2006 年 4 月 25 日

ある無限級数の値について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

無限級数の和を求めることはかなり難しい問題であり、テイラー展開やフーリエ級数などを駆使してやっと求まる級数などもあるし、見かけは簡単な級数なのに今だにその値が簡単な式では表されていない級数もある。

ここでは、次の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{1}$$

の値を、区分求積の公式を利用して初等的に求める方法を紹介する。

2 補題

考える級数 (1) の部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$$

の極限を考えればよいが、まず次の補題を示す。

補題 1

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ について、

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

ならば、この無限級数は収束し $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ となる。

証明

$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \alpha$ であるし、$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ より、仮定から

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \alpha$$

なので、よって $\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha$ となる。■

この無限級数 (1) に対しても、明らかに

$$a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \to 0$$

なので、S_{2n} の極限を考えればよい。

3 級数の間の等式

S_{2n} に関しては、次の等式が成り立つ。

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \qquad (2)$$

これを証明するには帰納法を用いてもよいが、次のようにも説明できる。

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}
\end{aligned}
$$

4 区分求積法

数列の和

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

は、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\,\frac{1}{n}$$

と変形すればわかるが、丁度区分求積の公式

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \tag{3}$$

の右辺が適用できる形をしていて、$f(x)=1/(1+x)$ の場合に対応する。よって、

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to} S_{2n} &= \lim_{n\to}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\,\frac{1}{n}\\
&= \int_0^1\frac{dx}{1+x}=[\log(1+x)]_{x=0}^{x=1}=\log 2-\log 1=\log 2
\end{aligned}
$$

となる。

以上で、(1) の値が $\log 2$ であることが示されたことになる。

5 おわりに

補題 1 や区分求積の公式 (3) はともかくとして、それら以外にこの級数を求めるのに使った方法は、残念ながら一般性がなく、他の似たような無限級数の値を求めるのには適用できない。

なお講義では、積分の定義に関連して区分求積の話をしたので、これはその一例になってはいるが、区分求積の例としてはあまり適切なものではなく、講義で紹介できる話ではない。

よって、このような話は講義からすれば寄り道であり、時間も足りなくなるので講義ではこのような話はできないが、寄り道をすることで得ることも多いと思うので、また何か思いついたらこのようにまとめてみたいと思う。