2006 年 6 月 2 日

複素数を利用した有理関数の積分

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

[1] では、有理関数の積分の難点である

$$\frac{(2m-1)\text{ 次の整式}}{(x^2+1)^m}$$

の積分を、分子が奇数次と偶数次の項に分離し、その偶数次の方に対しては部分積分を使って計算する方法について、また、[2] では、それを未定係数法で計算する方法について考察した。

複素数を使えば、$(x^2+1)=(x+i)(x-i)$ のように因数分解されるから、容易に想像されるように、これには、複素数を用いて、

$$\frac{(2m-1)\text{ 次の整式}}{(x^2+1)^m}=\frac{(m-1)\text{ 次の整式}}{(x+i)^m}+\frac{(m-1)\text{ 次の整式}}{(x-i)^m}$$

のように部分分数分解をしてから計算する方法もある。しかし、実際に計算してみればわかるが、それはそれほど簡単ではない。共役複素数を利用してその対称性を使えば、多少楽にはできるのではあるが、それでも部分積分等の方法に代わる、というほどの方法ではない。

ここでは、その対称性等の性質を具体例を含めてまとめておく。

2 共役による対称性

分子が奇数次の場合は容易に積分できるので、ここでは分子が偶数次の場合にのみ限定し、

$$\frac{x^2\text{ の }(m-1)\text{ 次の整式}}{(x^2+1)^m}$$

を考えることにする。$(x^2+1)^m=(x+i)^m(x-i)^m$ なので [3] で述べたように、

$$\frac{f(x^2)}{(x^2+1)^m}=\frac{g(x)}{(x+i)^m}+\frac{h(x)}{(x-i)^m} \tag{1}$$

のように部分分数分解できる。ここで、$f(y)$ は y に関する実数係数の $(m-1)$ 次の整式とし、$g(x), h(x)$ は複素数係数の高々 $(m-1)$ 次の整式になる。

分母を払えば、

$$f(x^2) = g(x)(x-i)^m + h(x)(x+i)^m \tag{2}$$

となるが、$f(x^2)$ は実数係数なのでこの両辺の共役を取ると、

$$f(x^2) = \bar{g}(x)(x+i)^m + \bar{h}(x)(x-i)^m \tag{3}$$

となる。ここで、$\bar{g}(x)$ は、$g(x)$ の係数をすべて共役複素数にした整式を意味する。(2), (3) により、

$$(g-\bar{h})(x-i)^m + (h-\bar{g})(x+i)^m = 0$$

よって、

$$(g-\bar{h})(x-i)^m = (\bar{g}-h)(x+i)^m$$

が成り立つ。$g-\bar{h} \neq 0$ であれば左辺の因子である $(x-i)^m$ は右辺の因子にもなるが、それは $(x+i)^m$ とは互いに素なので、$(x-i)^m$ は $\bar{g}-h$ の因子であるはずである。しかし、$\bar{g}-h$ の次数 $\deg(\bar{g}-h)$ は $\deg(\bar{g}-h) < m$ であるから、これは $\bar{g}-h=0$ を意味し、それは $g-\bar{h} \neq 0$ に反する。よって背理法により $g-\bar{h} = \bar{g}-h = 0$ となるので、(1) は、

$$\frac{f(x^2)}{(x^2+1)^m} = \frac{g(x)}{(x+i)^m} + \frac{\bar{g}(x)}{(x-i)^m} \tag{4}$$

という形になる。(1) だと、$g(x), h(x)$ の自由度があるが、(4) だと $g(x)$ だけの自由度なので未定係数法で考える場合多少楽になる。

しかし、$g(x)$ が高々 $(m-1)$ 次式だとは言ってもその係数は複素数なので、係数は複素数 m 個、すなわち実数 $2m$ 個の自由度がまだあることになる。

3 偶数次、奇数次による対称性

$h=\bar{g}$ により (2) は、

$$f(x^2) = g(x)(x-i)^m + \bar{g}(x)(x+i)^m \tag{5}$$

になるが、左辺が偶数次の項のみなので、これを利用すると g の形はもう少し限定することができる。

容易にわかるように、$(x+i)^m$ は、

$$(x+i)^m = p(x) + iq(x) = \begin{cases} \alpha(x^2) + ix\beta(x^2) & (m\text{ が偶数のとき}) \\ x\gamma(x^2) + i\delta(x^2) & (m\text{ が奇数のとき}) \end{cases} \tag{6}$$

のように書ける。ここで、$\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\gamma(y)$, $\delta(y)$ は実数係数の整式で、その次数は

$$\deg\alpha = \frac{m}{2},\ \deg\beta = \frac{m-2}{2},\ \deg\gamma = \frac{m-1}{2},\ \deg\delta = \frac{m-1}{2} \tag{7}$$

となる。

$g(x)$ の係数を実数部分と虚数部分に分離して、$g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$ ($g_j(x)$ は実数係数の整式) とすると、$\bar{g}(x) = g_1(x) - ig_2(x)$ であり、また $(x-i)^m = \overline{(x+i)^m} = p(x) - iq(x)$ であるから、(5) より、

$$f(x^2) = (g_1 + ig_2)(p - iq) + (g_1 - ig_2)(p + iq) = 2pg_1 + 2qg_2 \tag{8}$$

となる。

m が偶数の場合、g_j は高々 $(m-1)$ 次の多項式だから、それを偶数次と奇数次に分けて

$$g_j(x) = s_j(x^2) + xt_j(x^2) \quad (j = 1, 2) \tag{9}$$

のようにすると、

$$\deg s_j \leq \frac{m-2}{2},\ \deg t_j \leq \frac{m-2}{2}$$

であり、(6), (8) より、

$$\begin{aligned} f(x^2) &= 2pg_1 + 2qg_2 \\ &= 2\alpha(x^2)\{s_1(x^2) + xt_1(x^2)\} + 2x\beta(x^2)\{s_2(x^2) + xt_2(x^2)\} \\ &= 2\{\alpha(x^2)s_1(x^2) + x^2\beta(x^2)t_2(x^2)\} + 2x\{\alpha(x^2)t_1(x^2) + \beta(x^2)s_2(x^2)\} \end{aligned}$$

となる。左辺は偶数次の項しかないので、右辺の奇数次の項の和は 0、すなわち

$$\alpha(x^2)t_1(x^2) + \beta(x^2)s_2(x^2) = 0$$

が成り立つことになる。よってすべての y に対し、

$$\alpha(y)t_1(y) + \beta(y)s_2(y) = 0 \tag{10}$$

が成り立つ。

しかし、後で示すように、$p(x)$ と $q(x)$ は互いに素なので、$\alpha(y)$ と $\beta(y)$ も互いに素であり、この式の多項式の次数は

$$\deg\alpha = \frac{m}{2},\ \deg\beta = \frac{m-2}{2},\ \deg s_2 \le \frac{m-2}{2},\ \deg t_1 \le \frac{m-2}{2}$$

となっている。(10) より、

$$\alpha(y)t_1(y) = -\beta(y)s_2(y)$$

であり、左辺の因子 $\alpha(y)$ は右辺の因子でもあり、α と β は互いに素なので、α は s_2 の因子でなければいけないが、次数を比較すれば $s_2 = 0$ でなければならないことがわかる。よって、$t_1 = 0$ にもなる。

結局、m が偶数の場合は、

$$g_1(x) = s_1(x^2), \quad g_2(x) = xt_2(x^2)$$

となるので $g(x)$ は

$$g(x) = g_1(x) + ig_2(x) = s_1(x^2) + ixt_2(x^2) \tag{11}$$

の形になることになる。

同じように m が奇数の場合を考えてみると、g_j は高々 $(m-1)$ 次の多項式だから、同様に (9) のように分けると、s_j, t_j の次数は

$$\deg s_j \le \frac{m-1}{2},\ \deg t_j \le \frac{m-3}{2}$$

となる。(6), (8) より、

$$\begin{aligned}
f(x^2) &= 2pg_1 + 2qg_2 \\
&= 2x\gamma(x^2)\{s_1(x^2) + xt_1(x^2)\} + 2\delta(x^2)\{s_2(x^2) + xt_2(x^2)\} \\
&= 2\{x^2\gamma(x^2)t_1(x^2) + \delta(x^2)s_2(x^2)\} + 2x\{\gamma(x^2)s_1(x^2) + \delta(x^2)t_2(x^2)\}
\end{aligned}$$

となり、この場合は

$$\gamma(y)s_1(y)+\delta(y)t_2(y)=0 \tag{12}$$

が成り立つ。$p(x)$ と $q(x)$ が互いに素なのでこの $\gamma(y)$ と $\delta(y)$ も互いに素で、次数は

$$\deg\gamma=\frac{m-1}{2},\ \deg\delta=\frac{m-1}{2},\ \deg s_1\leq\frac{m-1}{2},\ \deg t_2\leq\frac{m-3}{2}$$

であるから、$\gamma s_1=-\delta t_2$ を考えると γ と δ は互いに素なので γ は t_2 の因子でなければならないが、次数を比較すればそれは $t_2=0$ を意味し、よって $s_1=0$ にもなる。

よって、m が奇数の場合は、

$$g(x)=g_1(x)+ig_2(x)=xt_1(x^2)+is_2(x^2)$$

となることになる。

以上をまとめると、以下のようになる。

命題 1

(5) を満たす高々 $(m-1)$ 次の整式 $g(x)$ は、

- m が偶数の場合は、偶数次の係数は実数、奇数次の係数は純虚数
- m が奇数の場合は、奇数次の係数は実数、偶数次の係数は純虚数

でなければならない。

4 補題の証明

ここでは、3 節で利用した、次の補題を証明する。

補題 2

(6) の $p(x)$, $q(x)$ は互いに素。よって、(6) の $\alpha(y)$ と $\beta(y)$, $\gamma(y)$ と $\delta(y)$ も互いに素。

証明

実数係数の整式 $p(x)$, $q(x)$ が互いに素ではないとすると、[3] の 命題 8, 系 9 を利用すれば、その共通因子は実数係数の整式と取れることがわかる。それを $r(x)$ (最高次の係数を 1 とする) とし、$p(x)$, $q(x)$ を $r(x)$ で割った商をそれぞれ $P(x)$, $Q(x)$ とすると、$p(x) = P(x)r(x)$, $q(x) = Q(x)r(x)$ であるので、

$$(x+i)^m = p(x) + iq(x) = r(x)\{P(x) + iQ(x)\}$$

となるが、この式より $r(x)$ は $(x+i)^m$ の因子でなくてはならず、よって

$$r(x) = (x+i)^k \quad (k \leq m)$$

でなくてはならないことになる。しかし、右辺は $k \geq 1$ ならば明らかに実数係数の多項式ではないので、$k = 0$、よって共通因子 $r(x)$ は $r(x) = 1$ となるので $p(x)$, $q(x)$ は互いに素となる。

$p(x)$, $q(x)$ が互いに素なので、例えば m が偶数の場合、$p(x) = \alpha(x^2)$, $q(x) = x\beta(x^2)$ も互いに素となる (もし α, β に共通因子があれば、p, q が共通因子を持つことになる)。m が奇数の場合も同様。■

5 具体例の計算

ここでは、[2] で計算した例の偶数次の部分

$$h(x) = \frac{-6x^4 - x^2 - 7}{(x^2+1)^3} \tag{13}$$

を利用し、命題 1 を用いて複素数の範囲で分解し、積分を行うとにする。今の場合、m が奇数なので、

$$\frac{-6x^4 - x^2 - 7}{(x^2+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+i)^3} + \frac{\bar{g}(x)}{(x-i)^3}$$

と分けると、高々 2 次式である $g(x)$ は命題 1 により

$$g(x) = iax^2 + bx + ic \quad (a, b, c \text{ は実数定数})$$

と書けることになる。

$$(x+i)^3 = x^3+3x^2i+3xi^2+i^3 = x^3+3x^2i-3x-i = (x^3-3x)+i(3x^2-1)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&-6x^4-x^2-7 = g(x)(x-i)^3+\bar{g}(x)(x+i)^3 \\
&\quad = \{bx+i(ax^2+c)\}\{(x^3-3x)-i(3x^2-1)\} \\
&\qquad +\{bx-i(ax^2+c)\}\{(x^3-3x)+i(3x^2-1)\} \\
&\quad = 2bx^2(x^2-3)+2(ax^2+c)(3x^2-1)
\end{aligned}$$

となる。$x^2=y$ と置けば

$$-6y^2-y-7 = 2by(y-3)+2(ay+c)(3y-1)$$

となる。ここから係数比較、あるいは $y=0,3,1/3$ 等を代入すれば、

$$a=-\frac{5}{2},\ b=\frac{9}{2},\ c=-\frac{7}{2}$$

となることがわかる。よって、

$$\frac{-6x^4-x^2-7}{(x^2+1)^3} = \frac{-5ix^2+9x+7i}{2(x+i)^3}+\frac{5ix^2+9x-7i}{2(x-i)^3} \tag{14}$$

となる。この右辺の最初の式で $x+i=t$ と置くと、

$$\begin{aligned}
\frac{-5ix^2+9x+7i}{2(x+i)^3} &= \frac{-5i(t-i)^2+9(t-i)+7i}{2t^3} = \frac{-5it^2-10t+5i+9t-9i+7i}{2t^3} \\
&= \frac{-5it^2-t+3i}{2t^3} = -\frac{5i}{2t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{3i}{2t^3} \\
&= -\frac{5i}{2(x+i)}-\frac{1}{2(x+i)^2}+\frac{3i}{2(x+i)^3}
\end{aligned}$$

と分けられることがわかる。(14) の右辺の 2 つ目の項はこの式の共役複素数であるから、

$$\frac{5ix^2+9x-7i}{2(x-i)^3} = \frac{5i}{2(x-i)}-\frac{1}{2(x-i)^2}-\frac{3i}{2(x-i)^3}$$

となる。

分母が一次式の場合は、積分を考えるのは少し厄介なので (複素対数関数を考えないといけない)、それは共役なものと通分してまとめると、

$$\begin{aligned}
&\frac{-6x^4-x^2-7}{(x^2+1)^3}\\
=&\ -\frac{5i}{2(x+i)}+\frac{5i}{2(x-i)}-\frac{1}{2(x-i)^2}-\frac{1}{2(x+i)^2}-\frac{3i}{2(x-i)^3}+\frac{3i}{2(x+i)^3}\\
=&\ -\frac{5}{x^2+1}-\frac{1}{2(x-i)^2}-\frac{1}{2(x+i)^2}-\frac{3i}{2(x-i)^3}+\frac{3i}{2(x+i)^3}
\end{aligned}$$

となる。この式を積分すると、a が複素数であっても $m \geq 2$ のときは

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m}=\int(x-a)^{-m}dx=\frac{1}{1-m}(x-a)^{1-m}+C=-\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x-a)^{m-1}}+C \tag{15}$$

が成り立つ (証明は A 節参照) ので、

$$\begin{aligned}
&\int\frac{-6x^4-x^2-7}{(x^2+1)^3}dx\\
=&\ -5\tan^{-1}x+\frac{1}{2(x-i)}+\frac{1}{2(x+i)}+\frac{3i}{4(x-i)^2}-\frac{3i}{4(x+i)^2}+C\\
=&\ -5\tan^{-1}x+\frac{x}{x^2+1}+\frac{3i\{(x+i)^2-(x-i)^2\}}{4(x^2+1)^2}+C\\
=&\ -5\tan^{-1}x+\frac{x}{x^2+1}-\frac{3x}{(x^2+1)^2}+C
\end{aligned}$$

となる。

6 最後に

最初にも述べたが、5 節の計算を見てもわかる通り、この方法による計算は必ずしも楽ではない。ただ、このような方針だと「楽ではない」ということを認識することはそれなりに意味があると思うので、このようにまとめておく価値はあるとは思う。

なお、今回は分母が 1 次式の積分は、複素対数関数になることを避けて計算したが、そのような計算も一度どこかにまとめておこうと思う。

参考文献

[1] 「有理関数の積分について」竹野茂治、2003 年 5 月 26 日
`http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/basic3.html#quotef`

[2] 「有理関数の積分について (その 2)」竹野茂治、2006 年 5 月 26 日 (URL は [1] に同じ)

[3] 「部分分数分解の原理について」竹野茂治、2006 年 6 月 2 日 (URL は [1] に同じ)

A 複素数の微分の公式

ここでは、5 節で使用した公式 (15) を証明する。もちろん、これは次の微分の公式が成立すればよい。

$$\left\{\frac{1}{(x-\alpha)^n}\right\}' = -\frac{n}{(x-\alpha)^{n+1}} \quad (\alpha \text{ は複素定数}) \tag{16}$$

まず、複素数が含まれている実数変数の関数の微分と積分の意味について定義しておく。

定義 3

複素数値関数 $f(x) = g(x) + ih(x)$ (x は実数、$g(x)$, $h(x)$ は実数値関数) に対して、その微分と積分を次のように定義する。

- 微分: $f'(x) = g'(x) + ih'(x)$
- 積分: $\displaystyle\int f(x)dx = \int g(x)dx + i\int h(x)dx$

i は定数 ($i = \sqrt{-1}$) であることを考えれば、これは自然な定義である。これに対し、次が成り立つ。

命題 4

複素数値関数 $f = f(x)$, $g = g(x)$ に対し、次が成り立つ。

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(\alpha f)' = \alpha f'$ (α は複素定数)

3. $(fg)' = f'g + fg'$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
5. $(f^n)' = nf^{n-1}f'$ (n は自然数)

証明

以下、f, g を実数部分、虚数部分に分けて、$f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$ とする。

1.

$$\begin{aligned}(f+g)' = \{(f_1+g_1)+i(f_2+g_2)\}' &= (f_1+g_1)'+i(f_2+g_2)' = (f_1'+g_1')+i(f_2'+g_2') \\ &= (f_1'+if_2')+(g_1'+ig_2') = f'+g'\end{aligned}$$

2. $\alpha = a + bi$ (a, b は実数) とすると、

$$\alpha f = (a+bi)(f_1+if_2) = (af_1-bf_2)+i(af_2+bf_1)$$

なので、

$$(\alpha f)' = (af_1-bf_2)'+i(af_2+bf_1)' = (af_1'-bf_2')+i(af_2'+bf_1')$$

一方、

$$\alpha f' = (a+bi)(f_1'+if_2') = (af_1'-bf_2')+i(af_2'+bf_1')$$

なので確かに成り立つ。

3.

$$fg = (f_1+if_2)(g_1+ig_2) = (f_1g_1-f_2g_2)+i(f_1g_2+f_2g_1)$$

より、

$$\begin{aligned}(fg)' &= (f_1g_1-f_2g_2)'+i(f_1g_2+f_2g_1)' \\ &= (f_1'g_1+f_1g_1'-f_2'g_2-f_2g_2')+i(f_1'g_2+f_1g_2'+f_2'g_1+f_2g_1')\end{aligned}$$

一方、

$$
\begin{aligned}
f'g + fg' &= (f_1' + if_2')(g_1 + ig_2) + (f_1 + if_2)(g_1' + ig_2') \\
&= (f_1'g_1 - f_2'g_2) + i(f_1'g_2 + f_2'g_1) + (f_1g_1' - f_2g_2') + i(f_1g_2' + f_2g_1') \\
&= (f_1'g_1 + f_1g_1' - f_2'g_2 - f_2g_2') + i(f_1'g_2 + f_1g_2' + f_2'g_1 + f_2g_1')
\end{aligned}
$$

なので確かに成り立つ。

4. まず、

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

を示す。これが言えれば、3 より、

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

となって 4. が得られる。

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_1 + ig_2} = \frac{g_1 - ig_2}{(g_1 + ig_2)(g_1 - ig_2)} = \frac{g_1 - ig_2}{g_1^2 + g_2^2}$$

より、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g}\right)' &= \left(\frac{g_1}{g_1^2 + g_2^2}\right)' - i\left(\frac{g_2}{g_1^2 + g_2^2}\right)' \\
&= \frac{g_1'}{g_1^2 + g_2^2} - g_1\frac{(g_1^2 + g_2^2)'}{(g_1^2 + g_2^2)^2} - i\frac{g_2'}{g_1^2 + g_2^2} + ig_2\frac{(g_1^2 + g_2^2)'}{(g_1^2 + g_2^2)^2} \\
&= \frac{g_1' - ig_2'}{g_1^2 + g_2^2} - \frac{(g_1 - ig_2)(g_1^2 + g_2^2)'}{(g_1^2 + g_2^2)^2} \\
&= \frac{(g_1' - ig_2')(g_1^2 + g_2^2) - (g_1 - ig_2)(g_1^2 + g_2^2)'}{(g_1^2 + g_2^2)^2} \\
&= (g_1 - ig_2)\frac{(g_1' - ig_2')(g_1 + ig_2) - (g_1^2 + g_2^2)'}{(g_1^2 + g_2^2)^2} \qquad (17) \\
&\quad ((g_1 + ig_2)(g_1 - ig_2) = g_1^2 + g_2^2)
\end{aligned}
$$

となるが、

$$(g_1^2 + g_2^2)' = (g_1g_1 + g_2g_2)' = 2g_1g_1' + 2g_2g_2'$$

なので、式 (17) の分子は、

$$
\begin{aligned}
&(g_1' - ig_2')(g_1 + ig_2) - (g_1^2 + g_2^2)' = g_1'g_1 + g_2'g_2 + i(g_1'g_2 - g_2'g_1) - (2g_1g_1' + 2g_2g_2') \\
&= -g_1g_1' - g_2g_2' + i(g_1'g_2 - g_2'g_1) = (-g_1 + ig_2)g_1' + (-g_2 - ig_1)g_2' \\
&= -(g_1 - ig_2)g_1' - i(g_1 - ig_2)g_2' = -(g_1 - ig_2)(g_1' + ig_2')
\end{aligned}
$$

となるので、よって、

$$
\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{(g_1 - ig_2)^2(g_1' + ig_2')}{(g_1^2 + g_2^2)^2} = -\frac{(g_1 + ig_2)'}{(g_1 + ig_2)^2} = -\frac{g'}{g^2}
$$

となって成立する。

5. これは、積の微分 3. を繰り返し用いれば (または、厳密に示すならば帰納法で) 得られる。■

(16) の証明

命題 4 の 1., 2., 4. より、

$$
\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) = -\frac{(x-\alpha)'}{(x-\alpha)^2} = -\frac{(x)' - (\alpha)'}{(x-\alpha)^2} = -\frac{1}{(x-\alpha)^2}
$$

なので、命題 4 の 5. より、

$$
\begin{aligned}
\left\{\frac{1}{(x-\alpha)^n}\right\}' &= \left\{\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^n\right\}' = n\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)' = \frac{n}{(x-\alpha)^{n-1}}\left(-\frac{1}{(x-\alpha)^2}\right) \\
&= -\frac{n}{(x-\alpha)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

■