2023 年 06 月 19 日

全微分可能性とそれに関連する話

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

2 変数 (および 3 変数以上) の関数について、工学部の講義では偏微分の計算や接平面、1 次近似式としての全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy \tag{1}$$

などは説明するが、「全微分可能性」について触れることはあまりないし、そもそも工学部向けの教科書は「全微分可能性」について書いてなかったりもする。

しかし、「全微分可能性」は、1 変数の微分可能性に対応する多変数関数の「微分可能性」を示すものであるし、講義では説明しないが接平面の存在を保証したり、合成関数の微分の公式にも関係するものでもあるから、それなりに重要な概念であり、可能であれば工学部の学生も知っておいた方がいいものだと思う。そこで、本稿ではこの「全微分可能性」とその周辺の話題についていくつか取り上げる。

また、「複素関数論」で出てくる複素関数の複素微分可能性も、この全微分可能性と深い関係がある。本稿ではそれについても解説する。

2 微分可能性の書き換え

1 変数関数 $f(x)$ が $x=a$ で「微分可能である」とは、

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \tag{2}$$

の極限が存在することを指す。

しかし、この形だと例えば合成関数の微分を厳密に証明するのに都合が悪いといった理由で、理論的な面を重視する本では、次の形で書かれることもある。

「x が a に十分近いところ、つまりある $\delta>0$ に対して $|x-a|<\delta$ の範囲では

$$f(x)-f(a) = b(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a) \tag{3}$$

となるような定数 b と、$h=0$ で連続で $\varepsilon(0)=0$ となる関数 $\varepsilon(h)$ が存在する。」

この (3) は、$x\neq a$ では、

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=b+\varepsilon(x-a)$$

を意味し、これは (2) の極限が存在し、その極限値が b であることを意味するから、(2) と (3) が同等であり、$b=f'(a)$ となることがわかる。(3) は、f の微分可能性を $\varepsilon(h)$ の連続性に置き換えたもの、と見ることもできる。

なお、この書き換えによる、合成関数の微分の公式の厳密な証明については、例えば [3] を参照のこと。

例えば $f(x)=x^3$ で $a=2$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x)-f(2) &= x^3-2^3 = (x-2)(x^2+2x+4) \\ &= (x-2)\{(4+4+4)+(x^2+2x-8)\} \\ &= 12(x-2)+(x-2)^2(x+4) \end{aligned}$$

となるので、(3) の b は $b=12$ で、$\varepsilon(x-2)$ は、

$$\varepsilon(x-2)=(x-2)(x+4)=(x-2)^2+6(x-2)$$

すなわち $\varepsilon(h)=h^2+6h$ となる。

3 2 変数関数の極限

次に 2 変数関数 $f(x,y)$ の極限や連続性の定義について考える。

- $x\to a$ のときの極限
$$\lim_{x\to a}f(x,y)=c \tag{4}$$
は、普通の 1 変数関数の極限と同じ。この場合は y は定数と考え、x だけを動かして a に近づけたときの極限が c となること。よってこの場合 c は、各 y に対して極限が存在すれば y の関数 $c=c(y)$ となる。

- $y\to b$ のときの極限
$$\lim_{y\to b}f(x,y)=c$$
も上と同じで、x を固定したときの y の極限で $c=c(x)$ となる。

- $(x, y) \to (a, b)$ のときの極限

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = c \tag{5}$$

は、x と y を両方動かして、$(x, y) \to (a, b)$ としたときの極限。どのように近づいても一定の値に収束するときに極限が存在すると考える。この場合 c は定数となる。

なお、1 変数の極限と同じように、$(x, y) \neq (a, b)$ を保ちながら近づくとするが、$y \neq b$ であれば $x = a$ になることも可能だし、$x \neq a$ であれば $y = b$ になることも可能。

- $f(x, y)$ は、

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

となるとき (a, b) で「連続である」という。

2 変数の極限 (5) は、

$$\lim_{x\to a, y\to b} f(x, y) = c$$

と書かれることもあるが、これは 2 重極限

$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x, y)\right\},\ \lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x, y)\right\} \tag{6}$$

とは意味が異なり、実際にこれらは等しいとは限らない。

また、この 2 変数の極限 (5) において、$(x, y) \to (a, b)$ は、

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to +0$$

と同じ意味になるが、しかし極限の記述については注意が必要である。すなわち、(5) を

$$\lim_{r\to+0} f(x, y) \quad \left(r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right) \tag{7}$$

と書いてもよいかというと、それは少し問題があると思う。

上に書いた、(5) と (6) の違い、および (5) と (7) の違いについて例を用いて説明しよう。

まずは (5) と (6) の違いから。今、$x \geq 0$, $a > 0$ に対して、$f_0(x, a)$ を

$$f_0(x, a) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} & (0 \leq x \leq a), \\ 1 & (x > a) \end{cases} \tag{8}$$

と定める。これは x については $x \geq 0$ で連続で、任意の $a > 0$ に対して

$$\lim_{x\to+0} f_0(x, a) = 0 \tag{9}$$

となる。これに対し、2 変数関数 $f_1(x,y)$ を、

$$f_1(x,y) = \begin{cases} f_0(|x|,|y|) & (y \neq 0), \\ 1 & (y = 0) \end{cases} \tag{10}$$

と定めると、$y \neq 0$ に対しては (9) より

$$\lim_{x\to 0} f_1(x,y) = \lim_{x\to 0} f_0(|x|,|y|) = 0 \tag{11}$$

となる。一方、$x \neq 0$ に対して $y \to 0$ とすると、(8) より $|y| < |x|$ では $f_0(|x|,|y|) = 1$ なので、$x \neq 0$ では

$$\lim_{y\to 0} f_1(x,y) = \lim_{y\to 0} f_0(|x|,|y|) = 1 \tag{12}$$

となる。よって、(11), (12) より $f_1(x,y)$ の 2 重極限は

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f_1(x,y)\right\} = 1, \quad \lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f_1(x,y)\right\} = 0$$

となって両者は一致しない。なお、(8), (10) より、

$$\begin{cases} f_1(0,y) = f_0(0,|y|) = 0 \quad (y \neq 0) \\ f_1(x,0) = 1 \quad (x \neq 0) \end{cases}$$

なので、$(x,y) = (0,0)$ の近くには、f_1 が 0 になる点と 1 になる点がいくらでも存在し、よって $f_1(x,y)$ は $(0,0)$ では連続ではないことがわかる。

では、$f(x,y)$ が (a,b) で連続であれば、2 重極限 (6) も、(5) の極限である $f(a,b)$ に一致するだろうか。それについては、次のような例を考える。

$$f_2(x,y) = \begin{cases} y\sin\left|\dfrac{1}{x}\right| & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とすると、$x \to 0$ のとき $|1/x| \to \infty$ となるので、$\sin|1/x|$ は $[-1,1]$ の範囲を限りなく振動し、極限を持たない。よって、$y \neq 0$ に対し、

$$\lim_{x\to 0} f_2(x,y)$$

は存在しない。一方、$\sin|1/x|$ は有界なので、

$$\lim_{y\to 0} f_2(x,y) = 0$$

となる。そして (x,y) が $(0,0)$ の近くの場合、例えば、$|x| < \delta$, $|y| < \delta$ では、

$$|f_2(x,y)| = |y|\left|\sin\left|\frac{1}{x}\right|\right| \leq |y| < \delta$$

となり、$(0,0)$ の近くで $|f_2(x,y)|$ はいくらでも小さくできるので、

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 = f_2(0,0)$$

となる。よって、$f_2(x,y)$ は、$(x,y)=(0,0)$ で連続であるが、

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} f_2(x,y)\right\}$$

が存在しない例になっている。つまり、(a,b) で連続であっても 2 重極限 (6) は $f(a,b)$ に一致するとは限らない。この $f_2(x,y)$ では

$$\lim_{x\to 0}\left\{\lim_{y\to 0} f_2(x,y)\right\} = 0$$

となっているが、f_2 を少し変えれば (6) の両方が存在しないものも作れる。

$$f_3(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left|\dfrac{1}{x}\right|\sin\left|\dfrac{1}{y}\right| & (x\neq 0,\ \ y\neq 0), \\ 0 & (x=0 \text{ または } y=0) \end{cases}$$

とすると、

$$\lim_{x\to 0} f_3(x,y)\ (y\neq 0),\quad \lim_{y\to 0} f_3(x,y)\ (x\neq 0)$$

はどちらも存在しないが、$|x|<\delta$, $|y|<\delta$ ならば、

$$|f_3(x,y)| \leq |x+y| \leq |x|+|y| < 2\delta$$

なので、$|f_3(x,y)|$ は $(0,0)$ の近くでいくらでも小さくでき、よって $f_3(x,y)$ は (0,0) で連続であるが、(6) の両方が存在しない例となっている。

一方で、$f(x,y)$ が (a,b) で連続で、

$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\} = \alpha \ \ \lim_{y\to b}\left\{\lim_{x\to a} f(x,y)\right\} = \beta$$

のように 2 重極限が存在すれば、$\alpha = f(a,b)$, $\beta = f(a,b)$ となることが言える。(両方存在する必要はなく、一方が存在すればそれは $f(a,b)$ になる。) つまり、$f(x,y)$ が (a,b) で連続であれば、α や β が存在しない例は作れても、α や β が存在してそれが $f(a,b)$ と異なるような例を作ることはできない。これを以下に示そう。α の方のみ考えれば十分である。

今、$f(x,y)$ が (a,b) で連続で、

$$\lim_{x\to a}\left\{\lim_{y\to b} f(x,y)\right\} = \alpha$$

の極限は存在するが、それが $f(a,b)$ とは違うと仮定し、矛盾を示す (背理法)。$f(x,y)$ は (a,b) で連続なので (a,b) の近くでは $f(x,y)$ の値はいくらでも $f(a,b)$ に近づけることができる。よって、$|\alpha - f(a,b)| > 0$ より、

「$|x-a|<\delta,\ |y-b|<\delta$ の (x,y) に対し

$$|f(x,y)-f(a,b)|<\frac{1}{2}|\alpha-f(a,b)| \tag{13}$$

となる」

ような正数 δ を取ることができる。この (13) で $y\to b$ とすると

$$|\lim_{y\to b}f(x,y)-f(a,b)|\leq\frac{1}{2}|\alpha-f(a,b)|$$

が成り立つ。さらにこの式で $x\to a$ とすれば

$$|\alpha-f(a,b)|\leq\frac{1}{2}|\alpha-f(a,b)|$$

となり、これは $\alpha=f(a,b)$ でしか成り立たず、$\alpha\neq f(a,b)$ の仮定に矛盾する。よって、$\alpha=f(a,b)$ であることが示されたことになる。

次は、(5) と (7) の違いについて考える。これは、(5) の「2 変数の極限」を、(7) の「1 変数の極限」のように書くと誤解を招きかねない、という話である。

$f(x,y)$ は 2 変数の関数だが、$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ と、θ を使って、極座標的に

$$\begin{cases} x=a+r\cos\theta, \\ y=b+r\sin\theta \end{cases} \quad (0\leq\theta<2\pi,\ r>0)$$

のようにして、$(x,y)\neq(a,b)$ では (x,y) と (r,θ) を 1 対 1 に変数変換できる。これにより

$$f(x,y)=f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)=g(r,\theta)\quad((x,y)\neq(a,b)) \tag{14}$$

と書くことにすると、(7) の極限は、

$$\lim_{r\to+0}f(x,y)=\lim_{r\to+0}f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)=\lim_{r\to+0}g(r,\theta)$$

であるようにも見えてしまうが、この最後の極限は、(4) で説明した 2 変数関数の、片方の変数 θ を固定した極限になってしまう。

(5) は (x,y) がどの方向から (a,b) に近づいても $f(x,y)$ が c に近づくことを意味するので、当然この最後の極限も含んでいて

$$\lim_{r\to+0}g(r,\theta)=\lim_{r\to+0}f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)=c \tag{15}$$

となる。一方、すべての θ に対して (15) が成り立ったとしても (5) が成り立つとは限らない。そのような例を次に示す。$r>0,\ 0\leq\theta<2\pi$ に対し、

$$g_4(r,\theta)=f_0(r,2\pi-\theta)$$

とし、この $g = g_4$ (および $(a,b) = (0,0)$) に対応する (14) の (x,y) の関数 $f(x,y)$ を $f_4(x,y)$ とする ($(x,y) \neq (0,0)$)。すると、(9) より、すべての $0 \leq \theta < 2\pi$ に対し

$$\lim_{r\to+0} g_4(r,\theta) = \lim_{r\to+0} f_0(r, 2\pi - \theta) = 0$$

となるが、

$$C_4:\ \ r = r_4(\theta) = \frac{1}{2}(2\pi - \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

という曲線を考えると、$r_4(\theta)$ は θ に関して減少し、$\theta \to 2\pi - 0$ で 0 に近づくので、この曲線上の点は $\theta \to 2\pi - 0$ に対してらせん状に原点に近づいていく。

しかし、この C_4 上では、$g_4(r,\theta)$ は、

$$g_4(r,\theta) = f_0\left(\frac{1}{2}(2\pi - \theta), 2\pi - \theta\right) = \frac{1}{2}$$

となり、よって

$$\lim_{\theta\to 2\pi-0} g_4(r_4(\theta),\theta) = \frac{1}{2}$$

となる。すなわち、g_4 は各固定した θ に関して $r \to +0$ とすると 0 に、C_4 に沿っては 1/2 に近づくことになり、よって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_4(x,y)$$

は存在しないことになる。つまり、すべての θ に対して (15) が成り立ったとしても、(5) が成り立つとは限らないことになる。

より細かく考えれば、(5) の方は、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、

「$|x-a| < \delta,\ |y-b| < \delta$ ならば $|f(x,y) - c| < \varepsilon$」

となるような正数 $\delta > 0$ が取れるということを意味するが、この「$|x-a| < \delta,\ |y-b| < \delta$」の条件は、

$$\left\{\begin{array}{l} |x-a| + |y-b| \leq \sqrt{2}\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \\ \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq |x-a| + |y-b| \end{array}\right.$$

より、「$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$」という条件に書き直すことができる。すなわち、

「$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ ならば $|f(x,y) - c| < \varepsilon$」

とできるので、よって r, θ で書けば

「$0 < r < \delta$ ならば $|g(r,\theta) - c| < \varepsilon$」

という形になる。問題は、これが「すべての θ に対して成り立つ必要がある」ことで、すなわち、

$$「0<r<\delta \text{ ならば } \sup_{0\le\theta<2\pi}|g(r,\theta)-c|<\varepsilon」$$

であることであるから、つまり (5) と同値なのは、「すべての θ に対して (15) が成り立つこと」ではなく、「(15) が θ に対して一様に成り立つこと」、すなわち

$$\lim_{r\to+0}\left(\sup_{0\le\theta<2\pi}|g(r,\theta)-c|\right)=0$$

が (5) と同値だということになる。こう見ると、これと (15) の違いはよくわかるであろう。このように考えると、(5) を (7) のような「1 変数の極限」のように書くことは危険だといえるだろう。

なお、$f_4(x,y)$ の例で、$f_4(0,0)=0$ とすれば、$f_4(x,y)$ は、各 θ 方向にはいずれも連続、すなわち

$$\lim_{r\to+0}f_4(r\cos\theta,r\sin\theta)=f_4(0,0)=0$$

であるが、2 変数関数としては $(0,0)$ で連続ではない、という例にもなっている。

4 全微分可能性

ようやく本稿の本題である「全微分可能性」について説明する。

まず、その前に偏微分の方から説明する。偏微分は、一つの変数以外を定数と見て、1 変数関数のように考えて微分することを指す。例えば、2 変数関数 $f(x,y)$ に対しては、

$$\begin{aligned}
f_x(a,b) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x},\\
f_y(a,b) &= \lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(a,b+\Delta y)-f(a,b)}{\Delta y}
\end{aligned}$$

の極限が存在するときに、それぞれ (a,b) で 「x に関して偏微分可能」、「y に関して偏微分可能」と言う。これは 1 変数関数の極限である。これを (3) のように書くと、

$$\begin{aligned}
f(x,b)-f(a,b) &= A(x-a)+(x-a)\varepsilon_1(x-a), \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=\varepsilon_1(0)=0,\\
f(a,y)-f(a,b) &= B(y-b)+(y-b)\varepsilon_2(y-b), \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h)=\varepsilon_2(0)=0
\end{aligned}$$

となる ($A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$)。これらの微分可能性を、x, y だけでなく全方向に広げたものが「全微分可能性」である。これは、極限の形では表現できないので、最初から $\varepsilon(h)$ の方の形で表現される:

(a,b) の近くの x,y に対して、すなわちある正数 $\delta>0$ に対する $|x-a|<\delta$, $|y-b|<\delta$ となる (x,y) に対して、

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(a,b) &= A(x-a)+B(y-b) \\ &\quad +\varepsilon(x-a,y-b)\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \end{aligned} \tag{16}$$

となるような定数 A, B, 関数 $\varepsilon(h,k)$ があり、

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=\varepsilon(0,0)=0 \tag{17}$$

となるとき、「$f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能」という。

この (16) で $y=b$ とすると、

$$\begin{aligned} f(x,b)-f(a,b) &= A(x-a)+\varepsilon(x-a,0)|x-a| \\ &= A(x-a)+\varepsilon(x-a,0)\frac{x-a}{|x-a|}(x-a) \end{aligned}$$

となり、

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x-a,0)\frac{x-a}{|x-a|}=0$$

なので、これは $f(x,y)$ が (a,b) で x に関して偏微分可能で、$A=f_x(a,b)$ となることを示している。同様に (16) は y に関する偏微分可能性も含み、$B=f_y(a,b)$ となる。

さらに、$(x,y)\neq(a,b)$ に対して $x=a+r\cos\theta$, $y=b+r\sin\theta$ $(r>0, 0\leq\theta<2\pi)$ とすると (16) は

$$\begin{aligned} f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b) &= \{c+\varepsilon(r\cos\theta,r\sin\theta)\}r \\ (c=f_x(a,b)\cos\theta+f_y(a,b)\sin\theta) & \end{aligned}$$

となり、よって

$$\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b)}{r}=c+\varepsilon(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

より、f の θ 方向の変化率が c となる。そしてこれは f の (a,b) での「接平面」の存在を保証する。なお、前節で述べたように、各 θ に対して

$$\lim_{r\to+0}\varepsilon(r\cos\theta,r\sin\theta)=0$$

が言えたとしても、(17) が言えるわけではない。だから、「全微分可能性」は「接平面の存在」よりも強い概念であり、よって例えば、(a,b) で各 θ 方向の変化率 (微分係数) が存在して 0 であるが、(a,b) で全微分可能ではない関数も作れる。

$g_5(r,\theta)=rg_4(r,\theta)$ に対する $f=f_5(x,y)$ ($f_5(0,0)=0$) がそのひとつであり、これは (0,0) で水平な接平面 $z=0$ を持つ、すなわちすべての方向に傾きが 0 であるが、全微分可能ではないことが容易にわかる。

なお、数学辞典 [1] に書かれている「全微分可能性」は、一般の n 変数関数に対する形で書いてあるのだが、それを $n=2$ について書けば以下のようになる:

> $r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ とするとき、$\Delta f=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)$ が $r\to 0$ のときに
> $$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+o(r)\quad\left(\frac{o(r)}{r}\to 0\right)$$
> となる A, B が存在するとき、f は (a,b) で全微分可能

ただ、この書き方だと、$o(r)$ のところが問題で、「$r\to +0$ のときに」という言い方だと、「各 θ に対して」とも見えなくもなく、正しく 2 変数 (元の数学辞典では多変数) の極限として 0 になる、あるいは θ に関して一様に 0 になる、のように書くべきだろうと思う。残念ながら新版の [2] でもそこは改善されていない。

5 全微分可能性の十分条件

(16), (17) による全微分可能性の定義は、具体的な関数に対してそれが成り立つことを検証するのはあまり容易ではない。本節では、それに代わって良く用いられる、全微分可能性の十分条件をひとつ紹介する。

定理 1

> $f(x,y)$ が (a,b) の近くで x, y に関して偏微分可能で、$f_x(x,y)$ が (a,b) で連続ならば、$f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能。

この命題は、「$f_x(x,y)$ の連続性」を「$f_y(x,y)$ の連続性」に変えても成り立つ。むしろ対称に「$f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ が連続ならば」という条件で述べている本も少なくないが、実際には片方だけ連続ならばよい。さらにこれは n 変数にも一般化できる。

- n 変数関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ が $(a_1,\ldots,a_n)$ で「全微分可能」であるとは、十分小さい $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n$ に対して
$$\begin{aligned}&f(a_1+\Delta x_1,\ldots,a_n+\Delta x_n)-f(a_1,\ldots,a_n)\\&=\sum_{j=1}^{n}A_j\Delta x_j+\varepsilon(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)\sqrt{(\Delta x_1)^2+\cdots+(\Delta x_n)^2}\end{aligned}$$

で、

$$\lim_{(h_1,\dots,h_n)\to(0,\dots,0)} \varepsilon(h_1,\dots,h_n) = \varepsilon(0,\dots,0) = 0$$

となるような定数 A_j $(j=1,\dots,n)$ と関数 $\varepsilon(h_1,\dots,h_n)$ が存在すること。

- $f(x_1,\dots,x_n)$ が $(a_1,\dots,a_n)$ の近くで $x_1,\dots,x_n$ に関して偏微分可能で、かつ $f_{x_2},\dots,f_{x_n}$ が $(a_1,\dots,a_n)$ で連続ならば、$f(x_1,\dots,x_n)$ は $(a_1,\dots,a_n)$ で全微分可能。

つまり、偏導関数すべてが連続である必要はなく、ひとつ以外が連続であれば全微分可能となる。多変数関数の本に載っている証明は、通常 $n=2$ の場合のものであり、$n\geq 3$ も同様にできる、とすることが多いが、それだと $n\geq 3$ の場合の証明が少しわかりにくい。よって本稿では $n=3$ の場合の証明を紹介し、それにより $n=2$ の場合、および $n\geq 4$ の場合の証明を想像しやすくする。

3 変数関数 $f(x,y,z)$ が (a,b,c) の近く、具体的にはある $\eta>0$ に対して

$$D=\{(x,y,z);|x-a|<\eta,\ |y-b|<\eta,\ |z-c|<\eta\}$$

で x,y,z について偏微分可能で、$f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$ が (a,b,c) で連続であるとする。今、

$$\Delta f = f(a+\Delta x, b+\Delta y, c+\Delta z) - f(a,b,c) \quad (|\Delta x|<\eta,\ |\Delta y|<\eta,\ |\Delta z|<\eta)$$

を

$$\begin{aligned}
\Delta f &= I_1+I_2+I_3,\\
I_1 &= f(a+\Delta x, b+\Delta y, c+\Delta z) - f(a+\Delta x, b+\Delta y, c),\\
I_2 &= f(a+\Delta x, b+\Delta y, c) - f(a+\Delta x, b, c),\\
I_3 &= f(a+\Delta x, b, c) - f(a,b,c)
\end{aligned}$$

のように分けて考える。ここで、平均値の定理を使用する。平均値の定理は、1 変数関数 $h(x)$ が $[a,b]$ で連続で、(a,b) で微分可能であれば、

$$\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = h'(c), \quad a<c<b$$

となる c が少なくとも一つ存在する、という定理である。ここで、θ を

$$\theta = \frac{c-a}{b-a}$$

とすれば $0<\theta<1$ で、$c=a+\theta(b-a)$ と書くことができる。本稿ではこちらの形で使用する。すなわち、$h(x)$ が $|x-a|<\delta$ で微分可能であれば、そこでは連続でもあり、$|\Delta x|<\delta$ に対し

$$h(a+\Delta x)-h(a) = h'(a+\theta\Delta x)\Delta x$$

で $0<\theta<1$ となる θ が少なくともひとつ存在する。

さて、$f(x,y,z)$ は D で z について偏微分可能だから、z については連続でもある。よって z について平均値の定理を用いることができ、

$$\begin{aligned} I_1 &= f_z(a+\Delta x, b+\Delta y, c+\theta_1\Delta z)\Delta z \ = \ f_z(a,b,c)\Delta z + I_4\Delta z, \\ I_4 &= f_z(a+\Delta x, b+\Delta y, c+\theta_1\Delta z) - f_z(a,b,c) \end{aligned}$$

で $0<\theta_1<1$ となる θ_1 がとれる。なお、この θ_1 は Δz だけでなく Δx, Δy にも依存するが、その存在と $0<\theta_1<1$ は保証される。

同様に I_2 に対しても y に関する平均値の定理を用いると、

$$\begin{aligned} I_2 &= f_y(a+\Delta x, b+\theta_2\Delta y, c)\Delta y \ = \ f_y(a,b,c)\Delta y + I_5\Delta y, \\ I_5 &= f_y(a+\Delta x, b+\theta_2\Delta y, c) - f_y(a,b,c) \end{aligned}$$

で $0<\theta_2<1$ となる θ_2 がとれる。この θ_2 も Δy だけでなく Δx にも依存する。

また、I_3 に対しては、x に関する (a,b,c) での偏微分可能性により、

$$I_3 = f_x(a,b,c)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x, \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h) = \varepsilon_1(0) = 0$$

となる関数 $\varepsilon_1(h)$ がとれる。これらにより、Δf は、

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_x(a,b,c)\Delta x + f_y(a,b,c)\Delta y + f_z(a,b,c)\Delta z + rI_6, \\ I_6 &= \frac{\Delta x}{r}\,\varepsilon_1(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\,I_5 + \frac{\Delta z}{r}\,I_4, \quad r \ = \ \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2} \end{aligned}$$

と書けることになる。あとは、$(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\to(0,0,0)$ のときに、$I_6\to 0$ となることを示せばよい。

$\varepsilon_1(\Delta x)$ は当然 0 に収束し、I_5 も、$0<\theta_2<1$ より

$$(a+\Delta x, b+\theta_2\Delta y, c)\to(a,b,c)$$

となることと f_y が (a,b,c) で連続であることから $I_5\to 0$ となる。I_4 も、$0<\theta_1<1$ と

$$(a+\Delta x, b+\Delta y, c+\theta_1\Delta z)\to(a,b,c)$$

と f_z の (a,b,c) での連続性から $I_4\to 0$ となる。よって、

$$|I_6| = \left|\frac{\Delta x}{r}\,\varepsilon_1(\Delta x) + \frac{\Delta y}{r}\,I_5 + \frac{\Delta z}{r}\,I_4\right| \leq |\varepsilon_1(\Delta x)| + |I_5| + |I_4| \to 0$$

が言えるので、これで全微分可能であることが証明されたことになる。

この証明を見れば、n 変数関数の場合も、$(n-1)$ 個の偏導関数の連続性と、1 個の偏微分可能性があれば、Δf を I_1, I_2, I_3 と同じように分けることで同じように証明できること

がわかると思う。当然上の $n=3$ の場合も、f_x と f_y、あるいは f_x と f_z が連続であっても構わない。

関数の連続性は比較的容易に判定できるので、全微分可能性を検証するにはこの十分条件の方が用いられることが多い。

6 合成関数の微分の証明

全微分可能性の応用に一つに、合成関数の微分の公式の証明がある。

定理 2

$x=x(t)$, $y=y(t)$ が $t=t_0$ で微分可能で、$x(t_0)=a$, $y(t_0)=b$ で、$f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で全微分可能であるとき、合成関数

$$g(t)=f(x(t),y(t))$$

は $t=t_0$ で微分可能で、その微分係数 $g'(t_0)$ は、

$$g'(t_0)=f_x(a,b)x'(t_0)+f_y(a,b)y'(t_0) \tag{18}$$

となる。

なお、通常は微分係数ではなく、導関数、すなわちある範囲の t に関する定理として述べられ、(18) も、

$$\frac{dg}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{19}$$

のように書かれることが多い。さらに、定理の条件も「全微分可能」ではなく、十分条件である「偏微分可能で偏導関数が連続」という形で述べられることが多い。[1]

しかし、この合成関数では t の変換に伴い x,y の両方が変化するためむしろ f の全微分を考えるのが自然であるし、さらに (19) の式は (1) の式にも似ているため、全微分を意識させるこの定理 2 の形の方が本来はいいだろうと思う。

では定理 2 の証明を行う。f の (a,b) での全微分可能性より、(a,b) の近くで、

$$\begin{aligned}
f(x,y)-f(a,b) &= f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\\
&\quad +\varepsilon(x-a,y-b)\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},\\
\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k) &= \varepsilon(0,0) = 0
\end{aligned}$$

[1] そのように書くことで、その本では「全微分可能性」を定義、説明しなくて済むわけである。

となる。$a = x(t_0)$, $b = y(t_0)$ より、

$$
\begin{aligned}
g(t) - g(t_0) &= f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0)) = f(x(t), y(t)) - f(a, b) \\
&= f_x(a,b)(x(t) - a) + f_y(a,b)(y(t) - b) \\
&\quad + \varepsilon(x(t) - a, y(t) - b)\sqrt{(x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2} \\
&= f_x(a,b)(x(t) - x(t_0)) + f_y(a,b)(y(t) - y(t_0)) \\
&\quad + \varepsilon(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))\sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}
\end{aligned}
$$

となり、よって

$$
\begin{aligned}
\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} &= f_x(a,b)\,\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + f_y(a,b)\,\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\
&\quad + \varepsilon(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))\,\frac{t - t_0}{|t - t_0|} \\
&\quad \times \sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2}
\end{aligned}
$$

と書ける。ここで、$t \to t_0$ とすれば、平方根の部分は

$$
\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}
$$

に収束するため有界であり、よって ε を含む項は 0 に収束し、この右辺は (18) の右辺に収束する。これで定理 2 が示されたことになる。

7 複素微分可能性との関係

複素関数 $w = f(z)$ は、複素数 $z = x + iy$ から複素数 $w = u + iv$ への関数であり、$x + iy$ と (x, y) は 1 対 1 に対応するので、$z = x + iy$ の実数値関数である $u = u(x + iy)$, $v = v(x + iy)$ は (x, y) の 2 変数関数と見ることもできる。今、$z = x + iy$ の関数を (x, y) の関数と見たものには ^ をつけて書くことにすると、

$$
f(z) = f(x + iy) = \hat{f}(x, y) = u(x + iy) + iv(x + iy) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)
$$

となる。

良く知られているように、複素関数では「正則性」が非常に重要である。$f(z)$ が領域 D 上で「正則」であるとは、D 内の各 z で f が「複素微分可能」であることを意味する。「複素微分可能」や「極限」、「(複素) 連続性」の定義は以下の通り。

- 極限: 複素関数の「極限」

$$
\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \quad (z_0 = a + ib,\ w_0 = u_0 + iv_0)
$$

は、2 変数関数の極限

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\hat{f}(x,y)=u_0+iv_0 \tag{20}$$

により定める。これは、$\hat{f}=\hat{u}+i\hat{v}$ とすると

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\hat{u}(x,y)=u_0 \text{ かつ } \lim_{(x,y)\to(a,b)}\hat{v}(x,y)=v_0$$

であることと同値となる。

- 連続性: $f(z)$ が z_0 で「(複素) 連続」であるとは、z_0 の周辺で $f(z)$ が定義され、

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$$

となることと定める。これは上の極限の定義により、$\hat{u}(x,y)$ と $\hat{v}(x,y)$ がともに (a,b) で連続であることと同値になる。

- 複素微分可能性: $f(z)$ が z_0 で「複素微分可能」であるとは、

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{21}$$

の極限が存在することと定義し、この極限を $f'(z_0)$ とする。

この複素微分可能性を、$\hat{u}$, $\hat{v}$ に関する条件に書き直すのが本節の目的である。

$z_0=a+ib$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, $f'(z_0)=\alpha+i\beta$ とし、

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\Delta u+i\Delta v,\\
\Delta u &= u(z_0+\Delta z)-u(z_0)=\Delta\hat{u}=\hat{u}(a+\Delta x,b+\Delta y)-\hat{u}(a,b),\\
\Delta v &= v(z_0+\Delta z)-v(z_0)=\Delta\hat{v}=\hat{v}(a+\Delta x,b+\Delta y)-\hat{v}(a,b)
\end{aligned}$$

とする。このとき、複素微分可能性 (21) は (20) より

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta\hat{u}+i\Delta\hat{v}}{\Delta x+i\Delta y}=\alpha+i\beta$$

を意味することになる。これはさらに、

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{u}+i\Delta\hat{v} &= (\alpha+i\beta)(\Delta x+i\Delta y)+\hat{\varepsilon}(\Delta x,\Delta y)(\Delta x+i\Delta y)\\
&= (\alpha+i\beta)(\Delta x+i\Delta y)+(\hat{\eta}(\Delta x,\Delta y)+i\hat{\xi}(\Delta x,\Delta y))(\Delta x+i\Delta y)
\end{aligned} \tag{22}$$

と書き換えることができ、$\hat{\varepsilon}(h,k)=\hat{\eta}(h,k)+i\hat{\xi}(h,k)$ は、

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\hat{\eta}(h,k)=\hat{\eta}(0,0)=0,\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\hat{\xi}(h,k)=\hat{\xi}(0,0)=0$$

となるものである。(22) を実部と虚部に分離すると、

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{u} &= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \hat{\eta}(\Delta x, \Delta y)\Delta x - \hat{\xi}(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \\
&= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \Delta r\left(\frac{\Delta x}{\Delta r}\,\hat{\eta}(\Delta x, \Delta y) - \frac{\Delta y}{\Delta r}\,\hat{\xi}(\Delta x, \Delta y)\right), \qquad (23) \\
\Delta\hat{v} &= \alpha\Delta y + \beta\Delta x + \hat{\eta}(\Delta x, \Delta y)\Delta y + \hat{\xi}(\Delta x, \Delta y)\Delta x \\
&= \alpha\Delta y + \beta\Delta x + \Delta r\left(\frac{\Delta y}{\Delta r}\,\hat{\eta}(\Delta x, \Delta y) + \frac{\Delta x}{\Delta r}\,\hat{\xi}(\Delta x, \Delta y)\right) \qquad (24) \\
&\quad \left(\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)
\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、$(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ に対し、

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\Delta x}{\Delta r}\,\hat{\eta}(\Delta x, \Delta y) - \frac{\Delta y}{\Delta r}\,\hat{\xi}(\Delta x, \Delta y)\right| &\le |\hat{\eta}(\Delta x, \Delta y)| + |\hat{\xi}(\Delta x, \Delta y)| \to 0, \\
\left|\frac{\Delta y}{\Delta r}\,\hat{\eta}(\Delta x, \Delta y) + \frac{\Delta x}{\Delta r}\,\hat{\xi}(\Delta x, \Delta y)\right| &\le |\hat{\eta}(\Delta x, \Delta y)| + |\hat{\xi}(\Delta x, \Delta y)| \to 0
\end{aligned}$$

なので、(23), (24) は、$\hat{u}$, $\hat{v}$ が (a,b) で全微分可能であることを示している。さらに、(23), (24) より、

$$\alpha = \hat{u}_x(a,b) = \hat{v}_y(a,b), \quad \beta = -\hat{u}_y(a,b) = \hat{v}_x(a,b) \qquad (25)$$

が成り立つ。この $\hat{u}, \hat{v}$ に関する関係式を、「コーシー・リーマンの関係式」という。

以上により

> $f(z)$ が $z_0 = a + ib$ で複素微分可能であれば、$\hat{u}(x,y), \hat{v}(x,y)$ は (a,b) で全微分可能で、コーシー・リーマンの関係式が成り立つ

ということがわかった。実はこの逆も成り立つ。

定理 3

次の 2 つは同値。

1. $f(z)$ は $z_0 = a + ib$ で複素微分可能。
2. $\hat{u}(x,y), \hat{v}(x,y)$ は (a,b) で全微分可能で、コーシー・リーマンの関係式を満たす。

「1. ならば 2.」は上で示したので、以下に「2. ならば 1.」を示す。2. を仮定し、α, β を (25) のように取ると、$\hat{u}$, $\hat{v}$ の全微分可能性は、

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{u} &= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \Delta r\hat{\varepsilon}_1(\Delta x, \Delta y), \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \hat{\varepsilon}_1(h,k) = \hat{\varepsilon}_1(0,0) = 0, \\
\Delta\hat{v} &= \alpha\Delta y + \beta\Delta x + \Delta r\hat{\varepsilon}_2(\Delta x, \Delta y), \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \hat{\varepsilon}_2(h,k) = \hat{\varepsilon}_2(0,0) = 0 \\
&\quad \left(\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)
\end{aligned}$$

と書ける。このとき、$\Delta\hat{f} = \Delta\hat{u} + i\Delta\hat{v}$ は、

$$\begin{aligned}\Delta\hat{f} &= \Delta\hat{u} + i\Delta\hat{v} = (\alpha + i\beta)\Delta x + (-\beta + i\alpha)\Delta y + \Delta r(\hat{\varepsilon}_1 + i\hat{\varepsilon}_2) \\ &= (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + (\Delta x + i\Delta y)\frac{\Delta r}{\Delta x + i\Delta y}(\hat{\varepsilon}_1 + i\hat{\varepsilon}_2)\end{aligned}$$

となり、よって、

$$\frac{\Delta\hat{f}}{\Delta z} = \alpha + i\beta + \frac{\Delta r}{\Delta z}(\hat{\varepsilon}_1(\Delta x, \Delta y) + i\hat{\varepsilon}_2(\Delta x, \Delta y))$$

となるが、

$$\left|\frac{\Delta r}{\Delta z}\right| = \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|} = 1$$

であり、よって $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ のときに

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta\hat{f}}{\Delta z} = \alpha + i\beta$$

となり極限が存在することになる。これで f の z_0 での複素微分可能性が示されたことになり、よって定理 3 が証明されたことになる。

工学向けの複素関数論の本では、全微分可能性との同値性まで細かく書いてあることは多くはなく、むしろ全微分可能性の十分条件である $\hat{u}$,$\hat{v}$ の偏導関数の連続性を仮定した上で、コーシー・リーマンのみが複素微分可能性の同値な条件である、としているものもある (例えば [10],[11])。

8 最後に

本稿では、工学ではあまり取り上げられることのない全微分可能性について解説し、それに関するいくつかの事項や反例、応用などを示し。最後に複素関数の複素微分可能性と全微分可能性との関係について紹介した。

実は、本稿を書くきっかけとなったのは、むしろ最後の複素微分可能性との関係であり、複素関数論のノートを作っていて、正則性に関する条件をいくつかの本で調べていたところ、全微分可能性との同値性を知ったことから、一度どこかでまとめておこうと思って書き始めたものである。

多分、私の工学部の講義で本稿の内容を使うことはないと思うが、「全微分可能性」についてはどの教科書でもそれほど詳しく解説されてはいないだろうと思う。その意味では、本稿も誰かの役に立つ可能性はあるかもしれない。

参考文献

[1] 日本数学会編、「岩波 数学辞典 第 3 版」(1985)、岩波書店

[2] 日本数学会編、「岩波 数学辞典 第 4 版」(2007)、岩波書店

[3] 竹野茂治、「合成関数の微分に関する補足 その 2」(2022)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/gosei2.pdf

[4] 吉田洋一、「岩波全書 函数論 第 2 版」(1965)、岩波書店

[5] 杉浦光夫、「解析入門 I」(1980)、東京大学出版会

[6] 岩下弘一、「工科のための複素解析」(2018)、数理工学社

[7] マイベルク・ファヘンアウア (及川正行訳) 「工科系の数学 4 多変数の微積分 – ベクトル解析 –」(1996)、サイエンス社

[8] マイベルク・ファヘンアウア (高見穎郎訳) 「工科系の数学 6 関数論」(1999)、サイエンス社

[9] 山本稔、坂田定久、「複素解析へのアプローチ」(1992)、裳華房

[10] E. クライツィグ (丹生慶四郎訳)、「技術者のための高等数学 4 複素関数論 (原著第 8 版)」(2003)、培風館

[11] 矢野健太郎、石原繁、「基礎解析学 改訂版」(1993)、裳華房

[12] 高橋良雄、内田伏一、「物理数学コース 複素解析」(2005)、裳華房

[13] 安達謙三 他、「複素解析学」(1988)、昭晃堂