2020 年 06 月 04 日

# 全微分の式変形について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

## 1 はじめに

基礎数理 III ででてきた全微分のところで、

$$dz = Pdx + Qdy \tag{1}$$

のような式を、形式的に

$$dx = \frac{1}{P}dz - \frac{Q}{P}dy \tag{2}$$

のようにしても構わない、という話をしたが、これをそれなりに説明する。なお、これは基礎数理 III で紹介した、2 変数に 2 変数を代入した合成関数 $z = z(x(u,v), y(u,v))$ の微分の公式

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} &= z_x(x,y)x_u(u,v) + z_y(x,y)y_u(u,v) \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} &= z_x(x,y)x_v(u,v) + z_y(x,y)y_v(u,v) \end{aligned} \tag{3}$$

の使用例にもなっている。

## 2 設定と目標

まず、(1) が意味することと、示すべきことを明確にしておく。全微分の式 (1) が意味することは、数学的には次のことである。

1. $z$ は $x$ と $y$ の 2 変数関数である ($z = f(x,y)$)
2. $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = Q \tag{4}$$

その結果として、

$$\Delta z \doteqdot P\Delta x + Q\Delta y \quad (\Delta x \doteqdot 0,\ \Delta y \doteqdot 0)$$

の一次近似も得られるのだが、本稿では、(4) から (2)、すなわち、$z = f(x, y)$ を $x$ について解いて $x = g(y, z)$ としたとき、

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{1}{P}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{Q}{P} \tag{5}$$

となることを示すことが目標となる。

# 3 恒等式

まず、$z = f(x, y)$ が $x = g(y, z)$ と解けたと仮定するが、解けることは、例えば $\partial z/\partial x \neq 0$ を満たしていれば可能である (厳密には陰関数定理)。

そしてこの場合、$z = f(x, y)$ と $x = g(y, z)$ は同じ式を意味することになるので、一方に他方を代入した、

$$z = f(g(y, z), y) \tag{6}$$

は $y, z$ の恒等式で、

$$x = g(y, f(x, y)) \tag{7}$$

は $x, y$ の恒等式になることに注意する。

これは、少し具体例で説明する。「$y, z$ の恒等式」とは、すべての $y, z$ について成り立つ式、という意味で、「方程式」とは異なる。例えば、

$$z = f(x, y) = 5x + 3xy^2 - 7 \tag{8}$$

という関数の場合、これを $x$ について解いたものが $x = g(y, z)$ なので、

$$z = x(5 + 3y^2) - 7, \quad z + 7 = x(5 + 3y^2)$$

より、

$$x = g(y,z) = \frac{z+7}{5+3y^2} \tag{9}$$

となる。さて、この (9) を (8) に代入すると、

$$\begin{aligned} f(g(y,z),y) &= 5g(y,z)+3g(y,z)y^2-7 \ = \ (5+3y^2)g(y,z)-7 \\ &= z+7-7 \ = \ z \end{aligned}$$

となり、確かにすべての $y,z$ に対して (6) となるし、逆に (8) を (9) に代入すれば、

$$\begin{aligned} g(y,f(x,y)) &= \frac{f(x,y)+7}{5+3y^2} \ = \ \frac{5x+3xy^2-7+7}{5+3y^2} \ = \ \frac{(5+3y^2)x}{5+3y^2} \\ &= x \end{aligned}$$

となり、すべての $x,y$ に対して (7) となることがわかる。

# 4 合成関数の偏微分

(6) は $y,z$ の恒等式なので、$y$, $z$ で両辺を偏微分しても等号のままである (そこが「方程式」とは違う性質)。

よって、(6) の両辺をまず $y$ で偏微分する。左辺は $(z)_y = 0$ より $0$ となるが、右辺の微分に、(3) の合成関数の微分の公式を用いると、

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}f(g(y,z),y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\times 1 \tag{10}$$

が得られる。ここで (4) より

$$0 = P\frac{\partial g}{\partial y} + Q$$

となり、これで (5) の 2 本目の式が得られることになる。

同様に、(6) の両辺を $z$ で偏微分すれば、

$$1 = \frac{\partial}{\partial z} f(g(y,z),y) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \times 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} \tag{11}$$

となり、(4) より

$$1 = P\frac{\partial g}{\partial z}$$

となるので、これで (5) の 1 本目が得られることになる。

## 5 最後に

講義では、ちゃんと示すのは意外に面倒と説明したがいかがであろうか。

逆関数のように考えて、それを代入して合成関数の微分を用いる、という点ではそれほどたいした計算をしているわけではないのだが、「全微分の式の割り算と移項」に比べれば、面倒であることはわかってもらえるのではないかと思う。そういう計算をしても構わないのだけれども、それにはこういう理屈が背景にある、ということを押さえた上で、「全微分」とは便利な公式なんだと思ってもらえれば幸いである。