平成 13 年 6 月 28 日

オイラー閉路に関する定理の証明

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

教科書 p.97-98 に、全ての頂点が偶数次ならオイラーグラフであることの証明が載っているが、その証明はやや難しい。よって講義では、帰納法による構成的な証明を紹介したつもりであった (06/28 2001) が、その証明には穴があった。

よって、改めて厳密な証明を紹介する。

補題 1
全ての頂点の次数が偶数次ならば橋はない。

証明
もし、頂点 u_1 と u_2 を結ぶ辺 e が橋であるとすると、e を取り除いたグラフは連結でなくなる。そのグラフの u_1 を含む連結成分は、u_1 以外の頂点の次数は偶数のままで、u_1 の頂点のみが奇数次数となる。よって、それは握手補題 (教科書 p89 問題 3.1) に矛盾する。■

定理 2
全ての頂点が偶数次である連結なグラフはオイラーグラフである。

証明
辺の数 $|E|$ に関する帰納法で証明する。

[I] $|E| = 1$ のとき
定理の条件を満たすグラフは、この場合ループのみであり、これはもちろんオイラーグラフ。

[II] $|E| = k \geq 2$ のとき
$|E| = k - 1$ であるようなグラフに対しては、この定理は成り立っていると仮定する。

このグラフの一つの頂点 u_1 を考える。u_1 の次数は偶数なので少なくとも 2 本の辺がつながっている。その u_1 につながる辺の状態を次のように場合分けして考える。

(i) ループがある場合

(ii) (i) でなくて $\deg(u_1) = 2$ で u_1 から 2 重辺が出ている場合

(iii) (i) でも (ii) でもなくて $\deg(u_1) = 2$ である場合、つまり u_1 から他の 2 点への辺が出ている場合

(iv) (i)~(iii) ではなく u_1 から 3 重以上の辺、あるいは 2 重辺が 2 組以上出ている場合

(v) (i)~(iv) ではなく $\deg(u_1) \geq 4$ で、u_1 から 2 重辺は一つしか出ていない場合

(vi) (i)~(v) ではない場合、すなわち、$\deg(u_1) \geq 4$ で、全ての辺が異なる頂点に結ばれている場合

(i) この場合はそのループを取り除いても、各頂点の次数が偶数であること、連結であることには変わりはなく、辺の数だけが 1 減る。よって、帰納法の仮定によりそのグラフはオイ

ラーグラフである。そのオイラー閉路が u_1 を通るときに、取り除いたループを通るようにすればそれは元のグラフのオイラー閉路になるので、この場合はオイラー閉路であることがわかる。

(ii) u_1 から 2 重辺が一つ u_2 に出ている場合を考える。この場合は、このグラフからこの 2 重辺と u_1 を取り除き、u_2 に一つループをつけると、u_2 の次数は変化なく、連結性も変わらず、辺の数が一つ減る。よって、帰納法の仮定によりそのグラフはオイラーグラフとなり、そのオイラー閉路における付け加えたループの箇所を、元の 2 重辺を通る閉路に変えれば元のグラフのオイラー閉路が構成できる。

(iii) u_1 から u_2, u_3 への辺 e_2, e_3 が出ているとする。このときは、このグラフから e_2, e_3 と u_1 を取り除き、新たに u_2, u_3 に辺 e' を付け加える。そうすると、u_2, u_3 の次数に変化はなく、連結性も変わらず、辺の数が一つ減る。よって帰納法の仮定によりそれはオイラーグラフであり、その閉路の (u_2, e', u_3) (または (u_3, e', u_2)) を $(u_2, e_2, u_1, e_3, u_3)$ (または $(u_3, e_3, u_1, e_2, u_2)$) で置き換えれば元のグラフのオイラー閉路ができる。

(iv) まず、u_1 から u_2 への 3 重辺がある場合を考える。この場合はそのうち 2 つの辺を (ii) と同様にループで置き換えればよい (すなわち、連結性、全ての頂点の次数が偶数であることは変わらず、辺の数が 1 減り、帰納法の仮定によりオイラーグラフとなり、そのオイラー閉路でその置き換えを逆にして元のグラフのオイラー閉路が作れる) 。

次に、u_1 から u_2 への 2 重辺と、u_3 への 2 重辺の 2 組が出ている場合はそれぞれから 1 辺ずつ取り除いて (iii) のように u_2 と u_3 を結ぶ辺を作ればよい (連結性、次数の偶数性は変化なし)。

(v) 次数は $\deg(u_1) \geq 4$ なので、u_1 から u_2 への 2 重辺以外に u_1 から他の頂点 u_3 への辺 e もある。この e と 2 重辺から 1 本を取り除いて (iii) のように u_2 と u_3 を結ぶ辺を作れば良い。連結性が問題となるが、e は補題 1 により橋ではなく、これを取り除いても連結のまま、そして、2 重辺から 1 本取り除いても連結性は変わらないので OK.

(vi) u_1 から u_2, u_3, u_4, u_5 へそれぞれ辺 e_2, e_3, e_4, e_5 が出ているとする。この場合も (iii) のようにしたいが、例えば e_2, e_3 を取り除いて u_2, u_3 を結ぶ辺を付け加えたときに、グラフが連結でなくなる場合が問題となる。

もし、e_2, e_3 を取り除いて u_2, u_3 を結ぶ辺 e' をつけたときに連結であるか、あるいは、e_4, e_5 を取り除いて u_4, u_5 を結ぶ辺 e'' をつけたときに連結であるならば、それは (iii) と同様に考えれば帰納法の仮定により OK となる。

よって、後は e_2, e_3 を取り除いて e' をつけても、e_4, e_5 を取り除いて e'' をつけても連結でなくなる場合を考えれば良い。

この場合、まず、e_2, e_3 を取り除いたとき、e' をつけなくても u_2, u_3 を結ぶ別なパスが存在することをまず示す。

元のグラフに橋はないので、e_2 を取り除いても連結のまま。よって、e_3 を取り除いてはじめて連結でなくなるので、この場合その連結成分は 2 つであり、u_3 は u_1 の属さない連結成分に含まれる。同じ理由で u_2 も u_1 の属さない連結成分に含まれるので結局、u_2 と u_3 は同じ連結成分に入ることになるので、u_2 と u_3 を結ぶパスが存在する。

同じ理由で e_4, e_5 を取り除いても、u_4, u_5 を結ぶ別なパスが存在することになる。

ということは、元のグラフから e_2 と e_4 を取り除くと、それは連結性は失われないことになる。後は u_2 と u_4 を結ぶ辺を付け加えれば (iii) と同様にして帰納法により言えることになる。

■

やや場合分けが繁雑になるが、連結性のことを考え、このようにせざるを得なかった。他の、これよりスマートな証明方法も多分たくさんあるだろうと思われる。

例えば次のような証明も思いついた。こちらの方が、より具体的な一筆書きの問題の解答に近い。帰納法の [II] から先を進める。

証明

[II] $|E| = k \geq 2$ のとき

$|E| < k$ であるようなグラフに対しては、この定理は成り立っていると仮定する。

u_1 からループが出ている場合は上と同じようにループを取れば帰納法の仮定を使ってオイラー閉路を構成できる。

そうでない場合は u_1 から別な点 u_2 へ出る辺 e がある。e は補題 1 により橋ではないので、この e を抜いても u_1 と u_2 を結ぶパスが存在する。そのパスと e をつなげば u_1 から出て u_1 に戻る一つのサイクルができる。元のグラフからこのサイクルを削除すると ... あっ、だめ。連結でなくなる。■