2006 年 6 月 2 日

部分分数分解の原理について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

基礎数理 III の教科書 [1] には、有理関数がどのような形の部分分数に分解されうるのかと、その未定係数法による実例は書いてあるが、なぜそのような形に分解可能なのかという理由については説明がなされていない。

そこで、部分分数分解の原理として、私は例年次の定理、そしてそこから得らえる系を紹介している。

定理 1

整式 $A(x)$, $B(x)$ が $\deg A < \deg B$ ($\deg f(x)$ は、整式 $f(x)$ の次数を意味する) のとき、$B(x) = B_1(x)B_2(x)$ で整式 $B_1(x)$, $B_2(x)$ が互いに素ならば、

- $\deg A_1 < \deg B_1$, $\deg A_2 < \deg B_2$
- $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{B_1B_2} = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2}$

となるような整式 $A_1(x)$, $A_2(x)$ が、ただ 1 組存在する。

系 2

整式 $A(x)$, $B(x)$ が $\deg A < \deg B$ のとき、$B(x) = B_1(x)B_2(x)\cdots B_n(x)$ で、整式 $B_1(x)$, $B_2(x)$, $\ldots$,$B_n(x)$ がどの 2 つも互いに素ならば、

- $\deg A_j < \deg B_j$ $(j = 1, 2, \ldots n)$
- $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{B_1B_2\cdots B_n} = \dfrac{A_1}{B_1} + \dfrac{A_2}{B_2} + \cdots + \dfrac{A_n}{B_n}$

となるような整式 $A_1(x)$, $A_2(x)$, $\ldots$, $A_n(x)$ が、ただ 1 組存在する。

なお、2 つの整式 $f(x), g(x)$ が 互いに素 であるとは、1 次以上の共通因子 $(f(x), g(x)$ の両方を割り切る整式) が存在しないことを意味する。

講義では、証明なしでこの定理を紹介しているだけだったので、ここにその証明を簡単にまとめておくこととする。

なお、以下は実数係数の整式 (多項式) を考えることとするが、有理数係数の整式に限定しても、あるいは複素数係数の整式に広げても同じ論法が使える。

2 互除法

定理 1 の証明は、初等的な代数学の本にはたいてい載っている話であるが、その証明には、いわゆる ユークリッドの互除法 と呼ばれる方法を用いる。その互除法の原理となるのは、次の補題である。

補題 3

整式 $f(x)$ を整式 $g(x)$ で割った余りを $h(x)$ とするとき、

$$(f(x), g(x)) = (g(x), h(x))$$

となる。

なお、$(f(x), g(x))$ は、$f(x)$ と $g(x)$ の最大次数の共通因子 (最大公約数) を表すこととするが、例えば $(4x^2, 2x)$ の場合、$2x$ は 1 次式の共通因子であるし、x も同じ次数の共通因子なので、これを一つに確定するために、$(f(x), g(x))$ の最高次の係数は 1 であるとする (よって例えば $(4x^2, 2x) = x$ とする)。

補題 3 の証明

$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $q(x)$ とすると、

$$f(x) = g(x)q(x) + h(x) \tag{1}$$

と書ける。

今、$(f(x), g(x)) = p(x)$ とし、$f(x),\ g(x)$ を $p(x)$ で割った商を $\alpha(x),\ \beta(x)$ とすると $f(x) = \alpha(x)p(x),\ g(x) = \beta(x)p(x)$ となるので、(1) より

$$h(x) = f(x) - g(x)q(x) = p(x)\{\alpha(x) - \beta(x)q(x)\}$$

となり、$h(x)$ も $p(x)$ を因子に持つことになる。よって、少なくとも $g(x)$ と $h(x)$ の共通因子 $(g(x), h(x))$ は $p(x)$ で割り切れる。

逆に、$(g(x), h(x)) = r(x)$ とし、$g(x)$, $h(x)$ を $r(x)$ で割った商を $\gamma(x)$, $\delta(x)$ とすると、$g(x) = \gamma(x)r(x)$, $h(x) = \delta(x)r(x)$ となるので、(1) より

$$f(x) = g(x)q(x) + h(x) = r(x)\{\gamma(x)q(x) + \delta(x)\}$$

となり、$f(x)$ も $r(x)$ を因子に持つことになる。よって、少なくとも $f(x)$ と $g(x)$ の共通因子 $p(x)$ は $r(x)$ で割り切れる。ゆえに $p(x) = r(x)$。∎

2 つの整式の共通因子を求める場合、補題 3 により、$f(x)$ と $g(x)$ の共通因子 $(f(x), g(x))$ を求めるときに、$f(x)$ と $g(x)$ の割り算を行って、$(f(x), g(x))$ を求める代わりに $(g(x), h(x))$ を求めればよいことになる。そして今度は $g(x)$ を $h(x)$ で割った余り $r(x)$ があれば、$(g(x), h(x))$ を求める代わりに $(h(x), r(x))$ を求めればよい。

$h(x)$ は $g(x)$ で割った余りなので少なくとも $\deg h < \deg g$ であり、この作業を繰り返すことで、計算する整式の次数は確実に下がっていく。よって、最後は余りが 0 次式、すなわち定数になるが、その定数が 0 に等しければ、最後の割り算は割り切れたことになるので、その割った式が $f(x)$ $g(x)$ の共通因子となる。その定数が 0 でなければ、0 以外の定数と整式の共通因子は 1 なので、共通因子は 1 となり、すなわち $f(x)$ と $g(x)$ は互いに素であることになる。

このようにして 2 つの整式の共通因子を求める方法が互除法である。

3 補題と定理の証明

互除法から導かれる次の補題は、基本的であり、かつ重要である。

補題 4

$(f(x), g(x)) = 1$、すなわち $f(x)$ と $g(x)$ が互いに素のとき、ある整式 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ が存在して、

$$\alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x) = 1 \tag{2}$$

とできる。

逆に、このような式が成り立つような $\alpha(x)$, $\beta(x)$ が存在する場合は $(f(x), g(x)) = 1$ となる。

左辺が整式に見えて、右辺が 1 というのは奇妙に思うかもしれないが、これは例えば $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ の場合は、$\alpha(x) = 1$, $\beta(x) = -x + 1$ によって

$$\alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x) = x^2 + (x + 1)(-x + 1) = 1$$

のようにできることを意味していて、すなわち、左辺の整式の定数項以外の部分が全部消えてしまうことによりそのようになる、ということである。

補題 4 の証明

互除法を利用する。今、$F_1(x) = f(x)$, $F_2(x) = g(x)$ と書き直して、F_1 を F_2 で割った商を $Q_1(x)$, 余りを $F_3(x)$ とすると、

$$F_1(x) = F_2(x)Q_1(x) + F_3(x) \quad (\deg F_3 < \deg F_2)$$

となる。同様に、F_2 を F_3 で割った商を $Q_2(x)$, 余りを $F_4(x)$ とすると、

$$F_2(x) = F_3(x)Q_2(x) + F_4(x) \quad (\deg F_4 < \deg F_3)$$

となる。これを繰り返して、余りが定数になるところまで行う。

$$\begin{aligned} &F_j(x) = F_{j+1}(x)Q_j(x) + F_{j+2} \quad (\deg F_{j+2} < \deg F_{j+1},\ j = 1, 2, \ldots n-2) \\ &\deg F_n = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

$(f(x), g(x)) = (F_1(x), F_2(x)) = 1$ であるから、F_n は 0 ではない定数である。

(3) より、

$$F_n = F_{n-2} - F_{n-1}Q_{n-2}$$

のように F_n は F_{n-2} と F_{n-1} で表されるが、(3) より

$$F_{n-1} = F_{n-3} - F_{n-2}Q_{n-3}$$

であるから、これを代入すれば、

$$F_n = F_{n-2} - (F_{n-3} - F_{n-2}Q_{n-3})Q_{n-2} = (Q_{n-3}Q_{n-2} + 1)F_{n-2} - Q_{n-2}F_{n-3}$$

のように F_{n-3} と F_{n-2} で表される。同様に (3) より

$$F_{n-2} = F_{n-4} - F_{n-3}Q_{n-4}$$

であるからこれを代入すれば F_n が F_{n-4} と F_{n-3} で表されることになる。これを繰り返せば、結局

$$F_n = P(x)F_1(x) + Q(x)F_2(x) = P(x)f(x) + Q(x)g(x)$$

のように表せることになる。そして、F_n は 0 でない定数なので、この式を F_n で割れば

$$1 = \frac{P(x)}{F_n}f(x) + \frac{Q(x)}{F_n}g(x)$$

となり、よって $\alpha(x) = P(x)/F_n$, $\beta(x) = Q(x)/F_n$ とすればよい。

逆に、(2) が成り立つ場合、$(f(x), g(x)) = p(x)$ として $f(x)$, $g(x)$ を $p(x)$ で割った商を $\gamma(x)$, $\delta(x)$ とすると、$f = \gamma p$, $g = \delta p$ なので、

$$1 = \alpha(x)f(x) + \beta(x)g(x) = (\alpha\gamma + \beta\delta)p$$

となるが、p は右辺の因子なので左辺の因子でもあり、(よって因数分解の一意性により) $p = 1$ でなければならない。ゆえに (2) が成り立つならば $(f(x), g(x)) = 1$ となる。■

次に、この補題 4 の表現が一意的であることを示す。

補題 5

補題 4 の $\alpha(x)$, $\beta(x)$ は

$$\deg\alpha < \deg g, \quad \deg\beta < \deg f$$

を満たすように取ることができて、かつそのような $\alpha(x)$, $\beta(x)$ はただ 1 組しかない。

証明

(2) を満たす $\alpha(x)$, $\beta(x)$ が $\deg\alpha \geq \deg g$ のような場合は、$\alpha(x)$ を $g(x)$ で割った商を $\gamma(x)$, 余りを $\tilde{\alpha}(x)$ $(\deg\tilde{\alpha} < \deg g)$ とし、$\beta(x)$ を $f(x)$ で割った商を $\delta(x)$, 余りを $\tilde{\beta}(x)$ $(\deg\tilde{\beta} < \deg f)$ とすれば

$$\alpha = g\gamma + \tilde{\alpha}, \quad \beta = f\delta + \tilde{\beta}$$

なので、(2) より

$$1 = \alpha f + \beta g = (g\gamma + \tilde{\alpha})f + (f\delta + \tilde{\beta})g = (\gamma + \delta)fg + \tilde{\alpha}f + \tilde{\beta}g$$

となるので、

$$-(\gamma + \delta)fg = \tilde{\alpha}f + \tilde{\beta}g - 1$$

が成り立つことになる。この式の右辺は $\deg\tilde{\alpha} < \deg g$, $\deg\tilde{\beta} < \deg f$ より $(\deg f + \deg g - 1)$ 次以下であり、左辺は $\gamma + \delta$ が 0 でなければ $(\deg f + \deg g)$ 次以上の式になるので、$\gamma + \delta = 0$ でなくてはならず、よって、

$$\tilde{\alpha}f + \tilde{\beta}g = 1$$

で、$\deg\tilde{\alpha} < \deg g$, $\deg\tilde{\beta} < \deg f$ となるから、α, β の代わりに $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ を取ればこの補題の条件が満されることになる。

また、1 組しか存在しないことは次のように示される。もしこのような整式の組が、

$$\begin{aligned} &\alpha_1 f + \beta_1 g = 1, \quad \deg\alpha_1 < \deg g, \quad \deg\beta_1 < \deg f \\ &\alpha_2 f + \beta_2 g = 1, \quad \deg\alpha_2 < \deg g, \quad \deg\beta_2 < \deg f \end{aligned}$$

のように 2 組存在したとすると、引き算をすれば、

$$(\alpha_1 - \alpha_2)f + (\beta_1 - \beta_2)g = 0$$

となり、よって、

$$(\alpha_1 - \alpha_2)f = (\beta_2 - \beta_1)g$$

となる。

今、もし $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ ならばこの式の左辺は 0 ではなく、よって左辺の因子である f は右辺の因子でもなければならないが、f と g は互いに素なので、f は $(\beta_2 - \beta_1)$ の因子でなくてはならず、すなわち $(\beta_2 - \beta_1)$ は f で割り切れなくてはならない (因数分解の一意性)。

しかし、$\deg(\beta_2 - \beta_1) < \deg f$ だから、それは $\beta_2 - \beta_1 = 0$ を意味する。そしてそれは $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ をも意味するので、「$\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$ ならば」としたことに矛盾する。よって、背理法により $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$

であることになる。そしてそれにより $\beta_2 - \beta_1 = 0$ となり、結局 $\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2$ となるので、2 組は同じものになる。■

この 2 つの補題 4, 5 から、次の系 6 が導かれる。

系 6

$(f(x), g(x)) = 1$ のとき、$\deg h < \deg f + \deg g$ である任意の整式 $h(x)$ に対して、ある整式 $p(x)$, $q(x)$ が存在して、

$$h(x) = p(x)f(x) + q(x)g(x), \quad \deg p < \deg g,\ \deg q < \deg f \tag{4}$$

とできる。このような $p(x)$, $q(x)$ はただ一組だけ存在する。

証明

これは、(2) の両辺を $h(x)$ 倍して、

$$h = h\alpha f + h\beta g$$

として、補題 5 の証明で行ったように、$h\alpha$ を g で割った余りを p, $h\beta$ を f で割った余りを q とすればよくて、その証明の論法が、ただ一組であることの証明も含めて、そのまま利用できる。■

この系 6 の (4) の両辺を fg で割ると

$$\frac{h}{fg} = \frac{p}{g} + \frac{q}{f}, \quad (\deg p < \deg g,\ \deg q < \deg f)$$

となるので、ここから直ちに定理 1 が得られることがわかる。

系 2 は、定理 1 を繰り返し使えば得られる。例えば、$n = 3$ のときは、B_1 と B_2B_3 は互いに素なので、

$$\frac{A}{B_1B_2B_3} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{C_1}{B_2B_3}, \quad (\deg A_1 < \deg B_1,\ \deg C_1 < \deg B_2B_3)$$

となる A_1, C_1 が存在し、B_2 と B_3 は互いに素なので、

$$\frac{C_1}{B_2B_3} = \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_3}{B_3}, \quad (\deg A_2 < \deg B_2,\ \deg A_3 < \deg B_3)$$

となる $A_2,\ A_3$ が存在するから、結局

$$\frac{A}{B_1B_2B_3} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} + \frac{A_3}{B_3}$$

となる、といった具合である。

4 代数学の基本定理

3 節で、主定理 1 の証明が終了したが、教科書 [1] には、さらに、

> $B(x)$ を実数係数の範囲でできるだけ因数分解して
>
> $$B(x) = K(x-a)^p(x-b)^q\cdots\{(x-c)^2+d^2\}^m\{(x-e)^2+f^2\}^n\cdots$$
>
> の形 (1 次式と、判別式が負の 2 次式の積) に書く

と書かれている ([1], §24 p114)。

これは代数学の基本定理と呼ばれる次の定理から導かれる。

定理 7

複素数係数の n 次式は、複素数の範囲で n 個の 1 次式の積に因数分解可能である。

この定理の証明は容易ではなく、さすがにここで行うことはできないが、この定理と次の事実を用いれば、上に述べた教科書の記述は説明できる。

命題 8

実数係数の整式が $x-(a+bi)$ (a, b は実数、$b \neq 0$, i は虚数単位) という因子を持てば、その整式は必ず $x-(a-bi)$ という因子も持つ。

複素数 $z = a+bi$ に対して、$\bar{z} = a-bi$ を z の 共役複素数 という。

命題 8 の証明

まず、複素数の共役に関して、次を示す。

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w} \tag{5}$$

これは、$z = a + bi$, $w = c + di$ とすると、

$$\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i, \\
\bar{z}+\bar{w} &= \overline{(a+bi)} + \overline{(c+di)} = (a-bi)+(c-di) = (a+c)-(b+d)i, \\
\overline{zw} &= \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+(bc+ad)i} = (ac-bd)-(bc+ad)i, \\
\bar{z}\bar{w} &= \overline{a+bi}\,\overline{c+di} = (a-bi)(c-di) = (ac-bd)-(bc+ad)i
\end{aligned}$$

となり、確かに成立する。

今、整式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_j \text{ はすべて実数})$$

が、$x-(a+bi)$ という因子を持つとすると $x = a + bi(= z)$ を代入すると

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

となることになる。この式の共役を考えると、(5) により

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\
&= \overline{a_n}\bar{z}^n + \overline{a_{n-1}}\bar{z}^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\bar{z} + \overline{a_0} \\
&= a_n \bar{z}^n + a_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 \\
&\quad (a_j \text{ は実数なので } \overline{a_j} = a_j)
\end{aligned}$$

すなわち $f(\bar{z}) = 0$ となるので、よって $f(x)$ は $x - \bar{z} = x - (a - bi)$ も因子にもつことになる。
■

系 9

実数係数の整式が $\{x-(a+bi)\}^m$ $(b \neq 0)$ という因子を持てば、その整式は必ず $\{x-(a-bi)\}^m$ という因子も持つ。

証明

実数係数の整式 $f(x)$ が $\{x-(a+bi)\}^m$ という因子を持つ場合、命題 8 により少なくとも $x-(a-bi)$ という因子を持ち、よって、$f(x)$ は

$$\{x-(a+bi)\}\{x-(a-bi)\}=\{(x-a)+bi\}\{(x-a)-bi\}=(x-a)^2+b^2$$

という実数係数の 2 次式で割り切れることになるから、その商

$$g(x)=\frac{f(x)}{(x-a)^2+b^2}$$

も実数係数の多項式で、これは $\{x-(a+bi)\}^{m-1}$ という因子を持つことになるので、これも $x-(a-bi)$ という因子を持つ。これを繰り返せばよい。∎

この命題 8 と 系 9 により、$\{x-(a+bi)\}^m$ という因子に対しては $\{x-(a-bi)\}^m$ という因子があり、それをペアで考えれば、

$$\{x-(a+bi)\}^m\{x-(a-bi)\}^m=\{(x-a)+bi\}^m\{(x-a)-bi\}^m=\{(x-a)^2+b^2\}^m$$

となるので、結局教科書 [1] にあるように、実数係数の範囲で

$$(x-a)^p,\quad \{(x-c)^2+d\}^m$$

の形の因子に因数分解されることになる。

5 最後に

今回証明した定理 1 により、確かに教科書に書かれているような部分分数分解が行なえることが保障され、ただ一組存在することにより未定係数法の係数に関する方程式がちゃんと解けることが保障される。

また、この証明で用いた方法を利用して、互除法によって実際に部分分数分解を行うことも可能ではあるが、通常の未定係数法による方がずっと楽であり、手間もかからない。よって、この証明自体は部分分数分解の計算にはさほど意味はない。

なお、4 節で述べたように、原理的には実数係数の n の整式は、常に実数係数の 1 次式と 2 次式の積の因数の形に因数分解されるはずなのであるが、しかし、実際にそれを行うのは容易ではない。

例えば、4 次までの代数方程式には累乗根による解の公式が知られているので、分母が 4 次式以下ならばとりあえずそのような形に因数分解することは可能であるが、5 次以上の代数方程式には累乗根による解の公式はない。「ない」というのは、そのような公式がまだ見つかっていないということではなく、実は「そういう公式を作ることができない」ということまでちゃんと証明されている。例えば 5 次方程式は複素数の範囲で確かに 5 つの複素数解を持つのであるが、それを具体的に累乗根を使って求めることは一般には無理であり (もちろんちゃんと解ける 5 次方程式もある)、よって、分母が 5 次式の場合は、特殊な場合を除いては手がだせないことになる。

「理論的に正しい」ことと、「それが計算可能であること」の間には大きな違いがあるが、この辺りの事情もそのようなものを意味している。

参考文献

[1] 石原繁、浅野重初、「理工系入門 微分積分」(1999)、裳華房