平成 13 年 6 月 6 日

# リーマン和 (区分求積法) の誤差について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

リーマン和の極限が面積となる、という区分求積法は、厳密にはその誤差が 0 に収束するということを証明する必要があるが、それは教科書には書かれていない。

ここでは、$f(x)$ が微分可能で、その導関数 $f'(x)$ が連続であるような場合に限ってその説明を行う。

分割

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

に対して、リーマン和 $S(f,\Delta)$ は

$$S(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

で定義される。ここで、$\xi_i$ は $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ となる点 (分点間の任意の点)、$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (分割幅) である (教科書 §12)。また、最大の分割幅を $m(\Delta)$ とする。

$$m(\Delta) = \max\{\Delta x_i \ ; \ 1 \leq i \leq n\}$$

$\xi_i$ の取り方によってリーマン和の値はもちろん変化する。そのリーマン和が一番大きくなるのは、各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ で $f(\xi_i)$ が最大値となるように取った場合である。そのような $\xi_i$ を $\alpha_i$ と書くことにする。

$$f(\alpha_i) = [x_{i-1}, x_i] \text{ での } f(x) \text{ の最大値}$$

また、リーマン和が一番小さくなるのは、各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ で $f(\xi_i)$ が最小値となるように取った場合である。そのような $\xi_i$ を $\beta_i$ とする。

$$f(\beta_i) = [x_{i-1}, x_i] \text{ での } f(x) \text{ の最小値}$$

よって、それぞれのリーマン和を

$$S_M(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta x_i, \quad S_m(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\beta_i)\Delta x_i$$

とすると、もちろん

$$S_m(f,\Delta) \leq S(f,\Delta) \leq S_M(f,\Delta) \tag{1}$$

となる。そして、$\int_a^b f(x)dx$ は面積なのでもちろん

$$S_m(f,\Delta) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_M(f,\Delta) \tag{2}$$

でもある。よって、(1),(2) により

$$S_m(f,\Delta) - S_M(f,\Delta) \leq S(f,\Delta) - \int_a^b f(x)dx \leq S_M(f,\Delta) - S_m(f,\Delta)$$

となる ($A \leq x \leq B$ かつ $A \leq y \leq B$ ならば $A - B \leq x - y \leq B - A$ は容易に示される)。

よって、もし $S_M(f,\Delta)-S_m(f,\Delta)$ が、$n\to\infty$, $m(\Delta)\to 0$ のときに 0 に収束することが示されれば、はさみうちの原理によって、リーマン和と面積との誤差

$$S(f,\Delta)-\int_a^b f(x)dx$$

も 0 に収束することとなる。よって、

$$S_M(f,\Delta)-S_m(f,\Delta)\to 0 \quad (n\to\infty,\ \ m(\Delta)\to 0 \text{ のとき}) \tag{3}$$

を証明する。

$$S_M(f,\Delta)-S_m(f,\Delta)=\sum_{i=1}^n\{f(\alpha_i)-f(\beta_i)\}\Delta x_i \tag{4}$$

であることにまず注意する。

今、$f'(x)$ が連続であるという仮定により、

$$-M\leq f'(x)\leq M \quad (a\leq x\leq b)$$

となる正の定数 $M$ が取れる。このとき、$f(x)$ の傾きは $-M$ から $M$ の範囲に入るので、幅 $\Delta x_i$ の区間内ではどう変化しても、その最大値と最小値の差は $M\Delta x_i$ 以下となる (もし、それより大きいとすると、その最大値を取る点と最小値を取る点を結ぶとその傾きの絶対値は $M$ を超えてしまう)。

よって、

$$f(\alpha_i)-f(\beta_i)\leq M\Delta x_i \quad (i=1,2,\ldots,n)$$

がいえることになる。これを使うと、(4) は

$$\begin{aligned} S_M(f,\Delta)-S_m(f,\Delta) &\leq \sum_{i=1}^n M\Delta x_i\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n Mm(\Delta)\Delta x_i = Mm(\Delta)\sum_{i=1}^n \Delta x_i \\ &= Mm(\Delta)(b-a) \end{aligned}$$

となる。最後の式 $Mm(\Delta)(b-a)$ はもちろん $n\to\infty$, $m(\Delta)\to 0$ のとき 0 に収束する。故に (3) が成り立つことになり、結局誤差が 0 に収束することが示された。

なお、誤差の絶対値は $Mm(\Delta)(b-a)$ 以下であることもついでにわかったことになる。