は、

$$\binom{n}{0} p^0 q^n = q^n$$

なので、これは $n \to \infty$ のときに 0 に収束する。その上で、この和の各項を、区間 $[k, k+1)$ 上での底辺 1 の長方形の面積と考えれば、丁度ヒストグラムの面積と見ることができて、

$$\sum_{k=0}^{\alpha_n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = q^n + \int_{\mathrm{R}} \sum_{k=1}^{\alpha_n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \chi_{[k,k+1)}(x) dx$$

のように積分化できる。そして $x = \mu_n + u\sigma_n$ と置換すると、この式は

$$\sum_{k=0}^{\alpha_n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = q^n + \int_{\mathrm{R}} \sum_{k=1}^{\alpha_n} \sigma_n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \chi_{[k,k+1)}(\mu_n + u\sigma_n) du \tag{13}$$

と書ける。この被積分関数を $f_n^{(0)}(u)$ と考える。

$$\chi_{[k,k+1)}(\mu_n + u\sigma_n) = \chi_{[(k-\mu_n)/\sigma_n, (k+1-\mu_n)/\sigma_n)}(u)$$

に注意し、$k = n$ の項 p^n も除外し、であるから、$f_n^{(0)}(u)$ を

$$f_n^{(0)}(u) \ = \ \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \chi_{[(k-\mu_n)/\sigma_n, (k+1-\mu_n)/\sigma_n)}(u)$$

$$= \begin{cases} \sigma_n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} & \left(\dfrac{k-\mu_n}{\sigma_n} \leq u < \dfrac{k+1-\mu_n}{\sigma_n},\ 1 \leq k \leq n-1 \right) \\ 0 & \left(u < \dfrac{1-\mu_n}{\sigma_n},\ u \geq \dfrac{n-\mu_n}{\sigma_n} \right) \end{cases} \tag{14}$$

とすると

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} = p^n + q^n + \int_{\mathrm{R}} f_n^{(0)}(u) du \tag{15}$$

であり、また $\alpha_n, \beta_n \leq n-1$ のときに $f_n^{(1)}(u)$, $f_n^{(2)}(u)$ を

$$\begin{aligned} f_n^{(1)}(u) &= f_n^{(0)}(u) \chi_{[(1-\mu_n)/\sigma_n, (\alpha_n+1-\mu_n)/\sigma_n)}(u) \\ &= \sum_{k=1}^{\alpha_n} \sigma_n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \chi_{[(k-\mu_n)/\sigma_n, (k+1-\mu_n)/\sigma_n)}(u), \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} f_n^{(2)}(u) &= f_n^{(0)}(u) \chi_{[(1-\mu_n)/\sigma_n, (\beta_n+1-\mu_n)/\sigma_n)}(u) \\ &= \sum_{k=1}^{\beta_n} \sigma_n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \chi_{[(k-\mu_n)/\sigma_n, (k+1-\mu_n)/\sigma_n)}(u), \end{aligned} \tag{17}$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\alpha_n} \sigma_n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} &= q^n + \int_{\mathrm{R}} f_n^{(1)}(u) du, \\ \sum_{k=1}^{\beta_n} \sigma_n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} &= q^n + \int_{\mathrm{R}} f_n^{(2)}(u) du \end{aligned} \tag{18}$$

となり、これで (3), (9) の左辺が積分の形で表現され、ルベーグ収束定理が使える形となる。

5 各点収束極限の厳密化

本節では、主に [1] の議論のあいまいさや評価に関する修正を行う。

(14) の u の条件は、$k \leq \mu_n + u\sigma_n < k+1$ とも書けるが、これは $k = \lfloor \mu_n + u\sigma_n \rfloor$ と同値であることに注意する。そして、各 u に対して $\tilde{u}_n = \tilde{u}_n(u)$ を、

$$\mu_n + \tilde{u}_n \sigma_n = \lfloor \mu_n + u\sigma_n \rfloor \ (= k) \tag{19}$$

となるように取ると、

$$\mu_n + \tilde{u}_n\sigma_n \le \mu_n + u\sigma_n < \mu_n + \tilde{u}_n\sigma_n + 1$$

より、

$$u - \frac{1}{\sigma_n} < \tilde{u}_n \le u \tag{20}$$

だから、$n \to \infty$ のときに $\tilde{u}_n \to u$ となり、また $k = \mu_n + \tilde{u}_n\sigma_n$ だから、[1] で $k = \mu_n + u\sigma_n$ を代入して議論した代わりに $k = \mu_n + \tilde{u}_n\sigma_n$ を代入し、u の代わりに $\tilde{u}_n$ を用いれば k は正しく整数となり、[1] の議論が正当化できることになる。それも本節で改めて紹介する。

本節では、$f_n^{(0)}(u)$ の $n \to \infty$ の極限を求める。

まず、スターリングの公式

$$n! = n^n\sqrt{2\pi n}\, e^{-n}(1 + o(1)) \tag{21}$$

より、ある N 以上の n に対しては、

$$1 - \frac{1}{2} < \frac{n!}{n^n\sqrt{2\pi n}\, e^{-n}} < 1 + \frac{1}{2}$$

とできることになるので、$n \ge 1$ に対して $S(n)$ を

$$S(n) = \frac{n!}{n^n\sqrt{2\pi n}\, e^{-n}} \tag{22}$$

とすれば、N 以下の n も含め、すべての $n \ge 1$ に対し、

$$0 < M_1 \le S(n) \le M_2 < \infty \tag{23}$$

となるような M_1, M_2 を取ることができ、かつ

$$\lim_{n\to\infty} S(n) = 1 \tag{24}$$

となることがわかる。

$f_n^{(0)}(u)$ では $1 \le k \le n-1$ であるが、その k に対して、

$$\begin{aligned}
\sigma_n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} &= \sqrt{npq}\,\frac{n!}{k!(n-k)!}\,p^k q^{n-k} \\
&= \frac{S(n)}{S(k)S(n-k)} \times \frac{n^{n+1/2}\sqrt{2\pi}\,e^{-n} \times n^{1/2}p^{k+1/2}q^{n-k+1/2}}{k^{k+1/2}\sqrt{2\pi}\,e^{-k}(n-k)^{n-k+1/2}\sqrt{2\pi}\,e^{-n+k}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{S(n)}{S(k)S(n-k)}\left(\frac{np}{k}\right)^{k+1/2}\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k+1/2}
\end{aligned}$$

と書け、この後半部分を

$$I_0 = \left(\frac{np}{k}\right)^{k+1/2}\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k+1/2} \tag{25}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{k}{np} &= \frac{\mu_n + \tilde{u}_n\sigma_n}{np} = \frac{np + \tilde{u}_n\sqrt{npq}}{np} = 1 + \tilde{u}_n\sqrt{\frac{q}{np}}, \\
\frac{n-k}{nq} &= \frac{n - \mu_n - \tilde{u}_n\sigma_n}{nq} = \frac{nq - \tilde{u}_n\sqrt{npq}}{nq} = 1 - \tilde{u}_n\sqrt{\frac{p}{nq}}
\end{aligned}$$

となるので、

$$y_n = y_n(u) = \tilde{u}_n\sqrt{\frac{q}{np}}, \quad z_n = z_n(u) = -\tilde{u}_n\sqrt{\frac{p}{nq}} \tag{26}$$

とすると、I_0 は

$$\begin{aligned}
I_0 &= (1+y_n)^{-k-1/2}(1+z_n)^{-n+k-1/2} \\
&= (1+y_n)^{-(\mu+\tilde{u}_n\sigma_n)-1/2}(1+z_n)^{-(n-\mu-\tilde{u}_n\sigma_n)-1/2} \\
&= (1+y_n)^{-np(1+y_n)-1/2}(1+z_n)^{-nq(1+z_n)-1/2}
\end{aligned}$$

と書けるので、$J_0 = \log I_0$ とすると、

$$J_0 = -\left\{np(1+y_n) + \frac{1}{2}\right\}\log(1+y_n) - \left\{nq(1+z_n) + \frac{1}{2}\right\}\log(1+z_n) \tag{27}$$

となる。これを、

$$\begin{aligned} J_0 &= J_1 + J_2 + J_3, \\ J_1 &= -np\log(1+y_n) - nq\log(1+z_n), \\ J_2 &= -npy_n\log(1+y_n) - nqz_n\log(1+z_n), \\ J_3 &= -\frac{1}{2}\log(1+y_n) - \frac{1}{2}\log(1+z_n) \end{aligned}$$

と分け、さらに $g_1(y)$ $(= O(y^2))$, $g_2(y)$ $(= O(y^3))$ を

$$g_1(y) = \log(1+y) - y, \quad g_2(y) = \log(1+y) - y + \frac{y^2}{2} \tag{28}$$

と定める。ここで、

$$\begin{cases} np + nq &= n, \\ npy_n + nqz_n &= np\tilde{u}_n\sqrt{\dfrac{q}{np}} - nq\tilde{u}_n\sqrt{\dfrac{p}{nq}} \;=\; 0, \\ npy_n^2 + nqz_n^2 &= np\tilde{u}_n^2\dfrac{q}{np} + nq\tilde{u}_n^2\dfrac{p}{nq} \;=\; \tilde{u}_n^2, \\ npy_n^3 + nqz_n^3 &= np\tilde{u}_n^3\dfrac{q}{np}\sqrt{\dfrac{q}{np}} + nq\tilde{u}_n^3\dfrac{p}{nq}\sqrt{\dfrac{p}{nq}} \;=\; \tilde{u}_n^3\dfrac{q^2-p^2}{\sqrt{npq}} \\ &= \tilde{u}_n^3\dfrac{q-p}{\sqrt{npq}} \;=\; \tilde{u}_n^3\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}} - \sqrt{\dfrac{p}{nq}}\right) \;=\; \tilde{u}_n^2(y_n+z_n) \end{cases} \tag{29}$$

に注意すると、J_1, J_2 は

$$\begin{aligned} J_1 &= -np\left(g_2(y_n) + y_n - \frac{y_n^2}{2}\right) - nq\left(g_2(z_n) + z_n - \frac{z_n^2}{2}\right) \\ &= -npg_2(y_n) - nqg_2(z_n) + \frac{\tilde{u}_n^2}{2}, \\ J_2 &= -npy_n(g_1(y_n) + y_n) - nqz_n(g_1(z_n) + z_n) \\ &= -npy_ng_1(y_n) - nqz_ng_1(z_n) - \tilde{u}_n^2 \end{aligned}$$

と変形できるから、

$$J_1 + J_2 = -\frac{\tilde{u}_n^2}{2} + npg_3(y_n) + nqg_3(z_n) \tag{30}$$

となる。ここで、g_3 は

$$g_3(y) = -g_2(y) - yg_1(y) \tag{31}$$

とした。

$n \to \infty$ のとき、$\tilde{u}_n \to u$, $y_n, z_n \to 0$ で、この $npg_3(y_n)$, $nqg_3(z_n)$ の極限は $g_3(0) = 0$ より不定形となるが、

$$\begin{aligned}
g_3'(y) &= -g_2'(y) - g_1(y) - yg_1'(y) \\
&= -\left(\frac{1}{1+y} - 1 + y\right) - g_1(y) - y\left(\frac{1}{1+y} - 1\right) \\
&= -\frac{y^2}{1+y} - g_1(y) + \frac{y^2}{1+y} \ = \ -g_1(y), \\
g_3''(y) &= -g_1'(y) \ = \ -\frac{1}{1+y} + 1 \ = \ \frac{y}{1+y}
\end{aligned}$$

で、$g_3'(0) = 0$, $g_3''(0) = 0$ なので、ロピタルの定理より、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} npg_3(y_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{g_3(y_n)}{y_n^2}\tilde{u}_n^2 q \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{g_3''(y_n)}{2}u^2 q \ = \ 0, \\
\lim_{n\to\infty} nqg_3(z_n) &= 0
\end{aligned}$$

となるので、(30) より、

$$\lim_{n\to\infty}(J_1 + J_2) = -\frac{u^2}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} J_3 = 0 \tag{32}$$

がわかる。また、

$$\begin{aligned}
k &= np + \tilde{u}_n\sqrt{npq} = np(1 + y_n) \to \infty, \\
n - k &= nq - \tilde{u}_n\sqrt{npq} = nq(1 + z_n) \to \infty
\end{aligned}$$

なので、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S(n)}{S(k)S(n-k)} = 1 \tag{33}$$

となり、結局これらを統合すれば、

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(0)}(u) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}\bigg|_{k=\mu_n+\tilde{u}_n\sigma_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} = f_0(u) \tag{34}$$

が示されたことになる。

そしてこれが [1] のあいまいな点の修正にもなっている。

$f_n^{(1)}(u),\ f_n^{(2)}(u)$ の極限についても見ておく。まずは $1 < \beta_n \le \alpha_n \le n-1$ の保証を与えておく。$\alpha_n = \lfloor \mu_n + t\sigma_n \rfloor$ より

$$\alpha_n \le \mu_n + t\sigma_n = np + t\sqrt{npq} = np\left(1 + t\sqrt{\frac{q}{np}}\right)$$

なので、$0 < p \le 1/2$ より n を

$$n \ge \frac{1}{1-\sqrt{p}}, \quad n \ge \frac{t^2 q}{(1-\sqrt{p})^2}, \quad n \ge \frac{4t^2 q}{p}, \quad n \ge \frac{6}{p} \tag{35}$$

を満たすよう大きくとると、(35) の 1 つ目の不等式から $n-1 \ge n\sqrt{p}$ が得られ、2 つ目から

$$1 + t\sqrt{\frac{q}{np}} \le 1 + t\sqrt{\frac{q(1-\sqrt{p})^2}{pt^2 q}} = 1 + \frac{t}{|t|}\frac{1-\sqrt{p}}{\sqrt{p}} \le 1 + \frac{1-\sqrt{p}}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

が得られるので、よって、

$$\alpha_n = np\left(1 + t\sqrt{\frac{q}{np}}\right) \le \frac{np}{\sqrt{p}} = n\sqrt{p} \le n-1$$

となる。これで $\beta_n \le \alpha_n \le n-1$ が得られる。また、

$$\alpha_n > \mu_n + t\sigma_n - 1 = np\left(1 + t\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - 1$$

であり、(35) の 3 つ目の不等式より

$$\left|t\sqrt{\frac{q}{np}}\right| \le \left|\frac{t}{\sqrt{4t^2}}\right| = \frac{1}{2}$$

となるが、4 つ目の不等式より $np/2 \geq 3$ だから、

$$\alpha_n > np\left(1-\frac{1}{2}\right) - 1 \geq 3-1 = 2, \quad \beta_n \geq \alpha_n - 1 > 1$$

となり、よって (35) を満たす n に対しては、$1 < \beta_n \leq \alpha_n \leq n-1$ が保証されることになる。

(11), (19), (20) より $\mu_n + \alpha_n\sigma_n = \tilde{u}_n(t)$ であり、よって

$$\frac{\alpha_n + 1 - \mu_n}{\sigma_n} = \tilde{u}_n(t) + \frac{1}{\sigma_n} > t$$

となり、よって (20) より $(\alpha_n + 1 - \mu_n)/\sigma_n \to t+0$ となる。また、

$$\frac{1-\mu_n}{\sigma_n} = \frac{1}{\sqrt{npq}} - \sqrt{\frac{np}{q}} \to -\infty$$

なので、よって

$$\chi_{[(1-\mu_n)/\sigma_n, (\alpha_n+1-\mu_n)/\sigma_n)}(u) \to \chi_{(-\infty,t]}(u)$$

となる。β_n に関しては、(11) より

$$\mu_n + t\sigma_n - 1 \leq \beta_n < \mu_n + t\sigma_n \leq \beta_n + 1$$

なので、

$$t \leq \frac{\beta_n + 1 - \mu_n}{\sigma_n} < t + \frac{1}{\sigma_n}$$

となり、よってこちらも

$$\chi_{[(1-\mu_n)/\sigma_n, (\beta_n+1-\mu_n)/\sigma_n)}(u) \to \chi_{(-\infty,t]}(u)$$

となることがわかる。よって、$f_n^{(1)}(u), f_n^{(2)}(u)$ の極限は

$$f_n^{(1)}(u), f_n^{(2)}(u) \to f_0(u)\chi_{(-\infty,t]}(u) \tag{36}$$

となる。

6 上からおさえる可積分関数の存在

本節では、ルベーグ収束定理の、$f_n^{(j)}(u)$ $(j=1,2)$ を上からおさえる可積分関数 $h_1(u)$ の存在を、実際にそれを構成することで示す。なお、$\beta_n \leq \alpha_n$ より $f_n^{(1)}(u) \geq f_n^{(2)}(u)$ なので、本節では主に $f_n^{(1)}(u)$ のみを考える。

まず、$S(n)/(S(k)S(n-k))$ については、(35) を満たす n と $1 \leq k \leq \alpha_n$ に対しては $k \leq n-1$ なので、(23) より

$$\frac{S(n)}{S(k)S(n-k)} \leq \frac{M_2}{M_1^2} \tag{37}$$

と上から評価できる。

次は J_k であるが、J_3 は各点収束では単純であるが、上からおさえるのは案外難しい。

まずは、$-1/2$ 倍がついていることで対数部分を上からおさえることができなくなっているため、$J_1+J_2=-k\log(1+y_n)-(n-k)\log(1+z_n)$ の定数倍を利用する。$k \geq 1$ であり、また (35) を満たす n については $k \leq n-1$ なので、$k/2 \geq 1/2$, $(n-k)/2 \geq 1/2$ であるから、

$$J_3' = -\frac{1}{2}(J_1+J_2)+J_3 = \frac{k-1}{2}\log(1+y_n)+\frac{n-k-1}{2}\log(1+z_n) \tag{38}$$

とすると、対数の前の係数はいずれも 0 以上となる。一方、

$$g_1'(y) = \frac{y}{1+y}$$

と $g_1(0)=0$ より $g_1(y) \leq 0$、すなわち $\log(1+y) \leq y$ が得られるので、(29) より、

$$\begin{aligned} J_3' &\leq \frac{k-1}{2}y_n+\frac{n-k-1}{2}z_n = \frac{np(1+y_n)-1}{2}y_n+\frac{nq(1+z_n)-1}{2}z_n \\ &= \frac{1}{2}(npy_n^2+nqz_n^2)-\frac{1}{2}(y_n+z_n) = \frac{\tilde{u}_n^2}{2}-\frac{1}{2}(y_n+z_n) \end{aligned} \tag{39}$$

と評価される。

また、$J_0-J_3'=(3/2)(J_1+J_2)$ については、(30) の変形を用いるが、ここで g_3 に対して、

$$g_3(y) \leq \frac{y^3}{6} \tag{40}$$

となることを示しておく。5 節の計算により、

$$\left(g_3(y)-\frac{y^3}{6}\right)''=\frac{y}{1+y}-y=-\frac{y^2}{1+y}\leq 0$$

となるので、$(g_3(y)-y^3/6)(0)=(g_3(y)-y^3/6)'(0)=0$ より (40) が成り立つことがわかる。これを用いると、$(3/2)(J_1+J_2)$ は、(29) より

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}(J_1+J_2) &= -\frac{3}{4}\,\tilde{u}_n^2+\frac{3}{2}(npg_3(y_n)+nqg_3(z_n))\\ &\leq -\frac{3}{4}\,\tilde{u}_n^2+\frac{1}{4}(npy_n^3+nqz_n^3)\ =\ -\frac{3}{4}\,\tilde{u}_n^2+\frac{1}{4}\,\tilde{u}_n^2(y_n+z_n)\end{aligned}\tag{41}$$

と評価される。よって、(39), (41) より、

$$J_0=J_3'+\frac{3}{2}(J_1+J_2)\leq -\frac{1}{4}\,\tilde{u}_n^2+\frac{1}{4}\,\tilde{u}_n^2(y_n+z_n)-\frac{1}{2}(y_n+z_n)\tag{42}$$

となる。

(42) の右辺の真ん中の項の y_n+z_n は、係数が 0 以上なので上から評価すればよいが、3 番目の項は係数が負なので、下から評価しなければならず、それで難易度がだいぶ変わってしまう。まずは、y_n+z_n の上からの評価から。

$\tilde{u}_n$ は、$k=\mu_n+\tilde{u}_n\sigma_n\leq\alpha_n\leq\mu_n+t\sigma_n$ より

$$\tilde{u}_n\leq t\tag{43}$$

の上限があるので、

$$y_n+z_n=\tilde{u}_n\,\frac{q-p}{\sqrt{npq}}\leq\frac{t(q-p)}{\sqrt{npq}}$$

と評価でき、

$$n\geq\frac{4t^2(q-p)^2}{pq}\tag{44}$$

を満たす n に対しては、

$$y_n+z_n\leq\frac{t(q-p)}{\sqrt{4t^2(q-p)^2}}=\frac{t}{2|t|}\leq\frac{1}{2}\tag{45}$$

となり、よって

$$-\frac{1}{4}\,\tilde{u}_n^2+\frac{1}{4}\,\tilde{u}_n^2(y_n+z_n)\leq -\frac{1}{8}\,\tilde{u}_n^2$$

がいえる。

次は $-(y_n+z_n)/2$ の上からの評価。この場合、(43) に対応するような、n によらない $\tilde{u}_n$ の下限は存在しないが、

$$-\frac{1}{2}(y_n+z_n)=-\frac{\tilde{u}_n}{2}\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

であり、これはほぼ u の 1 次式なので、そのように評価する。(20) に従い、次のように n によらない場合分けを行って考える。

1. $u\leq 0$ の場合

   この場合は (20) より $\tilde{u}_n\leq 0$ で、$-\tilde{u}_n\leq 1/\sigma_n - u\leq 1/\sigma_1 - u$ なので ($\sigma_1=\sqrt{pq}$)、$q-p\geq 0$ より、

   $$-\frac{1}{2}\,\tilde{u}_n\,\frac{q-p}{\sqrt{npq}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1}\,-u\right)\frac{q-p}{\sqrt{npq}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1}\,-u\right)\frac{q-p}{\sqrt{pq}}$$

   と n によらない u の一次式でおさえられる。

2. $0\leq u\leq 1/\sigma_1$ の場合

   この場合は、(20) より $u-1/\sigma_1\leq u-1/\sigma_n\leq\tilde{u}_n\leq u$ なので、

   $$-\tilde{u}_n\leq\frac{1}{\sigma_1}\,-u\leq\frac{1}{\sigma_1}$$

   となり、よってこの場合は

   $$-\frac{1}{2}\,\tilde{u}_n\,\frac{q-p}{\sqrt{npq}}\leq\frac{1}{2\sigma_1}\,\frac{q-p}{\sqrt{npq}}\leq\frac{q-p}{2pq}$$

   と定数でおさえられる。

3. $u\geq 1/\sigma_1$ の場合

   この場合は、$\tilde{u}_n\geq u-1/\sigma_n\geq u-1/\sigma_1\geq 0$ なので、

   $$-\frac{1}{2}\,\tilde{u}_n\,\frac{q-p}{\sqrt{npq}}\leq 0$$

   と 0 でおさえられる。

$-\tilde{u}_n^2$ も、ほぼ $-u^2$ であるが、上と同じ場合分けで考える。

1. $u\leq 0$ の場合
   この場合は $\tilde{u}_n\leq u\leq 0$ なので、$-\tilde{u}_n^2\leq -u^2$ となる。
2. $0\leq u\leq 1/\sigma_1$ の場合
   この場合は $-\tilde{u}_n^2\leq 0$ と評価する。
3. $u\geq 1/\sigma_1$ の場合
   この場合は、$0\leq u-1/\sigma_1\leq u-1/\sigma_n\leq\tilde{u}_n$ なので、$-\tilde{u}_n^2\leq -(u-1/\sigma_1)^2$ と評価される。

以上をまとめると、(35), (44) を満たす n に対して、J_0 は、以下のようなもので評価されることになる。

$$J_0\leq h_2(u)=\begin{cases}-\dfrac{u^2}{8}-\dfrac{q-p}{2\sqrt{pq}}\left(u-\dfrac{1}{\sigma_1}\right) & (u\leq 0)\\ \dfrac{q-p}{2pq} & (0<u\leq 1/\sigma_1)\\ -\dfrac{1}{8}\left(u-\dfrac{1}{\sigma_1}\right)^2 & (u>1/\sigma_1)\end{cases}\tag{46}$$

なお、この評価は、$1\leq k\leq\alpha_n$ を仮定しているが、$k\leq 0,\ k\geq\alpha_n+1$ の u に対しては、$f_n^{(1)}(u)=0$ となり、その場合は $J_0=\log I_0=-\infty$ と見ることができるから、上の評価は、すべての u に対して成り立つことになる。これらは $|u|$ が大きいところでは u^2 の係数が $-1/8$ の 2 次式なので、$e^{h_2(u)}$ は u に関して可積分となり、これで $I_0=e^{J_0}$ が上からおさえられることになる。

結局、(35), (44) を満たす n に対して、

$$f_n^{(1)}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{S(n)}{S(k)S(n-k)}\,I_0\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{M_2}{M_1^2}\,e^{h_2(u)}\tag{47}$$

とおさえられることになり、この右辺は u に関して R 上可積分なので、これでルベーグ収束定理の $h_1(u)$ に相当するものが取れたことになる。

よって、ルベーグ収束定理と (12), (18), (36) により、

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Prob}\left\{\frac{x-\mu_n}{\sigma_n}\leq t\right\}\ =\ \lim_{n\to\infty}\left(q^n+\int_{\mathrm{R}}f_n^{(1)}(u)du\right)\ =\ \int_{\mathrm{R}}f_0(u)\chi_{(-\infty,t]}(u)du$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{t} f_0(u)du, \\
\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left\{\frac{x-\mu_n}{\sigma_n} < t\right\} &= \lim_{n\to\infty}\left(q^n + \int_{\mathrm{R}} f_n^{(2)}(u)du\right) = \int_{\mathrm{R}} f_0(u)\chi_{(-\infty,t]}(u)du \\
&= \int_{-\infty}^{t} f_0(u)du
\end{aligned}
$$

となり、これで (3), (9) が証明されたことになる。

7 最後に

本稿ではルベーグ収束定理を用いて、分布関数に関するド・モアブル＝ラプラスの中心極限定理の厳密な証明を紹介した。5 節の各点収束性に比べ、6 節の $h_1(u)$ の存在性はかなり面倒な不等式の連続であることがわかると思うが、解析学分野ではこのような作業はよくあることであり、そしてこのような不等式の積み重ねにより等号の成立を証明するのも標準的な手法である。

ただし、6 節の評価は、実は私にとってもそんなに易しいものではなく、実際 J_3 に関する評価は、7,8 回失敗した上でようやく得たもので、$h_2(u)$ がきれいな形ではなく、つぎはぎのようになっているのはそのためである。しかし、これも解析学分野ではよくあることである。

ちなみに、$f_n^{(1)}(u)$ でなく、$f_n^{(0)}(u)$ に対する $h_1(u)$ が取れればもっと話は早いのであるが、6 節の評価は $\tilde{u}_n \leq t$ という上限を実質的に使っているため $f_n^{(0)}(u)$ に対する $h_1(u)$ が作れたことにはなっておらず、それを作るのはもう一段難しい問題になる。そして、$f_n^{(0)}(u)$ にそのようなものが実際に作れるかどうかは、今のところは私にはわからない。

参考文献

[1] 竹野茂治「中心極限定理の証明」(2001)
`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/graduate/data/central.pdf`

[2] 日本数学会編「岩波 数学辞典 第 3 版」、岩波書店 (1985)