平成 15 年 5 月 26 日

# 有理関数の積分について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

## 1 有理関数の積分

例年基礎数理 III では有理関数の積分で必要となる部分分数分解について説明しているが、そこで出て来る一番難しいものの積分については、時間の都合上説明を省略していることが多い。ここでは、その積分法について説明する。

## 2 部分分数分解

有理関数の分母にある (実数係数の) 多項式は、代数学の基本定理により 1 次式、および実数の範囲では因数分解できない 2 次式の積で因数分解できることが保証されるので、一般の有理関数は部分分数分解を行えば

- 多項式
- $\dfrac{(\text{高々 } (n-1) \text{ 次式})}{(x-a)^n} \quad (n=1,2,\ldots)$
- $\dfrac{(\text{高々 } (2n-1) \text{ 次式})}{\{(x-a)^2+b^2\}^n} \quad (n=1,2,\ldots)$

のような形のものの和に分解されることになる。

多項式の積分は容易、2 番目の形のものも $x-a=t$ と置換すれば $t^{-k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ の形の項の和になり、これも容易に積分できる。

問題は最後の形のものであるが、これは $x-a=bt$ と置換することで

$$\frac{(t \text{ の高々 } (2n-1) \text{ 次式})}{(t^2+1)^n}$$

となり、これを

$$\frac{(\text{奇数次の項})}{(t^2+1)^n}+\frac{(\text{偶数次の項})}{(t^2+1)^n}$$

の二つに分けて考えることにする。

## 3 分子が奇数次の項の場合

分子が奇数次の項の場合、

$$\frac{(\text{奇数次の項})}{(t^2+1)^n}=\frac{t\times(t^2 \text{ の高々 } (n-1) \text{ 次式})}{(t^2+1)^n}$$

となるので、$u = t^2 + 1$ と置換すれば $tdt = du/2$, $t^2 = u - 1$ より

$$\begin{aligned}
&\int \frac{t \times (t^2 \text{ の高々 } (n-1) \text{ 次式})}{(t^2+1)^n} dt \\
= \ & \int \frac{((u-1) \text{ の高々 } (n-1) \text{ 次式})}{u^n} \frac{du}{2} \\
= \ & \int (a_0 + a_1 u^{-1} + a_2 u^{-2} + \cdots + a_n u^{-n}) du \\
= \ & a_0 u + a_1 \log |u| - a_2 u^{-1} - \cdots - \frac{a_n}{n-1} u^{-n+1} + C \\
= \ & a_0 (t^2+1) + a_1 \log(t^2+1) - \frac{a_2}{t^2+1} - \cdots - \frac{a_n}{(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + C
\end{aligned}$$

と積分できる。

# 4 分子が偶数次の項の場合

難しいのは分子が偶数次の項の場合であるが、この形の積分の方法はいくつかのやり方が知られている。

## 4.1 $t = \tan\theta$ と置換する方法

$t = \tan\theta$ と置換すると、

$$\frac{dt}{d\theta} = (\tan\theta)' = \frac{1}{\cos^2\theta}, \quad \frac{1}{(t^2+1)^n} = \frac{1}{(\tan^2\theta + 1)^n} = \cos^{2n}\theta$$

より

$$\frac{dt}{(t^2+1)^n} = \cos^{2n-2}\theta d\theta, \quad t^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1$$

となり、

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(t^2 \text{ の高々 } (n-1) \text{ 次式})}{(t^2+1)^n} dt \\
= \ & \int \left( \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \text{ の高々 } (n-1) \text{ 次式} \right) \cos^{2n-2}\theta d\theta \\
= \ & \int (\cos^2\theta \text{ の高々 } (n-1) \text{ 次式}) d\theta
\end{aligned}$$

となる。

$\int \cos^{2k}\theta d\theta$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ の積分は、通常は部分積分を使って次数を落としてくやり方で説明することが多いようであるが、それは以下のようにしても説明できる。

$$\begin{aligned}
&(\sin\theta \cos^{2k-1}\theta)' \\
= \ & (\sin\theta)' \cos^{2k-1}\theta + \sin\theta (\cos^{2k-1}\theta)' \\
= \ & \cos\theta \cos^{2k-1}\theta + \sin\theta \{(2k-1)\cos^{2k-2}\theta (\cos\theta)'\} \\
= \ & \cos^{2k}\theta - (2k-1)\sin^2\theta \cos^{2k-2}\theta \\
= \ & \cos^{2k}\theta - (2k-1)(1 - \cos^2\theta)\cos^{2k-2}\theta \\
= \ & 2k \cos^{2k}\theta - (2k-1)\cos^{2k-2}\theta
\end{aligned}$$

より、

$$\cos^{2k}\theta = \frac{1}{2k}(\sin\theta\cos^{2k-1}\theta)' + \frac{2k-1}{2k}\cos^{2k-2}\theta$$

となるので、これを積分して

$$\int\cos^{2k}\theta d\theta = \frac{1}{2k}\sin\theta\cos^{2k-1}\theta + \frac{2k-1}{2k}\int\cos^{2k-2}\theta d\theta$$

となる。こうやって $\cos\theta$ の次数を落としながら整理して行く方法である。
　そして結果として、

$$\int\cos^{2k}\theta d\theta = \sin\theta\cos\theta\times(\cos^2\theta \text{ の } (k-1) \text{ 次式}) + a\theta + C \quad (a \text{ は定数}) \tag{1}$$

となるので、結局

$$\int(\cos^2\theta \text{ の } (n-1) \text{ 次式})d\theta = \sin\theta\cos\theta\times(\cos^2\theta \text{ の } (n-2) \text{ 次式}) + a\theta + C \tag{2}$$

の形になることになる。
　なお、これは上で述べたように次数を落としながら整理せずとも、この結果を利用して未定係数法で求めるということも可能である。

### 例 1

積分

$$\int(\cos^4 x + 2\cos^2 x)dx$$

を未定係数法で求める。(1) より、

$$\begin{aligned}\int\cos^4 x dx &= \sin x\cos x\times(\cos^2 x \text{ の } 1 \text{ 次式}) + a_1 x + C_1,\\ \int\cos^2 x dx &= \sin x\cos x\times(\cos^2 x \text{ の } 0 \text{ 次式}) + a_2 x + C_2\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}&\int(\cos^4 x + 2\cos^2 x)dx = \sin x\cos x(p\cos^2 x + q) + rx + C\\ &= p\sin x\cos^3 x + q\sin x\cos x + rx + C\end{aligned}$$

とする ($p, q, r$ は未定係数)。この式の両辺を微分すると

$$\begin{aligned}&\cos^4 x + 2\cos^2 x\\ &= p(\sin x\cos^3 x)' + q(\sin x\cos x)' + r\\ &= p\{(\sin x)'\cos^3 x + \sin x(\cos^3 x)'\} + q\{(\sin x)'\cos x + \sin x(\cos x)'\} + r\\ &= p(\cos x\cos^3 x + \sin x\{3\cos^2 x(\cos x)'\}) + q\{\cos x\cos x + \sin x(-\sin x)\} + r\\ &= p(\cos^4 x - 3\sin^2 x\cos^2 x) + q(\cos^2 x - \sin^2 x) + r\end{aligned}$$

となるが、この右辺をさらに $\cos^{2k} x$ の形の項のみの式に変形する。

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= p\{\cos^4 x - 3(1-\cos^2 x)\cos^2 x\} + q\{\cos^2 x - (1-\cos^2 x)\} + r\\ &= p(4\cos^4 x - 3\cos^2 x) + q(2\cos^2 x - 1) + r\\ &= 4p\cos^4 x + (-3p+2q)\cos^2 x + (-q+r)\end{aligned}$$

これが $\cos^4 x + 2\cos^2 x$ に等しいので、

$$\begin{cases} 4p & = & 1 \\ -3p + 2q & = & 2 \\ -q + r & = & 0 \end{cases}$$

となればよい。この連立方程式を解けば $p = 1/4,\ q = 11/8,\ r = 11/8$ となり、ゆえに

$$\begin{aligned}&\int (\cos^4 x + 2\cos^2 x) dx = \sin x \cos x \left( \frac{1}{4} \cos^2 x + \frac{11}{8} \right) + \frac{11}{8} x + C \\ &= \frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{11}{8} \sin x \cos x + \frac{11}{8} x + C\end{aligned}$$

となる。

なお、この例で連立一次方程式を導くときに両辺の係数を比較したが、これは厳密には関数列

$$1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \ldots$$

が線形独立である、という性質を利用していることになる。その事実の証明は難しくはないが、やや長くなるのでここでは省略する。

結果として、積分は $\theta$ を用いた式としては (2) のように書けることになるが、これを $t$ の式に戻すには、$1 + \tan\theta = 1/\cos^2\theta$ を用いて以下のようにする。

$$\begin{aligned}&\sin\theta\cos\theta \times (\cos^2\theta \text{ の } (n-2) \text{ 次式}) \\ &= \tan\theta\cos^2\theta \times (\cos^2\theta \text{ の } (n-2) \text{ 次式}) \\ &= \tan\theta \times (\cos^2\theta \text{ の } (n-1) \text{ 次式}) \\ &= t \times \left( \frac{1}{t^2+1} \text{ の } (n-1) \text{ 次式} \right)\end{aligned}$$

であり、$a\theta = a\tan^{-1} t$ ($\tan^{-1} x$ は $\tan x$ の逆関数) なので、結局

$$\int \frac{(t^2 \text{ の高々 } (n-1) \text{ 次式})}{(t^2+1)^n} dt = t \times \left( \frac{1}{t^2+1} \text{ の高々 } (n-1) \text{ 次式} \right) + a\tan^{-1} t + C \qquad (3)$$

のようになることになる。

## 4.2 4.1 節の結果を用いる方法

4.1 節の結果である (3) を利用して、未定係数法でこの積分を求める、という方法もある。

### 例 2

積分

$$\int \frac{2t^2 - 3}{(t^2+1)^3} dt$$

を未定係数法で求める。4.1 節の結果 (3) により、

$$\begin{aligned}&\int \frac{2t^2 - 3}{(t^2+1)^3} dt = t \times \left( \frac{1}{t^2+1} \text{ の高々 } 2 \text{ 次式} \right) + a\tan^{-1} t + C \\ &= t \left\{ \frac{p}{(t^2+1)^2} + \frac{q}{t^2+1} + r \right\} + a\tan^{-1} t + C \\ &= \frac{pt}{(t^2+1)^2} + \frac{qt}{t^2+1} + rt + a\tan^{-1} t + C\end{aligned}$$

とする ($p, q, r, a$ は未定係数)。ただし (3) を導き出す過程を詳しく見るとわかるが、実際には $1/(t^2+1)$ の 2 次式の定数項 $r$ は不要である。

この式の両辺を微分する。

$$\frac{2t^2-3}{(t^2+1)^3} = \left\{\frac{pt}{(t^2+1)^2}\right\}' + \left(\frac{qt}{t^2+1}\right)' + r + \frac{a}{t^2+1}$$

であり、

$$\left\{\frac{pt}{(t^2+1)^2}\right\}' = \{pt(t^2+1)^{-2}\}' = p(t^2+1)^{-2} - 2pt(t^2+1)^{-3}2t = \frac{p}{(t^2+1)^2} - \frac{4pt^2}{(t^2+1)^3},$$

$$\left(\frac{qt}{t^2+1}\right)' = \frac{(qt)'(t^2+1) - qt(t^2+1)'}{(t^2+1)^2} = \frac{q(t^2+1) - 2qt^2}{(t^2+1)^2} = \frac{-qt^2+q}{(t^2+1)^2}$$

なので、よって

$$\frac{2t^2-3}{(t^2+1)^3} = \frac{p}{(t^2+1)^2} - \frac{4pt^2}{(t^2+1)^3} + \frac{-qt^2+q}{(t^2+1)^2} + r + \frac{a}{t^2+1}$$

となる。簡単のため、$t^2+1=u$, すなわち $t^2=u-1$ とすると、

$$\frac{2(u-1)-3}{u^3} = \frac{p}{u^2} - \frac{4p(u-1)}{u^3} + \frac{-q(u-1)+q}{u^2} + r + \frac{a}{u}$$

となり、両辺 $u^3$ 倍すると

$$\begin{aligned}
2u-5 &= pu - 4p(u-1) + (2q-qu)u + ru^3 + au^2 \\
&= ru^3 + (a-q)u^2 + (-3p+2q)u + 4p
\end{aligned}$$

となる。よって係数比較すれば

$$\begin{cases}
r &= 0 \\
a-q &= 0 \\
-3p+2q &= 2 \\
4p &= -5
\end{cases}$$

の連立方程式を得、これを解いて $p=-5/4$, $q=-7/8$, $r=0$, $a=-7/8$ を得る。ゆえに

$$\int \frac{2t^2-3}{(t^2+1)^3}dt = -\frac{5t}{4(t^2+1)^2} - \frac{7t}{8(t^2+1)} - \frac{7}{8}\tan^{-1}t + C$$

である。

### 4.3 部分積分で次数を落とす方法

通常の本でよく取り上げられているのは、多分部分積分で次数を落とす方法だろうと思われる。これを、前節と同じ

$$\int \frac{2t^2-3}{(t^2+1)^3}dt$$

を例に使いながら紹介する。

まず、分子の $t^2$ の $(n-1)$ 次式を $(t^2+1)$ の $(n-1)$ 次式に書き直して ($t^2+1=u$ として計算すれば良い)、$1/(t^2+1)$ の $n$ 次式の形に書き直す。

$$\frac{2t^2-3}{(t^2+1)^3}=\frac{2(u-1)-3}{u^3}=\frac{2}{u^2}-\frac{5}{u^3}=\frac{2}{(t^2+1)^2}-\frac{5}{(t^2+1)^3}$$

部分積分を用いて、$1/(t^2+1)^{k+1}$ の積分を $1/(t^2+1)^k$ の積分に帰着させる。これは、通常

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(t^2+1)^k}dt&=\int(t)'\frac{1}{(t^2+1)^k}dt\\ &=\frac{t}{(t^2+1)^k}-\int t\left(\frac{1}{(t^2+1)^k}\right)'dt\\ &=\frac{t}{(t^2+1)^k}-\int\frac{-2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}}dt\\ &=\frac{t}{(t^2+1)^k}+2k\int\frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^{k+1}}dt\\ &=\frac{t}{(t^2+1)^k}+2k\int\frac{1}{(t^2+1)^k}dt-2k\int\frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}dt\end{aligned}$$

より、

$$(1-2k)\int\frac{1}{(t^2+1)^k}dt=\frac{t}{(t^2+1)^k}-2k\int\frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}dt$$

すなわち、

$$\int\frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}dt=\frac{t}{2k(t^2+1)^k}+\frac{2k-1}{2k}\int\frac{1}{(t^2+1)^k}dt \tag{4}$$

となる、といったように導かれることが多いようであるが、これも 4.1 節同様、微分を使って説明することもできる。

$$\begin{aligned}\left\{\frac{t}{(t^2+1)^k}\right\}'&=\left(t(t^2+1)^{-k}\right)'\\ &=(t)'(t^2+1)^{-k}+t\{(t^2+1)^{-k}\}'\\ &=(t^2+1)^{-k}+t(-k)(t^2+1)^{-k-1}2t\\ &=\frac{1}{(t^2+1)^k}-\frac{2kt^2}{(t^2+1)^{k+1}}\\ &=\frac{1}{(t^2+1)^k}-\frac{2k(t^2+1)-2k}{(t^2+1)^{k+1}}\\ &=\frac{1-2k}{(t^2+1)^k}+\frac{2k}{(t^2+1)^{k+1}}\end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{1}{(t^2+1)^{k+1}}=\left\{\frac{t}{2k(t^2+1)^k}\right\}'+\frac{2k-1}{2k(t^2+1)^k}$$

この両辺を積分して (4) を得る。

今の例では、この公式を使うと $(k=2)$、

$$\int\frac{1}{(t^2+1)^3}dt=\frac{t}{4(t^2+1)^2}+\frac{3}{4}\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
&\int\left\{\frac{2}{(t^2+1)^2}-\frac{5}{(t^2+1)^3}\right\}dt\\
&= \int\frac{2}{(t^2+1)^2}dt-\frac{5}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2}-\frac{15}{4}\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt\\
&= -\frac{7}{4}\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt-\frac{5}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2}
\end{aligned}
$$

であり、もう一度公式を使うと $(k=1)$、

$$
\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\tan^{-1}t+C
$$

なので、結局

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{2t^2-3}{(t^2+1)^3}dt=-\frac{7}{4}\int\frac{1}{(t^2+1)^2}dt-\frac{5}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2}\\
&= -\frac{7t}{8(t^2+1)}-\frac{7}{8}\tan^{-1}t-\frac{5t}{4(t^2+1)^2}+C
\end{aligned}
$$

を得る。

# 5 最後に

例を見てもわかると思うが、いずれの方法もかなり計算は煩雑である。個々の公式よりも、どういう方法でやれば計算できるか、という計算方法の原理、あるいは全体の計算の流れを正しく把握することが大事だろうと思われる。

なお、4.1 節で見たことと同様にして

$$
\int(\cos^2\theta \text{ の } n \text{ 次式})d\theta=\sin\theta\cos\theta\times(\cos^2\theta \text{ の } (n-1) \text{ 次式})+a\theta+C
$$

$$
\int(\sin^2\theta \text{ の } n \text{ 次式})d\theta=\sin\theta\cos\theta\times(\sin^2\theta \text{ の } (n-1) \text{ 次式})+a\theta+C
$$

が成り立つ。

そして、個人的な意見であるが、これが成り立つということがわかっていれば、左辺を計算する場合にこれらの式を導くのと同じ道をたどる、すなわち部分積分により次数を落としていくという方法を取るよりも、例 1 のように未定係数法によって係数のみ決定する方法を取る方が、微分の計算のみで済むという点で、確実でかつ楽な方法ではないかと思う。