2016 年 12 月 22 日

複素数を利用したある不定積分 その 2

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

以前、[1] で、($2m-1$ 次の整式)$/(x^2+1)^m$ の積分を、複素数を使って部分分数分解する方法で考察した。そこでは $1/(x+i)$, $1/(x-i)$ の積分は、複素対数を使うことを避け、それをまた通分して $a/(x^2+1)$ の形に戻して積分しているのであるが、そのあとがきで書いたように、今回はこれを通分せずに複素対数を使って考えてみることにする。

また先日、$\tan x/2=u$ の置換積分を使う $1/(2+\cos x)$ の不定積分を目にしたが、これも複素数を使って考えてみるとやはり複素対数が出てくる。その不定積分も合わせて紹介する。

なお、[1] の「複素数の微分の公式」(実数変数複素数値関数の微積分) の節の内容はすでに知っているものとし、[1] と同様にあくまで実数変数の複素数値関数を主に考え、複素数変数のいわゆる複素関数論には踏みこまないことにする。

2 複素対数

まず、複素 (自然) 対数 $\log z=\log_e z$ を定義する。

複素数 $z=x+iy$ (x,y は実数、$i=\sqrt{-1}$) に対して、複素指数 e^z は、オイラーの公式と指数法則を用いて

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{1}$$

と定義される。複素対数 $\log z$ は、その逆、すなわち

$$e^w=z$$

となる w によって定義される。$w = p + qi$ とすると、

$$z = e^{p+qi} = e^p(\cos q + i \sin q) \tag{2}$$

なので、この絶対値と偏角を考えれば

$$|z| = e^p, \ \arg z = q + 2n\pi$$

となり $p = \log|z|$ となる。ここで、$\arg z$ は z の偏角を表し、$z = re^{i\theta} \neq 0$ ($r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) に対し、

$$\arg z = \theta + 2n\pi \ \ (n \text{ は任意の整数}) \tag{3}$$

と定義されるが、これは 2π の整数倍の不定性を持ち、一意には決まらない。なお、本によっては、それらすべてを値として持つ「多値 (多価) 関数」と定めているものもあるが、本稿では「多値」ではなく、不定積分の積分定数による不定性と同様の「不定性」を持つ値として扱うことにする。

また、この $\arg z$ に対し、$-\pi \leq \theta < \pi$ の範囲の z の偏角を「偏角の主値」と呼んで、$\mathrm{Arg}\, z$ のように書くことがある。この範囲では偏角は一意的に決まる。当然、$\arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2n\pi$ である。

結局、$q = \arg z$ (不定の $2n\pi$ は $\arg z$ の中に含まれると考えることができる) より、$\log z = w$ は以下のように定義されることになる。

$$\log z = \log|z| + i \arg z \ \ \ (= \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z + 2n\pi i) \tag{4}$$

これは $2\pi i$ の整数倍の不定性を持つので、複素対数の主値 $\mathrm{Log}\, z$ を

$$\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z \tag{5}$$

と定めて $z \neq 0$ で一意の値を持つものとして、こちらを使うことも多い。

ここで、後で使用する偏角に関する性質を、以下にいくつか紹介する。

命題 1

$z \neq 0$, $w \neq 0$ に対して、次が成り立つ。

1. $\arg \bar{z} = -\arg z$
2. $\arg zw = \arg z + \arg w$
3. $\arg \dfrac{z}{w} = \arg z - \arg w$

なお、いずれも等号は 2π の整数倍の差を除いて成り立つ、という意味である。

これらは、$z = re^{i\theta}$, $w = Re^{i\phi}$ に対して、

$$\bar{z} = re^{-i\theta},\ \ zw = rRe^{i(\theta+\phi)},\ \ \frac{z}{w} = \frac{r}{R}e^{i(\theta-\phi)}$$

となることから容易に示される。

また、$\mathrm{Arg}\, z$ は、$\arctan x$ を使って以下のように表すことができる。

命題 2

$z = x + iy\ (\neq 0)$ に対して、

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}\, z &= \begin{cases}\arctan(y/x) & (x > 0 \text{ のとき}) \\ \arctan(y/x) + \pi & (x < 0,\, y > 0 \text{ のとき}) \\ \arctan(y/x) - \pi & (x < 0,\, y \leq 0 \text{ のとき}) \\ \pi/2 & (x = 0,\, y > 0 \text{ のとき}) \\ -\pi/2 & (x = 0,\, y < 0 \text{ のとき})\end{cases} \qquad (6) \\ &= \begin{cases}-\arctan(x/y) + \pi/2 & (y > 0 \text{ のとき}) \\ -\arctan(x/y) - \pi/2 & (y < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (y = 0,\, x > 0 \text{ のとき}) \\ -\pi & (y = 0,\, x < 0 \text{ のとき})\end{cases} \qquad (7)\end{aligned}$$

これは、$\mathrm{Arg}\, z$ の定義から容易にわかる。

命題 2 より、$\mathrm{Arg}(x + iy)$ は、x, y の 2 変数関数として各象限で滑らかであり、(6) より実軸 (x 軸) の $x > 0$ の部分でも滑らかにつながり、(7) より虚軸 (y 軸) の $y > 0$ の部分、$y < 0$ の部分でも滑らかにつながっていて、実軸の $x < 0$ の部分では不連続になっている:

$$\lim_{y\to+0} \mathrm{Arg}(x + iy) = \pi,\ \ \lim_{y\to-0} \mathrm{Arg}(x + iy) = -\pi\ \ (x < 0)$$

実数値変数 x の滑らかな複素数値関数 $f(x)=g(x)+ih(x)$ $(\neq 0)$ に対して、$\mathrm{Log}\, f(x)$ は $f(x)$ の値が実軸の左側と交わるところで不連続、それ以外では滑らかな関数となる。

$\log f(x)$ は常に $2\pi i$ の整数倍の不定性を持つことになるが、逆にそのことを利用して、$\mathrm{Log}\, f(x)$ の場合に実軸の左側を越えるときに生じる不連続性を吸収するように不定部分を選ぶことで、すべての x に対して滑らかにできる、と考えることもできる。しかし、そのようにするには複素関数論の「リーマン面」の理論が必要になるので、ここでは詳しくは触れない。

複素対数の主値 $\mathrm{Log}\, z$ に対して、以下が成り立つ。

命題 3

実数値変数の複素数値関数 $f(x)=g(x)+ih(x)$ $(\neq 0)$ に対して、$\mathrm{Log}\, f(x)$ が滑らかな範囲で、

$$(\mathrm{Log}\, f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{8}$$

証明

$\mathrm{Log}\, f(x)$ は、$g(x)\neq 0$ の範囲では (6) より、

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}\, f(x) &= \mathrm{Log}(g(x)+ih(x)) = \log|g(x)+ih(x)| + i\,\mathrm{Arg}(g(x)+ih(x)) \\ &= \frac{1}{2}\log(g(x)^2+h(x)^2) + i\arctan\frac{h(x)}{g(x)} + \beta\end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、β は、$f(x)$ の値の象限に応じて $0, \pi, -\pi$ のいずれかの値となる。

よって、その範囲では導関数は、

$$\begin{aligned}(\mathrm{Log}\, f(x))' &= \frac{1}{2}\frac{2g'(x)g(x)+2h'(x)h(x)}{g(x)^2+h(x)^2} + i\frac{(h'(x)g(x)-h(x)g'(x))/g(x)^2}{1+h(x)^2/g(x)^2} \\ &= \frac{g'g+h'h+i(h'g-hg')}{g^2+h^2} = \frac{(g'+ih')(g-ih)}{(g+ih)(g-ih)} = \frac{g'+ih'}{g+ih} = \frac{f'(x)}{f(x)}\end{aligned}$$

となることがわかる。$g(x)=0$ となる x では、(6) の代わりに (7) を使えばよい。これで命題 3 が示された。■

形式的には、(8) は通常の実数値関数に対する公式

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

と同じものである。$\log f(x)$ の $2n\pi i$ の不定性も、それを定数と思えば

$$(\log f(x))' = (\mathrm{Log}\, f(x) + 2n\pi i)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

と書けなくもないのだが、不定部分の扱いには微妙なところもあるので、一応それは避けておく。

命題 3 から、実数変数の複素数値関数の積分公式

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \mathrm{Log}\, f(x) + C \quad (f(x) \text{ が実軸の左半分と交差しない範囲で}) \tag{9}$$

が得られることになる。なお、これは積分定数の不定性を考えれば複素対数 log で

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(x) + C \tag{10}$$

と書いても実質的にあまり問題はないが、本稿ではやはりそれは避けておく。

3 分母が 2 次の有理関数の積分

まずは、分母が 2 次の有理関数の積分

$$I_1 = \int \frac{bx+c}{x^2+a^2}\,dx \tag{11}$$

を考える。ここで、a, b, c は実数の定数で、$a>0$ とする。

通常これは、

$$I_1 = \int \frac{bx}{x^2+a^2}\,dx + \int \frac{c}{x^2+a^2}\,dx$$

と分けて考え、前者は $x^2+a^2=u$、後者は $x=at$ と置換し、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{b}{u}\frac{du}{2} + \int \frac{c}{a^2}\frac{adt}{t^2+1} = \frac{b}{2}\log|u| + \frac{c}{a}\arctan t + C \\ &= \frac{b}{2}\log(x^2+a^2) + \frac{c}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \end{aligned} \tag{12}$$

となるものである。本節では、これを複素数の範囲で部分分数分解して考える。

$$\frac{bx+c}{x^2+a^2} = \frac{bx+c}{(x+ai)(x-ai)} = \frac{A}{x+ai} + \frac{B}{x-ai}$$

と置くと、

$$bx+c = A(x-ai) + B(x+ai)$$

となるので、$x=ai,\ x=-ai$ を代入することで A, B は

$$B = \frac{abi+c}{2ai} = \frac{b}{2} - \frac{ci}{2a},\ \ A = \frac{-abi+c}{-2ai} = \frac{b}{2} + \frac{ci}{2a}$$

となり、よって

$$\frac{bx+c}{x^2+a^2} = \left(\frac{b}{2} + \frac{ci}{2a}\right)\frac{1}{x+ai} + \left(\frac{b}{2} - \frac{ci}{2a}\right)\frac{1}{x-ai}$$

と分解される。

$x+ai,\ x-ai$ は、x が実数を動いても実軸 (x 軸) とは交わらないので、(9) より、

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x+ai} &= \mathrm{Log}(x+ai) + C_1 = \log|x+ai| + i\,\mathrm{Arg}(x+ai) + C_1, \\ \int \frac{dx}{x-ai} &= \mathrm{Log}(x-ai) + C_2 = \log|x-ai| + i\,\mathrm{Arg}(x-ai) + C_2 \end{aligned}$$

となる。ここで、(7) より、

$$\begin{aligned} \mathrm{Arg}(x+ai) &= -\arctan\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2}, \\ \mathrm{Arg}(x-ai) &= -\arctan\frac{x}{-a} - \frac{\pi}{2} = \arctan\frac{x}{a} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left(\frac{b}{2}+\frac{ci}{2a}\right)\mathrm{Log}(x+ai)+\left(\frac{b}{2}-\frac{ci}{2a}\right)\mathrm{Log}(x-ai)+C_3 \\
&= \left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)\log\sqrt{x^2+a^2}+\left(\frac{ci}{2a}+\frac{ci}{2a}\right)i\left(-\arctan\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2}\right)+C_3 \\
&= \frac{b}{2}\log(x^2+a^2)+\frac{c}{a}\arctan\frac{x}{a}-\frac{c\pi}{2a}+C_3
\end{aligned}
$$

となり、確かに (12) と同じものが得られる。

しかしどちらが易しいかといえば、多分前者の方であり、複素数を用いて分母を 1 次式の積にまで落として部分分数分解をしても、その後の処理があまり易しくないことがわかる。特に、Arg の表現については、ここでは (7) を用いたが、(6) の方で考えてしまうとなかなか (12) にはたどりつけない。

4 三角関数の有理関数の積分

次は、三角関数の含まれる有理関数の積分、例えば $1/(2+\cos x)$ のようなものの不定積分を考える。少し一般化して、

$$
I_2 = \int\frac{dx}{p+\cos x}\ \ (p>1) \tag{13}
$$

を考えることにする。

この積分の標準的な求め方は、$\tan(x/2)=u\ (-\pi<x<\pi)$ とする割と面倒な置換積分であるが、$x=2\arctan u$ より

$$
dx=\frac{2du}{1+u^2},\ \ \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+u^2}-1=\frac{1-u^2}{1+u^2}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\frac{2/(1+u^2)}{p+(1-u^2)/(1+u^2)}\,du=\int\frac{2du}{p(1+u^2)+1-u^2} \\
&= \int\frac{2}{p-1}\,\frac{du}{u^2+(p+1)/(p-1)}
\end{aligned}
$$

となる。ここで $u=\sqrt{(p+1)/(p-1)}\,t$ とすれば

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{2}{p-1}\sqrt{\frac{p+1}{p-1}}\,\frac{p-1}{p+1}\,\frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{p^2-1}}\arctan t + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{p^2-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\,u\right) + C
\end{aligned}
$$

となり、結局

$$
I_2 = \frac{2}{\sqrt{p^2-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\tan\frac{x}{2}\right) + C \tag{14}
$$

が得られる。

ただし、(14) は、$-\pi<x<\pi$ で考えていて、より広い範囲で考えると (14) の右辺は $x=\pm\pi$ では不連続になってしまう。一方で、定義 (13) よりわかるが、I_2 はすべての x で連続につながる原始関数を持つはずなので、ここでそれを先に考えておく。

そのために、定数 $k>0$ に対し、以下のような関数 $g_0(x,k)$, $g_1(x,k)$ を考える。

$$
\begin{aligned}
g_0(x,k) &= \arctan(k\tan x) \qquad (15)\\
g_1(x,k) &= \mathrm{arccot}(k\cot x) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

なお、$x=\mathrm{arccot}\,y$ は $0<x<\pi$ での $y=\cot x$ (図 1) の逆関数で、すべての実数 y で定義され、$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\mathrm{arccot}\,y=0$, $\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\mathrm{arccot}\,y=\pi$ となるもの (図 2)、また $g_0(x,k)$, $g_1(x,k)$ の定義域は、それぞれ $\tan x$, $\cot x$ の定義域と同じものとする。 $x=\mathrm{arccot}\,y$

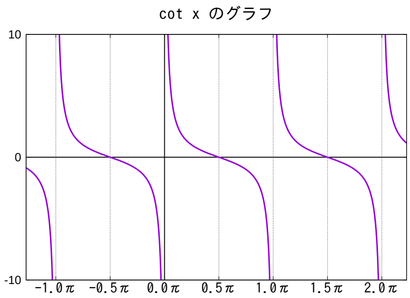

図 1: $y=\cot x$ のグラフ

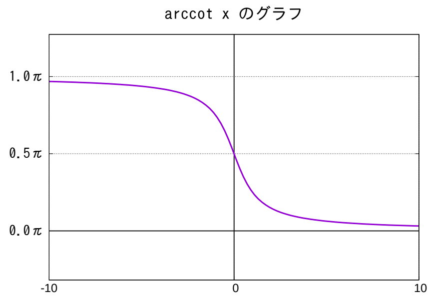

図 2: $y=\mathrm{arccot}\,x$ のグラフ

とすると、$y=\cot x$ $(0<x<\pi)$ で、

$$
y=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin(\pi/2-x)}{\cos(\pi/2-x)}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)
$$

で、$-\pi/2 < \pi/2 - x < \pi/2$ より $\pi/2 - x = \arctan y$ となるから、よって

$$\operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2} - \arctan y$$

となる。これにより、

$$g_1(x,k) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(-k\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + g_0\left(x - \frac{\pi}{2}, k\right) \tag{17}$$

となるので、$g_1(x,k)$ のグラフは、$g_0(x,k)$ のグラフを平行移動したものになる (図 3)。

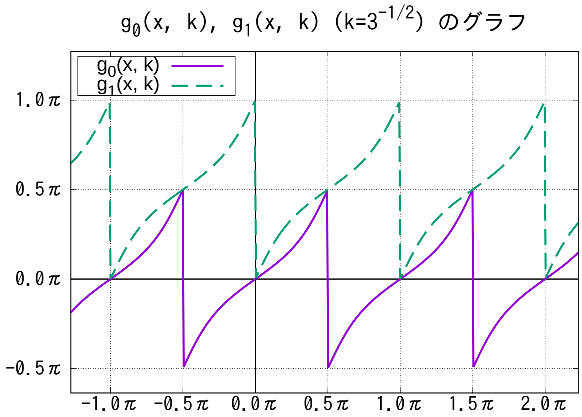

図 3: $g_0(x,k)$, $g_1(x,k)$ のグラフ $(k = 1/\sqrt{3})$

いずれも周期は π、そして $g_0(x,k)$ は奇関数で、$x = (n+1/2)\pi$ (n は整数) で不連続:

$$\lim_{x\to(n+1/2)\pi+0} g_0(x,k) = -\pi/2, \quad \lim_{x\to(n+1/2)\pi-0} g_0(x,k) = \pi/2$$

となっている。

また、$0 < x < \pi/2$ では、$y = g_1(x,k)$ とすると $0 < y < \pi/2$ で、

$$\cot y = k\cot x, \quad \tan y = \frac{1}{k}\tan x, \quad y = \arctan\left(\frac{1}{k}\tan x\right)$$

となり、よって $0 < x < \pi/2$ では $g_1(x,k) = g_0(x, 1/k)$ が成り立つことがわかる。$\pi/2 < x < \pi$ では、この性質と周期性、および (17) により

$$g_1(x,k) = \frac{\pi}{2} + g_0\left(x - \frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2} + g_1\left(x - \frac{\pi}{2}, \frac{1}{k}\right) = \pi + g_0\left(x, \frac{1}{k}\right)$$

となる。

ここから、$g_0(x,k)$, $g_1(x,k)$ の段差を解消した関数 (図 4):

$$\begin{aligned} G_0(x,k) &= g_0(x,k)+n\pi \ \ ((n-1/2)\pi<x<(n+1/2)\pi) \\ G_1(x,k) &= g_1(x,k)+n\pi \ \ (n\pi<x<(n+1)\pi) \end{aligned}$$

は、いずれも連続で (定義域の境界では極限で考える)、上の考察からすべての x に対

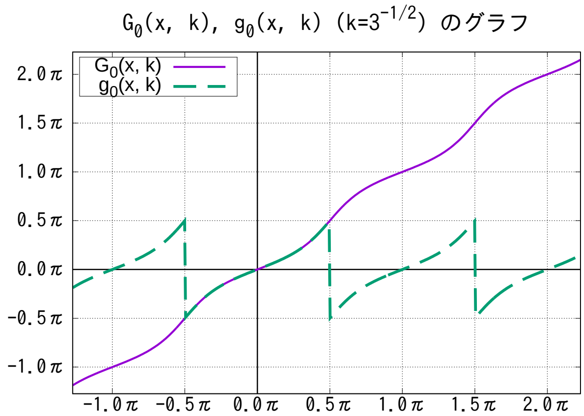

図 4: $G_0(x,k)$, $g_0(x,k)$ のグラフ $(k=1/\sqrt{3})$

して $G_1(x,k)=G_0(x,1/k)$ であることがわかり、よって、すべての x で滑らかであることもわかる。

$G_0(x,k)$ の導関数は、

$$G_0'(x,k) = \frac{k/\cos^2 x}{1+k^2\tan^2 x} = \frac{k}{\cos^2 x+k^2\sin^2 x} = \frac{2k}{1+k^2+(1-k^2)\cos 2x}$$

なので、

$$\begin{aligned} \left\{G_0\left(\frac{x}{2},\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\right)\right\}' &= \frac{2\sqrt{(p-1)/(p+1)}}{1+(p-1)/(p+1)+(1-(p-1)/(p+1))\cos x}\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{p^2-1}}{2p+2\cos x} = \frac{\sqrt{p^2-1}}{2}\,\frac{1}{p+\cos x} \end{aligned}$$

となり、よって (13) の滑らかな原始関数による積分は、

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{p^2-1}}G_0\left(\frac{x}{2},\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\right)+C \ \ \left(=\frac{2}{\sqrt{p^2-1}}G_1\left(\frac{x}{2},\sqrt{\frac{p+1}{p-1}}\right)+C\right) \qquad (18)$$

であることがわかる。これが、$x = \pm n\pi$ で不連続性の段差を持つ (14) を、すべての x に対して滑らかに拡張したものになる。

5 複素数を利用した三角関数の有理関数の積分

三角関数は、複素数を用いて指数関数に直す方が、式の操作が容易になる場合が多い。例えば、$e^{ax}\cos bx$ のような関数の積分は、通常は 2 回の部分積分により元の積分の定数倍の式を導いて、

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{ax}\cos bx\,dx = \int \frac{1}{a}(e^{ax})'\cos bx\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx - \int \frac{1}{a}\,e^{ax}(-b\sin bx)dx \\
&= \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx + \int \frac{b}{a^2}(e^{ax})'\sin bx\,dx \\
&= \frac{1}{a}\,e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\,e^{ax}\sin bx - \int \frac{b^2}{a^2}\,e^{ax}\cos bx\,dx \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{b^2}{a^2}(I + C)
\end{aligned}$$

とし、右辺の I の項を左辺に移行して、

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) I = \frac{e^{ax}}{a^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{b^2}{a^2}C$$

より

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{b^2 C}{a^2+b^2}$$

という形で求めるが、これを複素数を用いて、

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{ax}\cos bx\,dx = \int e^{ax}\,\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (e^{(a+bi)x} + e^{(a-bi)x})dx \\
&= \frac{e^{(a+bi)x}}{2(a+bi)} + \frac{e^{(a-bi)x}}{2(a-bi)} + C = \frac{e^{ax}}{2(a^2+b^2)}\{(a-bi)e^{ibx} + (a+bi)e^{-ibx}\} + C \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C
\end{aligned}$$

とする方が部分積分による方法よりも直感的、機械的で分かりやすい。これと同様のことを I_2 に対して考えてみる。

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ より、$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ と書けるから、

$$\frac{1}{p + \cos x} = \frac{2}{2p + e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{2e^{ix}}{e^{2ix} + 2pe^{ix} + 1}$$

となる。形式的には、$t = e^{ix}$ と置くと $dt = ie^{ix}dx$ なので、

$$I_2 = \int \frac{2}{i} \frac{ie^{ix}}{e^{2ix} + 2pe^{ix} + 1}\,dx = \int \frac{2}{i} \frac{dt}{t^2 + 2pt + 1}$$

となるが、このようにすると t は実数変数ではなく、複素数変数となり、厳密には複素関数論の線積分になってしまい、実数変数の複素数値関数の範囲を越えてしまう。よって、ここではそれを避け、(9) を利用することにする。すなわち、分子の ie^{ix} は使わずに、

$$\frac{2}{i} \frac{1}{e^{2ix} + 2pe^{ix} + 1} = \frac{\gamma}{e^{ix} + \alpha} + \frac{\delta}{e^{ix} + \beta}$$

の形の部分分数分解を行い、それにより I_2 を

$$I_2 = \int \left(\frac{\gamma i e^{iex}}{e^{ix} + \alpha} + \frac{\delta i e^{iex}}{e^{ix} + \beta} \right) dx = \int \left\{ \gamma \frac{(e^{ix} + \alpha)'}{e^{ix} + \alpha} + \delta \frac{(ie^{ix} + \beta)'}{e^{ix} + \beta} \right\} dx$$

のように変形して (9) を適用して複素対数で表す、という方針である。

まず、$t^2 + 2pt + 1 = 0$ の解は、$t = -p \pm \sqrt{p^2 - 1}$ ($p > 1$ より実数解) なので、$\alpha = p - \sqrt{p^2 - 1}$, $\beta = p + \sqrt{p^2 - 1}$ とすれば、$t^2 + 2pt + 1 = (t + \alpha)(t + \beta)$ と因数分解される。なお、解と係数の関係より α は $\alpha = 1/\beta$ と書けることに注意する。これにより、

$$\begin{aligned}
\frac{2}{i} \frac{1}{e^{2ix} + 2pe^{ix} + 1} &= \frac{2}{i} \frac{1}{(e^{ix} + \alpha)(e^{ix} + \beta)} = \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{2}{i} \left(\frac{1}{e^{ix} + \alpha} - \frac{1}{e^{ix} + \beta} \right) \\
&= \frac{1}{i\sqrt{p^2 - 1}} \left(\frac{1}{e^{ix} + \alpha} - \frac{1}{e^{ix} + \beta} \right)
\end{aligned}$$

となるので、I_2 は

$$I_2 = \frac{1}{i\sqrt{p^2 - 1}} \int \left\{ \frac{(e^{ix} + \alpha)'}{e^{ix} + \alpha} - \frac{(e^{ix} + \beta)'}{e^{ix} + \beta} \right\} dx$$

と書ける。

ここで、$p>1$ より $\beta=p+\sqrt{p^2-1}>1$ であり、$e^{ix}+\beta$ は、β 中心の半径 1 の円周上を動くので、実軸の左半分とは交わらない (図 5 の右側の円)。一方、$e^{ix}+\alpha$ も α 中心の半径 1 の円周上を動くが、$0<\alpha=1/\beta<1$ だからその円周の内部に原点があり、実軸の左半分とこの円周とは交わる (図 5 の左側の円)。

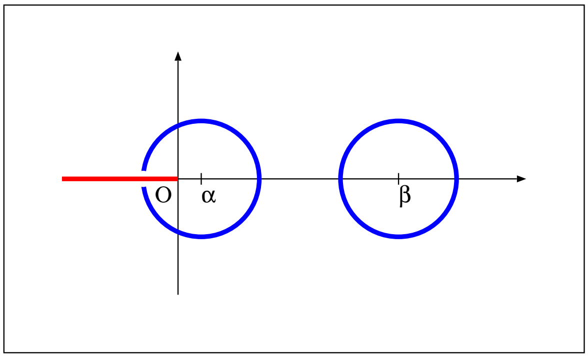

図 5: $e^{ix}+\alpha$ と $e^{ix}+\beta$ の描く円

よって、とりあえず $-\pi<x<\pi$ の範囲で考えることにすれば、$e^{ix}+\alpha$ は実軸の左半分とは交わらない。この範囲では、(9) により

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{i\sqrt{p^2-1}}\{\mathrm{Log}(e^{ix}+\alpha)-\mathrm{Log}(e^{ix}+\beta)\}+C_1\\
&= \frac{1}{i\sqrt{p^2-1}}\left\{\log\frac{|e^{ix}+\alpha|}{|e^{ix}+\beta|}+\mathrm{Arg}(e^{ix}+\alpha)-\mathrm{Arg}(e^{ix}+\beta)\right\}+C_1 \qquad (19)
\end{aligned}$$

となる。ここで、命題 1 より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arg}(e^{ix}+\alpha)-\mathrm{Arg}(e^{ix}+\beta) &= \arg(e^{ix}+\alpha)-\arg(e^{ix}+\beta)+2n_1\pi\\
&= \arg\frac{e^{ix}+\alpha}{e^{ix}+\beta}+2n_2\pi
\end{aligned}$$

であり、$0<\alpha<1<\beta$ より、

$$\begin{aligned}
0<x<\pi &\implies 0<\mathrm{Arg}(e^{ix}+\alpha)<\pi,\ 0<\mathrm{Arg}(e^{ix}+\beta)<\frac{\pi}{2},\\
0>x>-\pi &\implies 0>\mathrm{Arg}(e^{ix}+\alpha)>-\pi,\ 0>\mathrm{Arg}(e^{ix}+\beta)>-\frac{\pi}{2},\\
x=0 &\implies \mathrm{Arg}(e^{ix}+\alpha)=\mathrm{Arg}(e^{ix}+\beta)=0
\end{aligned}$$

なので、いずれにせよ

$$-\pi < \mathrm{Arg}(e^{ix}+\alpha) - \mathrm{Arg}(e^{ix}+\beta) < \pi$$

となり、よってこれは主値の範囲なので、

$$\mathrm{Arg}(e^{ix}+\alpha) - \mathrm{Arg}(e^{ix}+\beta) = \mathrm{Arg}\,\frac{e^{ix}+\alpha}{e^{ix}+\beta} \tag{20}$$

となることがわかる。なお、このような $2n\pi$ の差や主値の範囲の議論は不定積分では省略し、

$$\mathrm{Arg}(e^{ix}+\alpha) - \mathrm{Arg}(e^{ix}+\beta) = \arg\frac{e^{ix}+\alpha}{e^{ix}+\beta} + 2n_2\pi = \mathrm{Arg}\,\frac{e^{ix}+\alpha}{e^{ix}+\beta} + 2n_3\pi$$

として、最後の定数の部分は積分定数に含めて済ませてしまうことも多い。

結局 (20) により、(19) は

$$I_2 = \frac{1}{i\sqrt{p^2-1}}\log\frac{|e^{ix}+\alpha|}{|e^{ix}+\beta|} + \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\mathrm{Arg}\,\frac{e^{ix}+\alpha}{e^{ix}+\beta} + C_1 \tag{21}$$

となる。次は、このそれぞれの項を見てみる。

まず、$\log(|e^{ix}+\alpha|/|e^{ix}+\beta|)$ であるが、

$$\frac{|e^{ix}+\alpha|^2}{|e^{ix}+\beta|^2} = \frac{(\cos x+\alpha)^2+\sin^2 x}{(\cos x+\beta)^2+\sin^2 x} = \frac{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}{1+2\beta\cos x+\beta^2}$$

であり、$\alpha = 1/\beta$ だったので、

$$\frac{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}{1+2\beta\cos x+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\beta^2+2\beta\cos x+1}{1+2\beta\cos x+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

となる。よって、この対数の項は

$$\log\frac{|e^{ix}+\alpha|}{|e^{ix}+\beta|} = -\log\beta \tag{22}$$

と定数になり、この部分は積分定数に取り込まれることになる (実際は $1/(i\sqrt{p^2-1})$ 倍がつくので純虚数の定数)。なお、この計算は、$\cos x, \sin x$ に直さなくても、最初から $\alpha = 1/\beta$ を使って、

$$\frac{|e^{ix}+\alpha|}{|e^{ix}+\beta|} = \frac{1}{\beta}\frac{|\beta e^{ix}+1|}{|e^{ix}+\beta|} = \frac{1}{\beta}\frac{|\beta+e^{-ix}|}{|e^{ix}+\beta|} = \frac{1}{\beta}\frac{|\overline{e^{ix}+\beta}|}{|e^{ix}+\beta|} = \frac{1}{\beta} \tag{23}$$

とすることもできる (少し高度) し、元々 I_2 は実数値なので、(21) の実数部分のみ考えればよく、よって log の方の項は最初から不要である、と見ることもできる。

次は、$(e^{ix}+\alpha)/(e^{ix}+\beta)$ の偏角であるが、正の実数 a に対して $\mathrm{Arg}\, az = \mathrm{Arg}\, z$ となること、および $\alpha = p - \sqrt{p^2-1}$, $\beta = p + \sqrt{p^2-1}$, $\alpha = 1/\beta$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arg}\,\frac{e^{ix}+\alpha}{e^{ix}+\beta} &= \mathrm{Arg}\,\frac{(e^{ix}+\alpha)(e^{-ix}+\beta)}{|e^{ix}+\beta|^2} = \mathrm{Arg}(e^{ix}+\alpha)(e^{-ix}+\beta) \\
&= \mathrm{Arg}(1+\alpha e^{-ix}+\beta e^{ix}+\alpha\beta) = \mathrm{Arg}(2+(\alpha+\beta)\cos x + i(\beta-\alpha)\sin x) \\
&= \mathrm{Arg}\left(1+p\cos x + i\sqrt{p^2-1}\,\sin x\right)
\end{aligned}$$

となるが、$p>1$ より $1+p\cos x$ は、$0<x<\pi$ の範囲、および $-\pi<x<0$ の範囲で符号が変わりうるので、(6) ではなく (7) を用いると

$$\mathrm{Arg}\,\frac{e^{ix}+\alpha}{e^{ix}+\beta} = -\arctan\frac{1+p\cos x}{\sqrt{p^2-1}\,\sin x} + \gamma(x) \tag{24}$$

と書くことができる。ここで $\gamma(x)$ は、$0<x<\pi$ ならば $\gamma(x)=\pi/2$, $0>x>-\pi$ ならば $\gamma(x)=-\pi/2$ である。なお、(24) の右辺は一見 $x=0$ で不連続なようだが、

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+0}\left\{-\arctan\frac{1+p\cos x}{\sqrt{p^2-1}\,\sin x}+\gamma(x)\right\} &= -\lim_{y\to\infty}\arctan y + \frac{\pi}{2} = 0, \\
\lim_{x\to-0}\left\{-\arctan\frac{1+p\cos x}{\sqrt{p^2-1}\,\sin x}+\gamma(x)\right\} &= -\lim_{y\to-\infty}\arctan y - \frac{\pi}{2} = 0
\end{aligned}$$

となり、連続になっている。

(21), (22), (24) より I_2 は、

$$I_2 = -\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\left(\arctan\frac{1+p\cos x}{\sqrt{p^2-1}\,\sin x} - \gamma(x)\right) + C_2 \tag{25}$$

となる。しかし、この式と (14) とはかなり違った形になっている。

偏角の計算で他の方法を取ると、また違う式が得られる。$\alpha = 1/\beta$ を用いると、

$$\operatorname{Arg}\frac{e^{ix}+\alpha}{e^{ix}+\beta} = \operatorname{Arg}\frac{1}{\beta}\,\frac{\beta e^{ix}+1}{e^{ix}+\beta} = \operatorname{Arg} e^{ix}\,\frac{\beta + e^{-ix}}{e^{ix}+\beta}$$

と書けるが、$e^{ix}+\beta = \overline{\beta + e^{-ix}}$ より $\operatorname{Arg}(e^{ix}+\beta) = -\operatorname{Arg}(\beta + e^{-ix})$ なので、

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg} e^{ix}\,\frac{\beta + e^{-ix}}{e^{ix}+\beta} &= x + 2\operatorname{Arg}(\beta + e^{-ix}) = x + 2\operatorname{Arg}(\cos x + \beta - i\sin x)\\ &= x - 2\arctan\frac{\sin x}{\cos x + \beta}\end{aligned}$$

となる。

なお、$0 < x < \pi$ のとき $-\pi/2 < \operatorname{Arg}(\beta + e^{-ix}) < 0$ より $-\pi < x + 2\operatorname{Arg}(\beta + e^{-ix}) < \pi$ で、$-\pi < x < 0$ のときも $0 < \operatorname{Arg}(\beta + e^{-ix}) < \pi/2$ より $-\pi < x + 2\operatorname{Arg}(\beta + e^{-ix}) < \pi$ となるから、この式には $\pm\pi$ は必要ない。

よって、I_2 は

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\left(x - 2\arctan\frac{\sin x}{p + \sqrt{p^2-1} + \cos x}\right) + C_3 \tag{26}$$

とも書けることになる。

さらに、最初から (14) を意識し、分子分母を $e^{ix/2}$ で割って

$$\operatorname{Arg}\frac{e^{ix}+\alpha}{e^{ix}+\beta} = \operatorname{Arg}\frac{1}{\beta}\,\frac{\beta e^{ix}+1}{e^{ix}+\beta} = \operatorname{Arg}\frac{\beta e^{ix/2} + e^{-ix/2}}{e^{ix/2} + \beta e^{-ix/2}}$$

と変形すると、この分母は分子の共役なので、

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg}\frac{\beta e^{ix/2} + e^{-ix/2}}{e^{ix/2} + \beta e^{-ix/2}} &= 2\operatorname{Arg}(\beta e^{ix/2} + e^{-ix/2})\\ &= 2\operatorname{Arg}\left((\beta+1)\cos\frac{x}{2} + i(\beta-1)\sin\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

となる。$-\pi < x < \pi$ より $\cos(x/2) > 0$ なので、(6) より、

$$2\operatorname{Arg}\left((\beta+1)\cos\frac{x}{2} + i(\beta-1)\sin\frac{x}{2}\right) = 2\arctan\frac{(\beta-1)\sin(x/2)}{(\beta+1)\cos(x/2)}$$

となるが、

$$\frac{\beta-1}{\beta+1}=\frac{p-1+\sqrt{p^2-1}}{p+1+\sqrt{p^2-1}}=\frac{\sqrt{p-1}(\sqrt{p-1}+\sqrt{p+1})}{\sqrt{p+1}(\sqrt{p+1}+\sqrt{p-1})}=\sqrt{\frac{p-1}{p+1}} \tag{27}$$

なので、結局

$$\mathrm{Arg}\,\frac{e^{ix}+\alpha}{e^{ix}+\beta}=2\arctan\left(\frac{\beta-1}{\beta+1}\,\tan\frac{x}{2}\right)=2\arctan\left(\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\,\tan\frac{x}{2}\right)$$

となり、よって、(21), (22) よりこの場合は直接 (14) が得られることがわかる。

さて、(25), (26) と (14) の関係についても見ておこう。

まず、(25) であるが、$T=\tan(x/2)$ と書くこととし、倍角の公式を用いると、

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2(x/2)}-1=\frac{1-T^2}{1+T^2},\\ \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2T}{1+T^2}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\frac{1+p\cos x}{\sqrt{p^2-1}\,\sin x} &= \frac{1+T^2+p(1-T^2)}{2T\sqrt{p^2-1}}=\frac{1+p-(p-1)T^2}{2T\sqrt{p^2-1}}\\ &= \frac{1}{2T}\sqrt{\frac{p+1}{p-1}}-\frac{T}{2}\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\end{aligned}$$

と書ける。ここで、$\phi=\arctan\left(T\sqrt{(p-1)/(p+1)}\right)$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\sqrt{\frac{p+1}{p-1}}-\frac{T}{2}\sqrt{\frac{p-1}{p+1}} &= \frac{1}{2\tan\phi}-\frac{\tan\phi}{2}=\frac{1-\tan^2\phi}{2\tan\phi}=\frac{\cos^2\phi-\sin^2\phi}{2\sin\phi\cos\phi}\\ &= \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi}=\frac{\sin(\pi/2-2\phi)}{\cos(\pi/2-2\phi)}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\phi\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{2}-2\phi\right)\end{aligned}$$

となる。

$0<x<\pi$ なら $T=\tan(x/2)>0$ より $0<\phi<\pi/2$、よって $-\pi/2<\pi/2-2\phi<\pi/2$ となるので、

$$\arctan\frac{1+p\cos x}{\sqrt{p^2-1}\,\sin x}=\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\phi\right)\right)=\frac{\pi}{2}-2\phi$$

となる。同様に、$0 > x > -\pi$ なら $T = \tan(x/2) < 0$ より $0 > \phi > -\pi/2$、よって $-\pi/2 < -\pi/2 - 2\phi < \pi/2$ となるので、

$$\arctan\frac{1+p\cos x}{\sqrt{p^2-1}\,\sin x} = \arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{2}-2\phi\right)\right) = -\frac{\pi}{2}-2\phi$$

となる。よって、いずれの場合も、

$$\arctan\frac{1+p\cos x}{\sqrt{p^2-1}\,\sin x} - \gamma(x) = -2\phi = -2\arctan\left(\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\,\tan\frac{x}{2}\right)$$

となるので、よって $-\pi < x < \pi$ の範囲で (25) は確かに (14) に一致することがわかる。

次は (26) と (14) の関係を見る。

$$\begin{aligned} x - 2\arctan\frac{\sin x}{\cos x+\beta} &= 2\left(\frac{x}{2} - \arctan\frac{\sin x}{\cos x+\beta}\right) \\ &= 2\left\{\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \arctan\frac{\sin x}{\cos x+\beta}\right\} \end{aligned} \tag{28}$$

となるが、次の加法定理によりこれを一つにまとめることができる。

命題 4

$\alpha = \arctan X$, $\beta = \arctan Y$ に対して、

- $\alpha+\beta \neq \pm\pi/2$ のとき、

$$\arctan X + \arctan Y = \arctan\frac{X+Y}{1-XY} + \gamma \tag{29}$$

  ここで γ は、$\alpha+\beta < -\pi/2$ ならば $\gamma = -\pi$, $-\pi/2 < \alpha+\beta < \pi/2$ ならば $\gamma = 0$, $\pi/2 < \alpha+\beta$ ならば $\gamma = \pi$。

- $\alpha-\beta \neq \pm\pi/2$ のとき、

$$\arctan X - \arctan Y = \arctan\frac{X-Y}{1+XY} + \delta \tag{30}$$

  ここで δ は、$\alpha-\beta < -\pi/2$ ならば $\delta = -\pi$, $-\pi/2 < \alpha-\beta < \pi/2$ ならば $\delta = 0$, $\pi/2 < \alpha-\beta$ ならば $\delta = \pi$。

証明

$\tan\alpha = X, \tan\beta = Y$ より、$\alpha+\beta\neq\pm\pi/2$ のとき、

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{X+Y}{1-XY}$$

となる。よって、$\alpha+\beta<-\pi/2$ ならば、$-\pi<\alpha+\beta<-\pi/2$ より

$$\tan(\alpha+\beta+\pi) = \tan(\alpha+\beta) = \frac{X+Y}{1-XY},\ \ 0<\alpha+\beta+\pi<\frac{\pi}{2}$$

なので、

$$\alpha+\beta+\pi = \arctan\frac{X+Y}{1-XY}$$

となり、よって

$$\arctan X + \arctan Y = \alpha+\beta = \arctan\frac{X+Y}{1-XY} - \pi$$

が得られる。$-\pi/2<\alpha+\beta<\pi/2$ の場合、$\pi/2<\alpha+\beta$ の場合も同様である。

(30) は、(29) で Y を $-Y$ とすれば得られる。■

今、$-\pi<x<\pi$ として (28) の arctan の差を考えると、$0<x<\pi$ ならば $\tan(x/2)>0$, $\sin x/(\cos x+\beta)>0$ よりそれらの arctan の値はそれぞれ 0 から $\pi/2$ の間にあり、その差は $-\pi/2$ から $\pi/2$ の間にある。$0>x>-\pi$ の場合も $\tan(x/2)<0, \sin x/(\cos x+\beta)<0$ よりそれらの arctan の差は $-\pi/2$ から $\pi/2$ の間にある。よって、命題 4 により

$$\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \arctan\frac{\sin x}{\cos x+\beta} = \arctan\frac{\tan(x/2)-\sin x/(\cos x+\beta)}{1+\tan(x/2)\sin x/(\cos x+\beta)}$$

となる。ここで、前と同様に $T=\tan(x/2)$ とすれば、

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{\cos x+\beta} &= \frac{2T/(1+T^2)}{(1-T^2)/(1+T^2)+\beta} = \frac{2T}{(1-T^2)+(1+T^2)\beta}\\ &= \frac{2T}{(\beta+1)+(\beta-1)T^2}\end{aligned}$$

より、(27) より、

$$
\begin{aligned}
\frac{\tan(x/2)-\sin x/(\cos x+\beta)}{1+\tan(x/2)\sin x/(\cos x+\beta)} &= \frac{T-2T/((\beta+1)+(\beta-1)T^2)}{1+2T^2/((\beta+1)+(\beta-1)T^2)} \\
= \quad & \frac{(\beta+1)T+(\beta-1)T^3-2T}{(\beta+1)+(\beta-1)T^2+2T^2} = \frac{(\beta-1)T(1+T^2)}{(\beta+1)(1+T^2)} = \frac{\beta-1}{\beta+1}T \\
= \quad & \sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\,\tan\frac{x}{2}
\end{aligned}
$$

となることがわかる。これと (28) により、$-\pi < x < \pi$ では (26) が (14) に一致することがわかる。

しかも、(26) の右辺のかっこの中の式を $H(x)$ とすると、$p > 1$ より $H(x)$ はすべての x に対して滑らかであり、明らかに $H(-x) = H(x)$, $H(x+2\pi) = H(x) + 2\pi$ が成り立つので、この $H(x)$ は実は (18) の $G_0\left(x/2, \sqrt{(p-1)/(p+1)}\right)$ に等しく、つまり (26) は、I_2 の、すべての x で連続な原始関数を与えていることがわかる。

(14) の式は元々 $-\pi < x < \pi$ に対してしか成り立たず、すべての x に対して滑らかな原始関数を持つはずの I_2 を表現するためには、(18) のように G_0 を導入しなければいけなかったが、それは実は (26) のような式で容易に表わされることがわかり、よって (14) よりも (26) の方がむしろ優れていると見ることもできる。

しかし、逆に複素数を使わずに普通に置換積分による不定積分を行っても、なかなか (26) の式にはたどりつけない。

6 最後に

今回、複素対数を用いた 2 つの不定積分を紹介した。

工学部などでは複素数を用いた簡易計算が行われることがあるが、複素対数まで持ち出すと、実は多少面倒になるということが本稿によって少しは感じてもらえるだろうか。

途中でいくつか紹介したように、細かい議論を避ける方法はあるので、慣れてしまえばそれほど難しくはないのかもしれないが、それでも正しく計算するには正しい理屈、特に複素関数論の初歩はある程度把握している必要はあり、簡易計算では複素対数はやはり避けられるなら避ける方が無難なような気がする。

参考文献

[1] 「複素数を利用した有理関数の積分」竹野茂治、2006 年 6 月 2 日
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/basic3.html#quotef