2006 年 5 月 26 日
2006 年 6 月 1 日追記

有理関数の積分について (その 2)

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

以前、有理関数の積分でててくる一番難しいものの積分

$$\int \frac{(\text{高々 } (2m-1) \text{ 次式})}{(x^2+1)^m} dx \tag{1}$$

の積分についてまとめた ([1]) が、原理的にはその説明の通りなのであるが、このような積分が出てきたらこうすればよい、というつきつめた話なので、実際の計算であの手順を行なおうとすると無駄が起こることもあるし、帰着させる部分の計算が割と面倒な場合もある。

そこで、具体的な計算を行うことを考えて、なるべく手間のかからなそうな方法について考察することにする。

2 奇数次と偶数次の分離について

[1] では、(1) の分子を奇数次と偶数次の項に分離して、奇数次の方は $x^2+1=u$、偶数次の方は $x=\tan\theta$ と置換するか、または部分積分を利用する方法を紹介している。

しかし、いずれにせよ

$$\frac{x}{(x^2+1)^m}, \quad \frac{1}{(x^2+1)^m}$$

の形に直すのであるから、まずそのように整理するのがよいだろうと思う。よって、まず、

「分子に $x^2=u-1$ を代入して、それを展開して x の一次式に整理する」

ということを行う。ただし、x の奇数次の項には、x を一つだけ残して、他の偶数次部分にのみ代入することとする。それにより、分子は x に関する 1 次式となる。

以下、

$$f(x) = \frac{3x^5 - 6x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 7}{(x^2+1)^3}$$

を例に取って計算する。

$$\begin{aligned} \text{分子} &= 3x(u-1)^2 - 6(u-1)^2 + x(u-1) - (u-1) + 3x - 7 \\ &= x(3u^2 - 6u + 3 + u - 1 + 3) + (-6u^2 + 12u - 6 - u + 1 - 7) \\ &= x(3u^2 - 5u + 5) + (-6u^2 + 11u - 12) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(3u^2 - 5u + 5)}{u^3} + \frac{-6u^2 + 11u - 12}{u^3} \\ &= x\left(\frac{3}{u} - \frac{5}{u^2} + \frac{5}{u^3}\right) + \left(-\frac{6}{u} + \frac{11}{u^2} - \frac{12}{u^3}\right) \end{aligned}$$

となる。

3 積分の実行

2 節の計算により、

$$\int \frac{(\text{高々 } (2m-1) \text{ 次式})}{(x^2+1)^m} dx = \int (1/u \text{ の高々 } m \text{ 次式}) x \, dx + \int (1/u \text{ の高々 } m \text{ 次式}) \, dx$$

となる。なお、これらの積分の中の $1/u$ の高々 m 次式には定数項は含まれない。

最初の x を一つ含む方は、u への置換積分により $(xdx = du/2)$ 容易に

$$\begin{aligned} &\int (1/u \text{ の高々 } m \text{ 次式}) x \, dx = \frac{1}{2} \int (1/u \text{ の高々 } m \text{ 次式}) du \\ &= A_0 \log|u| + \frac{A_1}{u} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{u^{m-1}} + C \\ &= A_0 \log(x^2+1) + \frac{A_1}{x^2+1} + \cdots + \frac{A_{m-1}}{(x^2+1)^{m-1}} + C \end{aligned}$$

のように積分できる。

後者の方は、[1] で述べた方法では、個々の積分に対しどうしても漸化式が必要になるので、個々の積分ごとに見てもあまり楽にはならない。よって、[1] の最後でも触れたように、最終形を想定した未定係数法を用いるのが楽だと思う。

最終形は、[1] を見ればわかるが、

$$\int (1/u \text{ の高々 } m \text{ 次式})\, dx = B_0 \tan^{-1} x + x\,(1/u \text{ の高々 } (m-1) \text{ 次式}) + C$$

となる。なお、この最後の式の $(m-1)$ 次式にも定数項は含まれない。

また、これには $x = \tan\theta$ と置換してから未定係数法を用いる、という方法もある。この場合 $dx = d\theta/\cos^2\theta$, $1/u = \cos^2\theta$ なので、定数項がないことから

$$\int (1/u \text{ の高々 } m \text{ 次式})\, dx = \int (\cos^2\theta \text{ の高々 } (m-1) \text{ 次式})\, d\theta$$

となり (この最後の式の $(m-1)$ 次式には定数項がありうる)、最終形は

$$\int (\cos^2\theta \text{ の高々 } (m-1) \text{ 次式})\, d\theta = B_0\theta + \sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta \text{ の高々 } (m-2) \text{ 次式}) + C$$

となる。これを x の式に戻すときは、

$$\cos^2\theta = 1/u = 1/(1+x^2), \quad \sin\theta\cos\theta = \tan\theta\cos^2\theta = x/u = x/(1+x^2)$$

のようにすればいい。

4 積分の計算例

2 節の式を実際に計算してみよう。

前半部分の積分は、

$$\begin{aligned}\int x\left(\frac{3}{u} - \frac{5}{u^2} + \frac{5}{u^3}\right) dx &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{3}{u} - \frac{5}{u^2} + \frac{5}{u^3}\right) du \\ = \ \frac{3}{2}\log|u| + \frac{5}{2u} - \frac{5}{4u^2} + C &= \frac{3}{2}\log(x^2+1) + \frac{5}{2(x^2+1)} - \frac{5}{4(x^2+1)^2} + C\end{aligned}$$

のようになる。

後半部分は、2 通りの方法で計算してみる。まずは、置換をしない未定係数法でやってみる。

$$\int \left(-\frac{6}{u}+\frac{11}{u^2}-\frac{12}{u^3}\right)dx = B_0 \tan^{-1} x + x\left(\frac{B_1}{u}+\frac{B_2}{u^2}\right)+C$$

と置き、両辺を x で微分する。

$$\begin{aligned}
-\frac{6}{u}+\frac{11}{u^2}-\frac{12}{u^3} &= \frac{B_0}{u}+\left(\frac{B_1}{u}+\frac{B_2}{u^2}\right)+x\left(\frac{B_1}{u}+\frac{B_2}{u^2}\right)' \\
&= \frac{B_0+B_1}{u}+\frac{B_2}{u^2}+x\left(-\frac{B_1}{u^2}-\frac{2B_2}{u^3}\right)\times 2x \\
&= \frac{B_0+B_1}{u}+\frac{B_2}{u^2}-2(u-1)\left(\frac{B_1}{u^2}+\frac{2B_2}{u^3}\right) \\
&= \frac{B_0+B_1}{u}+\frac{B_2}{u^2}-\frac{2B_1}{u}-\frac{4B_2}{u^2}+\frac{2B_1}{u^2}+\frac{4B_2}{u^3} \\
&= \frac{B_0-B_1}{u}+\frac{2B_1-3B_2}{u^2}+\frac{4B_2}{u^3}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{cases} B_0-B_1 & =-6 \\ 2B_1-3B_2 & =11 \\ 4B_2 & =-12 \end{cases}$$

より、$B_0=-5,\ B_1=1,\ B_2=-3$ と求まり、よって

$$\begin{aligned}
\int \left(-\frac{6}{u}+\frac{11}{u^2}-\frac{12}{u^3}\right)dx &= -5\tan^{-1} x + x\left(\frac{1}{u}-\frac{3}{u^2}\right)+C \\
&= -5\tan^{-1} x+\frac{x}{x^2+1}-\frac{3x}{(x^2+1)^2}+C
\end{aligned}$$

となる。

次は、$x=\tan\theta$ と置換してからやってみる。この場合、$1/u=\cos^2\theta,\ dx=d\theta/\cos^2\theta$ なので、

$$\int \left(-\frac{6}{u}+\frac{11}{u^2}-\frac{12}{u^3}\right)dx = \int(-6+11\cos^2\theta-12\cos^4\theta)d\theta \tag{2}$$

であり、これは

$$\int(-6+11\cos^2\theta-12\cos^4\theta)d\theta = B_0\theta+\sin\theta\cos\theta\times(B_1+B_2\cos^2\theta)+C$$

と置ける。この式を両辺微分すると、

$$\begin{aligned}
&-6+11\cos^2\theta-12\cos^4\theta = B_0+B_1(\sin\theta\cos\theta)'+B_2(\sin\theta\cos^3\theta)' \\
&= B_0+B_1(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+B_2(\cos^4\theta-3\sin^2\theta\cos^2\theta) \\
&= B_0+B_1(2\cos^2\theta-1)+B_2(4\cos^4\theta-3\cos^2\theta) \\
&= (B_0-B_1)+(2B_1-3B_2)\cos^2\theta+4B_2\cos^4\theta
\end{aligned}$$

となるので、結局

$$\begin{cases} B_0-B_1 & =-6 \\ 2B_1-3B_2 & =11 \\ 4B_2 & =-12 \end{cases}$$

となり、この連立方程式は置換しない場合と全く同一で、$B_0=-5,\ B_1=1,\ B_2=-3$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
&\int(-6+11\cos^2\theta-12\cos^4\theta)d\theta = -5\theta+\sin\theta\cos\theta\times(1-3\cos^2\theta)+C \qquad (3) \\
&= -5\tan^{-1}x+\frac{x}{u}\left(1-\frac{3}{u}\right)+C = -5\tan^{-1}x+\frac{x}{x^2+1}-\frac{3x}{(x^2+1)^2}+C
\end{aligned}$$

となる。

ついでであるから、未定係数法ではなく、$x=\tan\theta$ と置換したあとで部分積分による方法でも計算してみよう。(2) から部分積分を行う。

$$\begin{aligned}
&\int\cos^4\theta d\theta = \int\cos^3\theta(\sin\theta)'d\theta \\
&= \cos^3\theta\sin\theta-\int(\cos^3\theta)'\sin\theta d\theta \\
&= \sin\theta\cos^3\theta-\int(\cos^3\theta)'\sin\theta d\theta \\
&= \sin\theta\cos^3\theta-\int 3\cos^2\theta(-\sin\theta)\sin\theta d\theta = \sin\theta\cos^3\theta+\int 3\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)d\theta \\
&= \sin\theta\cos^3\theta+3\int\cos^2\theta d\theta-3\int\cos^4\theta d\theta
\end{aligned}$$

となるので、

$$4\int\cos^4\theta d\theta = \sin\theta\cos^3\theta+3\int\cos^2\theta d\theta$$

となる。よって、(2) は、

$$\begin{aligned}(2) &= -6\theta + 11\int \cos^2\theta d\theta - 12\int \cos^4\theta d\theta \\ &= -6\theta + 11\int \cos^2\theta d\theta - 3\left(\sin\theta\cos^3\theta + 3\int \cos^2\theta d\theta\right) \\ &= -6\theta - 3\sin\theta\cos^3\theta + 2\int \cos^2\theta d\theta\end{aligned}$$

となるが、倍角の公式を使えば、

$$\begin{aligned}2\int \cos^2\theta d\theta &= \int(\cos 2\theta + 1)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta + C = \sin\theta\cos\theta + \theta + C\end{aligned}$$

となるので、結局

$$(2) = -5\theta - 3\sin\theta\cos^3\theta + \sin\theta\cos\theta + C$$

となり、(3) の式が得られたことになる。

5 最後に

例を見てもわかると思うが、[1] で紹介した計算よりもだいぶ易しくなっていることがわかると思う。$x^2 = u - 1$ と置くことで $x^2 + 1$ のような式が表に出るのを防いでることと、全ての次数の項をまとめて未定係数法であつかっているためにそれが可能となっているのであるが、実際には、最終形を頭におかなければ使えないので、何も見ないでこの方法を使えるかというと、それはそれで問題がある。

ただ、部分積分から導かれる漸化式によるのであれば、それ自体を導く手段をおおまかにたどることでこのような最終形を得るのは容易であるから、そのような方針で考える、というのも一つの手だと思う。

ただし、最後に見たように、分子が偶数次の項に関しては、三角関数に置換した後では、未定係数法を使う方法でも部分積分を使う方法でもそれほどの違いが出るわけではないので、それについては、未定係数法は選択肢の一つ、という程度かもしれない。

参考文献

[1] 「有理関数の積分について」竹野茂治、2003 年 5 月 26 日
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/basic3.html#quotef