2014 年 11 月 14 日

極大極小の判別定理 38.2 の証明

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

基礎数理 IV の教科書 [1] に、2 変数関数の極大、極小の判別の定理として以下の定理 38.2 が紹介されている。

定理 38.2. $f(x,y)$ について (a,b) の近くで 2 次偏導関数が連続で

$$f_x(a,b)=0,\quad f_y(a,b)=0 \tag{1}$$

とする。

$$f_{xx}(a,b)=A,\ f_{xy}(a,b)=B,\ f_{yy}(a,b)=C \tag{2}$$

とおくと、

1. $B^2-AC<0$ のとき、$f(a,b)$ は極値であり、
   $A>0$ ならば極小、$A<0$ ならば極大である。
2. $B^2-AC>0$ のとき、$f(a,b)$ は極値でない。

この定理の証明は、この教科書 [1] もそうだが、2 変数関数のテイラー展開と、2 次形式の評価によるものが多い。しかし、その方法は、微小評価や 2 次形式に不慣れな学生には不向きではないかと思う。

本稿では、方向微分を用いることで、1 変数関数の場合の極の判別法を応用した、定理 38.2 の別の証明法を紹介することにする。

1 変数関数の場合の極の判別法として、この教科書 [1] には、凸性を利用した次の定理が紹介されている。

定理 17.4. $f(x)$ について、$x=c$ を含む区間で $f''(x)$ が連続で、$f'(c)=0$ とする。このとき、

1. $f''(c) > 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ で極小となる。
2. $f''(c) < 0$ ならば、$f(x)$ は $x = c$ で極大となる。

$f''(c) > 0$ ならば c の付近で $f''(x) > 0$ となり、よって c の近くでは下に凸となるから、$f'(c) = 0$ より極小となることが言える、という論法である。

この定理 17.4 では、$f''(c) = 0$ の場合に極かどうかの判定ができないものの、通常の、増減表を書いて $f'(x)$ の $x = c$ 以外での符号を調べる方法に比べ、c での $f'(x)$, $f''(x)$ の符号を見るだけで良いという点で優れている。

2 変数の極の判別では、増減表を 2 次元的に書くことはできないので、定理 38.2 は、むしろこの定理 17.4 に近く、停留点での 2 階微分係数の符号を利用したものなのであるが、本稿では、その定理 17.4 をより積極的に利用した証明を提示する。

2 方向微分係数

$0 \leq \theta < 2\pi$ に対して (実際は後で述べるように $0 \leq \theta < \pi$ でよい)、t の関数 $g_\theta(t)$ を、

$$g_\theta(t) = f(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta) \tag{3}$$

と定める。点 $P(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta)$ は、点 (a, b) から θ 方向 (動径ベクトル $(\cos\theta, \sin\theta)$ の方向) に伸びる直線 ℓ_θ 上を、(a, b) から距離 t だけ進んだ点 (図 1) であり、よって (3) は、$f(x, y)$ の ℓ_θ 上の値だけを見た 1 変数関数、ということになる。

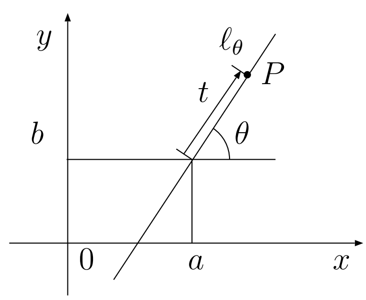

図 1: ℓ_θ と P

この $g_\theta(t)$ の微分係数を、$f(x, y)$ の θ 方向への**方向微分係数** と呼ぶ。

合成関数の微分 ([1] 定理 34.1) により、

$$g_\theta'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta \tag{4}$$

となるから、$t=0$ とすると P は (a,b) となり、仮定 (1) より、

$$g_\theta'(0) = f_x(a,b)\cos\theta + f_y(a,b)\sin\theta = 0$$

となる。

(4) をさらに微分すると、

$$\begin{aligned} g_\theta''(t) &= (f_x)'\cos\theta + (f_y)'\sin\theta \\ &= \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\sin\theta \\ &= (f_{xx}\cos\theta + f_{xy}\sin\theta)\cos\theta + (f_{yx}\cos\theta + f_{yy}\sin\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

となるので、偏微分の順序交換の定理 ([1] 定理 33.1)、および仮定 (2) より、

$$\begin{aligned} g_\theta''(0) &= f_{xx}(a,b)\cos^2\theta + 2f_{xy}(a,b)\sin\theta\cos\theta + f_{yy}(a,b)\sin^2\theta \\ &= A\cos^2\theta + 2B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta \end{aligned} \tag{5}$$

となることがわかる。

3 定理の証明 その 1

この節では、(5) を利用して、定理 38.2 の証明を行う。(5) の $g_\theta''(0)$ の符号を調べ、それにより $f(x,y)$ の各方向の凸性に関する考察を行う。

なお、$\pi \le \theta < 2\pi$ の場合は、直線 ℓ_θ と直線 $\ell_{\theta-\pi}$ は同じものになるので (逆向きになるだけ)、$0 \le \theta < \pi$ の場合のみ考えればよい。

(5) は、$\theta \neq 0$ のときは、$\sin\theta \neq 0$ より、

$$g_\theta''(0) = (Ap^2 + 2Bp + C)\sin^2\theta \quad \left(p = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta\right) \tag{6}$$

と書けることに注意する。

まず、$B^2 - AC < 0$ の場合を考える。

この場合は $A \neq 0$ ($A = 0$ なら $B^2 - AC = B^2 \geq 0$) なので、$\theta \neq 0$ であれば、p の 2 次式 $Ap^2 + 2Bp + C$ の判別式 D は

$$D = 4B^2 - 4AC = 4(B^2 - AC) < 0$$

となり、よって $Ap^2 + 2Bp + C$ はすべての p に対して 0 にはならない。よって、$A > 0$ ならば、すべての θ $(0 < \theta < \pi)$ に対して $Ap^2 + 2Bp + C > 0$, $A < 0$ ならば、すべての θ $(0 < \theta < \pi)$ に対して $Ap^2 + 2Bp + C < 0$ となる。

$\theta = 0$ のときは、$g_\theta''(0) = A$ なので、これと (6) を合わせると、結局 $B^2 - AC < 0$ の場合は、

- $A > 0$ ならばすべての θ $(0 \leq \theta < \pi)$ に対して $g_\theta''(0) > 0$
- $A < 0$ ならばすべての θ $(0 \leq \theta < \pi)$ に対して $g_\theta''(0) < 0$

となることがわかる。これらはそれぞれ、すべての方向に対して下に凸、すべての方向に対して上に凸であることを意味するので、$f(x, y)$ がそれぞれ極小、極大となることがわかる。

次に $B^2 - AC > 0$ の場合は、判別式 D が正なので、2 次式 $Ap^2 + 2Bp + C$ は、ある範囲の p では正の値を、ある範囲の p では負の値を取ることになる。すなわち、$f(x, y)$ はある方向には下に凸、ある方向には上に凸となるので、よってこれは極ではないことになる (鞍点)。

以上により、定理 38.2 が証明されたことになる。

4 定理の証明 その 2

前節の議論は、(5) の正、負の判別が 2 次関数の知識で行えるところが容易だが、場合分けも必要で、(6) は外に $\sin^2\theta$ がついているため θ の変化にともなう $g_\theta''(0)$ の変化の様子もややわかりにくい。

それに対して、(5) をさらに変形して、値の変化もわかりすくする方法もある。

三角関数の倍角の公式と、合成の公式を用いると、

$$
\begin{aligned}
g_\theta''(0) &= A\,\frac{1+\cos 2\theta}{2} + B\sin 2\theta + C\,\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\
&= \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2}\cos 2\theta + B\sin 2\theta \\
&= \frac{A+C}{2} + K\sin(2\theta+\alpha) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

と変形できる。ここで α は点 $(B,\ (A-C)/2)$ の偏角で、K は

$$
K = \sqrt{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)^2 + B^2 - AC} \qquad (8)
$$

である。

(7) より、$g_\theta''(0)$ は θ の変化に伴い、三角関数的 ($\sin x$ を拡大、縮小、平行移動した形) に値が変化することがわかる。

$B^2 - AC > 0$ ならば (8) より

$$
K = \sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)^2 + B^2 - AC} > \left|\frac{A+C}{2}\right|
$$

なので、(7) は $-K + (A+C)/2\ (<0)$ から $K + (A+C)/2\ (>0)$ の値を変化し、よって方向 θ により正になったり負になったりする。

一方 $B^2 - AC < 0$ の場合は、

$$
K = \sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)^2 + B^2 - AC} < \left|\frac{A+C}{2}\right|
$$

なので、$(A+C)/2 > 0$ なら $(A+C)/2 > K$ より (7) は常に正になり、$(A+C)/2 < 0$ なら $(A+C)/2 < -K$ より (7) は常に負になる。

$B^2 - AC < 0$ だと $A \neq 0, C \neq 0$ でかつ $AC > 0$ でなければいけないので、$(A+C)/2$ と A の符号は等しい。よって、この場合は $A > 0$ なら $g_\theta''(0)$ は常に正、$A < 0$ なら $g_\theta''(0)$ は常に負となり、前節と同じことが言えることになる。

5 判別式が 0 の場合

(7) を用いると、$B^2 - AC = 0$ の場合の様子も一部は知ることができる。

$A = B = C = 0$ の場合はさすがに無理だが、そうでなければ $B^2 - AC = 0$ と (8) より

$$K = \sqrt{\left(\frac{A+C}{2}\right)^2} = \left|\frac{A+C}{2}\right|$$

となる。もし、$A + C = 0$ だと、$C = -A$ より $B^2 - AC = B^2 + A^2 = 0$ となり、$A = B = C = 0$ となってしまう。よって、$A = B = C = 0$ でなければ $A + C \neq 0$ であり、$K \neq 0$ となる。

この場合、$g''_\theta(0)$ は、θ の変化に伴い、最大値が 0 となる三角関数の波か ($A + C < 0$)、最小値が 0 となる波 ($A+C > 0$) のグラフになる。つまり、$f(x,y)$ は一つの方向を除いて上に凸であるか、逆に一つの方向を除いて下に凸となる。

その残りの一つの方向がわかれば極の判別ができそうだが、この方向では、凸になる場合もあれば、凸性を持たない場合もある。

例えば、$f(x,y) = x^2 + \alpha y^n$ ($n \geq 3$) の場合は、停留点 (0,0) で

$$A = f_{xx}(0,0) = 2,\ \ B = f_{xy}(0,0) = 0,\ \ C = f_{yy}(0,0) = 0$$

となり、よって $B^2 - AC = 0$ で、$g''_\theta(0)$ は

$$g''_\theta(0) = 2\cos^2\theta$$

となるから、$\theta \neq \pi/2$ の場合は $g_\theta(t)$ は $t = 0$ で下に凸となるが、$\theta = \pi/2$ の場合は、

$$g_\theta(t) = f(0,t) = \alpha t^n$$

となるので、$\alpha = 0$ ならば定数、$(\alpha, n) = (1, 4)$ ならば下に凸、$(\alpha, n) = (-1, 4)$ ならば上に凸、さらに $(\alpha, n) = (1, 3)$ ならば凸ではない、といった状況がいくらでも作れることになる。

よって、一つの方向以外のことはわかるが、その方向がどうかということは 2 階微分までの情報だけでは何もわからず、結局極かどうかの判別はできないことがわかる。

もちろん、$A = B = C = 0$ の場合は、どの方向にも何もわからない。

6 最後に

本稿では、2 変数関数のテイラー展開には寄らない方法での定理 38.2 の別証明を考察したが、本稿の方法は、より単純な方法の積み重ねではあるものの、逆に煩雑な部分もあり、必ずしも簡単になっているとはいえないかもしれない。

そのため、以前黒板で紹介してみたこともあったが、やはりそれなりに煩雑なのであまり講義には向かず、現在はプリントで紹介することがある程度である。

本稿、特に §4、§5 の内容は、教科書にもない内容で、多少面白いのではないかと思うが、学生にはそうではないかもしれない。

参考文献

[1] 石原繁、浅野重初「理工系入門 微分積分」(裳華房)