2024 年 12 月 06 日

未定係数法によらない部分分数分解

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

通常、整式の商の部分分数分解は、「部分分数分解の原理」([2]) に基づいて、最終的な形の分子を未定係数で表現して、それが恒等式として満たされるようにその未定係数を決定する、という方法を取る。

本稿では、未定係数によらない方法での部分分数分解について考察する。なお、本稿を通して、部分分数分解の対象となる整式の商は、分子の次数が分母の次数より小さいとする。

2 未定係数法

まず、未定係数法による部分分数分解の例を紹介する。

例えば、

$$\frac{10x}{(x-3)(x^2+1)}$$

の場合は、

$$\frac{10x}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{a}{x-3} + \frac{bx+c}{x^2+1} \tag{1}$$

のように、部分分数分解後の形を「部分分数分解の原理」([2]) に従って想定し、その形の未定係数を用いた式で表し、これが恒等式となるように a, b, c を決めるというやり方である。

(1) の分母を払うと,

$$10x = a(x^2+1) + (bx+c)(x-3) = (a+b)x^2 + (c-3b)x + (a-3c)$$

となり、これが恒等式となるためには、各次数の係数を比較して、

$$\begin{cases} a+b=0 \\ c-3b=10 \\ a-3c=0 \end{cases}$$

となることが条件。これを解いて $a=3, b=-3, c=1$ が得られ、よって (1) は

$$\frac{10x}{(x-3)(x^2+1)} = \frac{3}{x-3} + \frac{-3x+1}{x^2+1} \tag{2}$$

となる、という方法である。

3 対数の微分の形

まず、未定係数法を用いなくても簡単に部分分数分解できる、特別な形を紹介する。

命題 1

整式 $f(x)$ が $f(x) = \prod_{j=1}^{n} f_j(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ の整式の積で、$g(x) = f'(x)$ のとき、商 $g(x)/f(x)$ は

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \tag{3}$$

と分解される。

証明

$$\log|f(x)| = \log\left|\prod_{j=1}^{n} f_j(x)\right| = \sum_{j=1}^{n} \log|f_j(x)|$$

より、両辺微分すれば、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$$

となる。■

例えば、$I=(3x^2-6x+1)/(x-3)(x^2+1)$ は、

$$\{(x-3)(x^2+1)\}'=(x^3-3x^2+x-3)'=3x^3-6x+1$$

なので、命題 1 より

$$I=\frac{\{(x-3)(x^2+1)\}'}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{(x-3)'}{x-3}+\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{1}{x-3}+\frac{2x}{x^2+1}$$

と部分分数分解されることになる。

実際、$3x^2-6x+1=x^2+1+2x(x-3)$ より,

$$I=\frac{x^2+1+2x(x-3)}{(x-3)(x^2+1)}=\frac{1}{x-3}+\frac{2x}{x^2+1}$$

となる。なお、この命題 1 では $f_1(x),\dots,f_n(x)$ は互いに素である必要もない。

4 ラグランジュ補間による部分分数分解

前節のような特別な形でなくても、未定係数法によらずに部分分数分解する方法がある。まず $g(x)/f(x)$ の $f(x)$ が異なる 1 次式の積である場合を考える。

今、$a_1,a_2,\dots,a_n$ はすべて異なる実数とし、

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k),\quad f_j(x)=\frac{f(x)}{x-a_j}=\prod_{k\neq j}^{n}(x-a_k)\ \ (1\leq j\leq n) \tag{4}$$

とする。

$\deg g(x)<\deg f(x)$ のとき、$g(x)/f(x)$ は、部分分数分解により、

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{x-a_k} \tag{5}$$

の形になるはずである。この両辺を $f(x)$ 倍すると、

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k f(x)}{x - a_k} = \sum_{k=1}^{n} p_k f_k(x) \tag{6}$$

のようになり、$g(x)$ が $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ の 1 次式で表されることになる。

逆に言えば、$g(x)/f(x)$ の部分分数分解は、分子 $g(x)$ を $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ の 1 次式で表現することと言い換えることができるが、それはラグランジュ補間を利用することで可能となる。

「ラグランジュ補間」とは、ある関数 $q(x)$ に対して、その $x = a_k$ $(1 \leq k \leq n)$ での値 $q_k = q(a_k)$ $(1 \leq k \leq n)$ を使って $q(x)$ を多項式近似する一つの方法であり、

$$Lag(x) = \sum_{k=1}^{n} q_k \frac{f_k(x)}{f_k(a_k)} \tag{7}$$

によって定義される整式である。

命題 2

任意の実数 q_k $(1 \leq k \leq n)$ に対し、$h(a_k) = q_k$ $(1 \leq k \leq n)$ となる $(n-1)$ 次以下の整式 $h(x)$ は常に存在し、そしてそれは (7) の $Lag(x)$ に一致する (それのみである)。

逆に $(n-1)$ 次以下の整式 $h(x)$ は、$q_k = h(a_k)$ $(1 \leq k \leq n)$ とすれば (7) の形に変形される。

証明

$a_1, \ldots, a_n$ はすべて異なるから $f_k(a_k) \neq 0$ であり、よって $(n-1)$ 次以下の整式 $Lag(x)$ は確かに (7) によって定義される。$x = a_j$ では、$k \neq j$ に対し $f_k(a_j) = 0$ であり、よって $Lag(a_j) = q_j$ となる。これで前半が示された。

逆に、$(n-1)$ 次以下の整式 $h(x)$ に対し $h(a_k) = q_k$ $(1 \leq k \leq n)$ としそれに対する (7) を考えると $Lag(x) - h(x)$ はすべての k に対し $x = a_k$ で 0 になるから、

$$Lag(x) - h(x) = A \prod_{k=1}^{n} (x - a_k)$$

と書けることになるが、$Lag(x) - h(x)$ は $(n-1)$ 次以下なので、$A = 0$ でなければならない。よって $Lag(x) = h(x)$ が恒等的に成り立ち、$h(x)$ が (7) と変形できることになる。■

(7) の右辺は $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ の 1 次式であり、よって命題 2 より $(n-1)$ 次以下の式はラグランジュ補間によって $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ の 1 次式で表されることになる。よって、(6) によりこれで $g(x)/f(x)$ の部分分数分解ができることになる。すなわち、$\deg g(x) < \deg f(x) = n$ に対して命題 2 より

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} g(a_k) \frac{f_k(x)}{f_k(a_k)} \tag{8}$$

となり、商 $g(x)/f(x)$ は、

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{f_k(a_k)} \frac{f_k(x)}{f(a_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{f_k(a_k)} \frac{1}{x-a_k} \tag{9}$$

と部分分数分解されることになる。

これで分母が異なる 1 次式の積の場合には、整式の商は、未定係数法によらなくてもラグランジュ補間公式により部分分数分解できることがわかった。

例 3

$$I(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2+3x-22}{(x+1)(x-2)(x-3)}$$

の部分分数分解。ラグランジュ補間により、

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)} g(-1) + \frac{(x+1)(x-3)}{(2+1)(2-3)} g(2) + \frac{(x+1)(x-2)}{(3+1)(3-2)} g(3) \\ &= (x-2)(x-3)\frac{-24}{12} + (x+1)(x-3)\frac{-12}{-3} + (x+1)(x-2)\frac{-4}{4} \\ &= -2(x-2)(x-3) + 4(x+1)(x-3) - (x+1)(x-2) \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{-2(x-2)(x-3) + 4(x+1)(x-3) - (x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{-2}{x+1} + \frac{4}{x-2} + \frac{-1}{x-3} \end{aligned}$$

となる。なお、通常の未定係数法の場合、

$$I(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

とおいて、両辺 $f(x)$ 倍して、

$$x^2+3x-22=a(x-2)(x-3)+b(x+1)(x-3)+c(x+1)(x-2)$$

これを展開して係数比較して 3 元連立方程式を解くという方法もあるが、この場合は代入法で求める方が早い。

- $x=-1$ を代入すると、$1-3-22=a(-3)(-4)$ より $a=-2$
- $x=2$ を代入すると、$4+6-22=b\cdot 3(-1)$ より $b=4$
- $x=3$ を代入すると、$9+9-22=c\cdot 4$ より $c=-1$

となって、前と同じ式が得られる。

この計算は、見てわかるように実質ラグランジュ補間の計算と同じなので、実はラグランジュ補間を使うメリットはあまりないこともわかる。

5 分母の積に重複がある場合

本節では、やはり分母の $f(x)$ が 1 次式の積に分解されているが、そのうちいつかに重複がある場合を考える。この場合は、前節のラグランジュ補間公式ではうまくいかない。

本節でも $a_1,a_2,\ldots,a_n$ はすべて異なる実数とし、

$$f(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-a_k)^{m_k},\quad f_j(x)=\frac{f(x)}{(x-a_j)^{m_j}}=\prod_{k\neq j}(x-a_k)^{m_k}\ \ (1\leq j\leq n) \tag{10}$$

とする。ここで、m_k は一般には 1 以上の整数である。

まずは前節同様に、先に部分分数分解の形から $g(x)$ をどのような形で表せばよいかを考える。

この場合の $I=g(x)/f(x)$ は、部分分数分解の原理 ([2]) により

$$I=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k(x)}{(x-a_k)^{m_k}} \tag{11}$$

と分解される。ここで、$p_k(x)$ は $\deg p_k(x) < m_k$ の整式であり、その $p_k(x)$ の $x = a_k$ でのテイラー展開からわかるが、それは分子が定数の

$$\frac{p_k(x)}{(x-a_k)^{m_k}} = \frac{p_{k,0}}{(x-a_k)^{m_k}} + \frac{p_{k,1}}{(x-a_k)^{m_k-1}} + \cdots + \frac{p_{k,m_k-1}}{x-a_k}$$

の形に分解でき、よって I は

$$I = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{p_{k,j}}{(x-a_k)^{m_k-j}} \tag{12}$$

の形に分解されることになる。

(12) の両辺に $f(x)$ をかけると、

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)(x-a_k)^{m_k} \sum_{j=0}^{m_k-1} \frac{p_{k,j}}{(x-a_k)^{m_k-j}} = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \sum_{j=0}^{m_k-1} p_{k,j}(x-a_k)^j \tag{13}$$

となる。すなわち、今度は分子 $g(x)$ を $f_k(x)(x-a_k)^j$ $(0 \leq j < m_k,\ 1 \leq k \leq n)$ の一次式で表すことが目標となる。これは、一般エルミート補間 ([3],[4]) により可能となる。

「一般エルミート補間」は、関数 $q(x)$ に対して、その $x = a_1, \ldots, a_n$ での値やその導関数の値 $q_{k,j} = q^{(j)}(a_k)$ $(j < m_k,\ 1 \leq k \leq n)$ を使って $q(x)$ を多項式近似する方法であり、ラグランジュ補間と同様に、

$$N = \deg f(x) = \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{14}$$

に対して $h^{(j)}(a_k) = q_{k,j}$ $(j < m_k,\ 1 \leq k \leq n)$ となる $(N-1)$ 次以下の整式 $h(x)$ は一意に決定する。その表現式、すなわち

$$h(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \sum_{j=0}^{m_k-1} p_{k,j}(x-a_k)^j \tag{15}$$

の係数 $p_{k,j}$ を、f_k と h の微分係数値 $q_{k,j}$ で表すことを考える。

まず、(15) の、k に関する和の各項を $F_k(x)$ とする:

$$F_k(x) = f_k(x) \sum_{j=0}^{m_k-1} p_{k,j}(x-a_k)^j \ \ (1 \leq k \leq n), \quad h(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \tag{16}$$

このとき, 各 k, および $i\neq k$ なる i に対して $F_i(x)$ には 因数の $f_i(x)$ に $(x-a_k)^{m_k}$ が含まれるので、

$$\begin{aligned}\frac{h(x)}{f_k(x)} &= \frac{F_k(x)}{f_k(x)}+\sum_{j\neq k}\frac{F_j(x)}{f_k(x)}\\ &= \frac{F_k(x)}{f_k(x)}+(x-a_k)^{m_k}\hat{F}_k(x) \;=\; \sum_{j=0}^{m_k-1}p_{k,j}(x-a_k)^j+(x-a_k)^{m_k}\hat{F}_k(x)\end{aligned}$$

となり、すなわち $\sum_{j=0}^{m_k-1}p_{k,j}(x-a_k)^j$ は、$h(x)/f_k(x)$ の $x=a_k$ での (m_k-1) 次のテイラー展開となるので、よって

$$\begin{aligned}p_{k,j} &= \frac{1}{j!}\left(\frac{h(x)}{f_k(x)}\right)^{(j)}(a_k) \;=\; \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}h^{(i)}(a_k)\left(\frac{1}{f_k(x)}\right)^{(j-i)}(a_k)\\ &= \frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}q_{k,i}\left(\frac{1}{f_k(x)}\right)^{(j-i)}(a_k) \qquad (17)\end{aligned}$$

と得られる。これを (15) に代入したものが一般エルミート補間である。

命題 4

任意の実数 $q_{k,j}$ $(1\leq k\leq n,\,0\leq j<m_j)$ に対し、$h^{(j)}(a_k)=q_{k,j}$ となる $(N-1)$ 次以下の整式 $h(x)$ は常に存在し、そしてそれは (15) に (17) を代入したものになる (それのみである)。

逆に $(N-1)$ 次以下の整式 $h(x)$ は、$h^{(j)}(a_k)=q_{k,j}$ $(0\leq j<m_j,\,1\leq k\leq n)$ とすれば、(15) に (17) を代入した形に変形される。

証明は命題 2 とほぼ同じなので省略する。

これで、$f(x)$ に 1 次式の累乗が含まれている場合の $g(x)/f(x)$ の部分分数分解も、原理的には、

$$p_{k,j}=\frac{1}{j!}\left(\frac{g(x)}{f_k(x)}\right)^{(j)}(a_k)\;\;(0\leq j<m_k,\;1\leq k\leq n) \qquad (18)$$

を計算すれば、未定係数法を使わなくても (13) の両辺を $f(x)$ で割ることで (12) の形に求まることになるのだが、ただ一般には (18) の計算は容易ではなく、未定係数法より楽に求まるかというと必ずしもそうではない。むしろ特別な場合、例えば $n=2$ の

場合や、すべての m_k が 2 以下の場合を除けば、一般エルミート補間の計算はかなり困難になる。

例 5

$$I(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+4}{x^3(x-2)^2(x+1)}$$

の部分分数分解を一般エルミート補間で行う。

$$I(x)=\frac{p_1(x)}{x^3}+\frac{p_2(x)}{(x-2)^2}+\frac{p_3(x)}{x+1}$$

とできるが (p_1 は 2 次、p_2 は 1 次、p_3 は 0 次)、

$$g(x)=p_1(x)(x-2)^2(x+1)+p_2(x)x^3(x+1)+p_3(x)x^3(x-2)^2$$

なので、$p_1(x)$ は $h_1(x)=g(x)/((x-2)^2(x+1))$ の 2 次の $x=0$ でのテイラー展開、$p_2(x)$ は $h_2(x)=g(x)/(x^3(x+1))$ の 1 次の $x=2$ でのテイラー展開、$p_3(x)$ は $h_3(x)=g(x)/(x^3(x-2)^2)$ の 0 次の $x=-1$ でのテイラー展開。

$$\begin{aligned}
h_1(0) &= \frac{4}{4} \;=\; 1,\\
h_1'(x) &= \{(x^2+4)(x-2)^{-2}(x+1)^{-1}\}'\\
&= 2x(x-2)^{-2}(x+1)^{-1}+(x^2+4)(-2)(x-2)^{-3}(x+1)^{-1}\\
&\quad +(x^2+4)(x-2)^{-2}(-1)(x+1)^{-2}\\
&= \frac{2x}{(x-2)^2(x+1)}+\frac{-2(x^2+4)}{(x-2)^3(x+1)}+\frac{-(x^2+4)}{(x-2)^2(x+1)^2},\\
h_1'(0) &= 0+\frac{-8}{-8}-\frac{4}{4} \;=\; 0,\\
h_1''(x) &= 2(x-2)^{-2}(x+1)^{-1}+(x^2+4)6(x-2)^{-4}(x+1)^{-1}\\
&\quad +(x^2+4)(x-2)^{-2}2(x+1)^{-3}+2\cdot 2x(-2)(x-2)^{-3}(x+1)^{-1}\\
&\quad +2\cdot 2x(x-2)^{-2}(-1)(x+1)^{-2}\\
&\quad +2(x^2+4)(-2)(x-2)^{-3}(-1)(x+1)^{-2}\\
&= \frac{2}{(x-2)^2(x+1)}+\frac{6(x^2+4)}{(x-2)^4(x+1)}+\frac{2(x^2+4)}{(x-2)^2(x+1)^3}\\
&\quad +\frac{-8x}{(x-2)^3(x+1)}+\frac{-4x}{(x-2)^2(x+1)^2}+\frac{4(x^2+4)}{(x-2)^3(x+1)^2},\\
h_1''(0) &= \frac{2}{4}+\frac{24}{16}+\frac{8}{4}+\frac{16}{-8} \;=\; 2
\end{aligned}$$

となるので、$h_1(x)$ の 2 次のテイラー展開 $p_1(x)$ は $1+x^2$。

$$\begin{aligned}
h_2(2) &= \frac{8}{24} \;=\; \frac{1}{3},\\
h_2'(x) &= 2xx^{-3}(x+1)^{-1}+(x^2+4)(-3)x^{-4}(x+1)^{-1}\\
&\quad +(x^2+4)x^{-3}(-1)(x+1)^{-2}\\
&= \frac{2}{x^2(x+1)}+\frac{-3(x^2+4)}{x^4(x+1)}+\frac{-(x^2+4)}{x^3(x+1)^2},\\
h_2'(2) &= \frac{2}{12}+\frac{-24}{48}+\frac{-8}{72} \;=\; \frac{1}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{9} \;=\; -\frac{4}{9}
\end{aligned}$$

より、$h_2(x)$ の 1 次のテイー展開 $p_2(x)$ は $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}(x-2)$。

$p_3(x)$ は $h_3(-1)=-\frac{5}{9}$、よって

$$I(x)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+\frac{1}{3(x-2)^2}-\frac{4}{9(x-2)}-\frac{5}{9(x+1)}$$

と分解されることになる。しかし見てわかるように、$h_1(x)$ のテイラー展開の計算 (特に $h_1''(x)$) がかなり大変である。

これは多少改善は可能で、$h_1^{(j)}(0)$ を直接求める代わりに、

$$g(x)=h_1(x)(x-2)^2(x+1)=h_1(x)(x^3-3x^2+4)$$

を利用すると、

$$\begin{aligned}
g(0) &= 4=4h_1(0),\\
g'(x) &= 2x \;=\; h_1'(x)(x^3-3x^2+4)+h_1(x)(3x^2-6x),\\
g'(0) &= 0 \;=\; 4h_1'(0)+0,\\
g''(x) &= 2 \;=\; h_1''(x)(x^3-3x^2+4)+2h_1'(x)(3x^2-6x)+h_1(x)(6x-6),\\
g''(0) &= 2 \;=\; 4h_1''(0)-6h_1(0)
\end{aligned}$$

となるので、$h_1(0), h_1'(0), h_1''(0)$ の連立方程式をとけば、$h_1(0)=1,\, h_1'(0)=0,\, h_1''(0)=2$ となる。こちらの方が、連立方程式を解く手間は必要だが、微分の計算がだいぶ楽になる。

なお、未定係数法による部分分数分解の場合は、

$$I(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^3}+\frac{p(x-2)+q}{(x-2)^2}+\frac{r}{x+1}$$

と置いて、両辺 $f(x)$ 倍すると、

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2+4 \\ &= (ax^2+bx+c)(x-2)^2(x+1)+(p(x-2)+q)x^3(x+1)+rx^3(x-2)^2 \\ &= F_1(x)+F_2(x)+F_3(x) \end{aligned} \tag{19}$$

となる。係数比較法だとこの右辺を展開して

$$\begin{aligned} &x^2+4 \\ &= (ax^2+bx+c)(x^3-3x^2+4)+(px-2p+q)(x^4+x^3)+r(x^5-4x^4+4x^3) \\ &= (a+p+r)x^5+(-3a+b-p+q-4r)x^4+(-3b+c-2p+q+4r)x^3 \\ &\quad +(4a-3c)x^2+4bx+4c \end{aligned}$$

となり、ここから a,b,c,p,q,r の連立方程式を解くのが面倒である。特に、a,b,c と p,q と r の連立方程式が混ざったままで一般には容易に分離できないためそのままだとかなり難しい。なお、この例の場合は $f(x)$ に x^3 が含まれているため、2 次以下の項が a,b,c のみの連立に分離されているが、一般にはそうはいかない。

しかしこれも多少改善ができ、(19) を展開して係数比較をする代わりに代入法と微分を組み合わせることで係数を求めることができる。例えば、$F_2(x),F_3(x)$ には x^3 があるため $g(0),g'(0),g''(0)$ はそれぞれ $F_1(0),F_1'(0),F_1''(0)$ に等しく、よって、

$$\begin{aligned} g_1(0) &= g(0) = 4 = 4c, \\ F_1'(x) &= (2ax+b)(x^3-3x^2+4)+(ax^2+bx+c)(3x^2-6x), \\ F_1'(0) &= g'(0) = 0 = 4b, \\ F_1''(x) &= 2a(x^3-3x^2+4)+2(2ax+b)(3x^2-6x)+(ax^2+bx+c)(6x-6), \\ F_1''(0) &= g''(0) = 2 = 8a-6c \end{aligned}$$

となるので、$c=1,b=0,a=1$ となる。

p,q や r についても同様に、代入法と微分を使うことで、各 F_k 毎に分離して係数を求められるので、単純な係数比較よりは多少楽になる。

そして、この計算を見ればわかるが、これは一般エルミート補間の改良版の方の計算と実質的に同等であり、よって部分分数分解に一般エルミート補間を利用する方法も、それほどメリットがあるわけではないことがわかる。

6 最後に

本稿では、未定係数によらない部分分数分解として、$f'(x)/f(x)$ のような特別な形、分母が互いに異なる 1 次式に因数分解されている場合のラグランジュ補間を利用する方法、および分母が互いに異なる 1 次式の累乗に因数分解されている場合の一般エルミート補間を利用する方法を紹介した。

しかし、例で示したように、ラグランジュ補間も一般エルミート補間も実際にはそれほど簡単になるわけではなく、むしろ従来の未定係数法で代入法や微分を用いることによりそれと同等な計算が行えることも示した。それに多分その方が余計な公式も必要なく、わかりやすいだろうと思うので、理論的な考察を除けば、ラグランジュ補間や一般エルミート補間を具体的な部分分数分解に用いるのはあまりメリットがないだろうと思う。

なお、補間公式を用いる方法については、実数の範囲で分母が 1 次式にまで因数分解されるものだけを紹介したが、2 節や 3 節で紹介した例のように、1 次式への因数分解に複素数が必要になる場合についても、理論的には本稿の議論はそのまま成り立つ。しかし、未定係数法では基本的に複素数は用いないし、補間公式の方法で複素数を用いながら計算するとさらに大変になると想像されるが、それを「複素数を使わない形」で計算可能かどうかについては、多分本稿同様メリットはあまりないと思うが、気が向いたらまた考えてみたいと思う。

参考文献

[1] 竹野茂治、「有理関数の積分について」(2003)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~/math/lecture/basic3/data/quotef1.pdf

[2] 竹野茂治、「部分分数分解の原理について」(2006)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~/math/lecture/basic3/data/quotef3.pdf

[3] 鈴木実、「エルミート補間の一般公式」(2016)
http://totoha.web.fc2.com/Hermite_interpolation.pdf

[4] 北原和明、「多項式補間（第 6 話）第 2 章エルミート補間」(2022)
https://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~kitahara/main/lab-diary/第6話.pdf