平成 13 年 6 月 21 日

$K_{3,3}$ と K_5 が平面グラフでないことの証明

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

教科書 p.96 例 3.6 に K_5 が平面グラフでないことの証明が載っているが、一箇所説明不足の点がある ($|E| \geq 7 \times 3/2$)。その話を含めて $K_{3,3}$ と K_5 が平面グラフでないことの証明を行う。

以下、R, $|E|$, $|V|$ 等の記号の意味については教科書参照のこと。

補題 1

平面グラフが単純グラフであるとき、$R \geq 2$ ならば

$$3R \leq 2|E|$$

証明

交差する辺のない単純グラフでは、外部領域も含め全ての領域が 3 本以上の辺に囲まれている。

そして、各辺は 2 つの領域を分けているから、各領域を囲む辺を全て数え上げると各辺を 2 度数えることになるので

$$\text{各領域を囲む辺の数の合計} = (\text{辺の数}) \times 2 \geq 3 \times (\text{領域の数})$$

となる。■

補題 2

三角形が含まれない単純平面グラフでは、$R \geq 2$ に対して

$$4R \leq 2|E|$$

証明

補題 1 の証明の論法により明らか (全ての領域が 4 本以上の辺に囲まれる)。■

例えば、平面 2 部グラフには三角形はない (奇数角形はない) ので、この不等式が成り立つ。

系 3

完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ は平面グラフではない。

証明

$K_{3,3}$ は $|E| = 9$, $|V| = 6$, $k = 1$ なので、もし平面グラフの形に書けたとすると、オイラーの公式により

$$R = k + 1 - |V| + |E| = 1 + 1 - 6 + 9 = 5$$

でなければならないが、補題 2 により

$$4R \leq 2|E|$$

でならなければならず、それは $4R = 20,\ 2|E| = 18$ に矛盾する。■

系 4

完全グラフ K_5 は平面グラフではない。

証明

上の証明で $|E| = 10,\ |V| = 5$ とし、補題 1 を使えば全く同様に証明できる。■

$K_{1,n},\ K_{2,n},\ K_4$ は明らかに平面グラフなので、$K_{m,n},\ K_n$ のうち平面グラフは $K_{1,n},\ K_{2,n},\ K_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ となる。

そして、逆に、一般のグラフが平面グラフである必要十分条件は、$K_{3,3}$ や K_5 を本質的に部分グラフとして含まないこと、であることがクラトウスキー (C.Kuratowski 1896–1980 ポーランド) によって示されている。

なお、上のような不等式を用いない図形的な考察による証明もある。そして、その証明を見ると、球面上でも $K_{3,3}$ や K_5 は交差せずに書くことは出来ないが、トーラス上では交差せずに書けることが分かる。