2020 年 10 月 21 日

商の微分について

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

以前、[1] で、無限小を用いて積の微分、商の微分の証明などを書いた。そこで紹介した商の微分の証明以外にも商の微分の証明はあるので、それをここで簡単にまとめておく。

2 最も通常の証明

まずは、極限を用いた最も通常の証明を紹介する。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right\}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}\left\{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\,g(x)\;-\;f(x)\,\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right\}\\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

大抵の教科書はこの証明であろう。

3 関数の増分を用いた証明

次に、関数の増分を用いた証明を紹介する。これは、ほぼ [1] で紹介したものと同様で、

$$\Delta f = f(x+\Delta x)-f(x),\quad \Delta g = g(x+\Delta x)-g(x)$$

と書き、これにより、$f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f,\ g(x+\Delta x)=g(x)+\Delta g$ と書くことで 2 節の $f(x)g(x)$ を足して引くという特徴的な操作を自然に見せる方法である。

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right\}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{f(x)+\Delta f}{g(x)+\Delta g}-\frac{f(x)}{g(x)}\right\}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+\Delta f)g-f(g+\Delta g)}{(g+\Delta g)g\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta f)g-f\Delta g}{(g+\Delta g)g\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(g+\Delta g)g}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}g-f\frac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \frac{f'g-fg'}{g^2}\end{aligned}$$

2 節の操作が、この方法だと単なる展開に変わり、より自然な計算になる。

4 積の微分による証明

これは、例えば [2] にも書かれている方法であり、先に積の微分が証明されているとしてそれを用いる方法である。

$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とすると $f(x)=h(x)g(x)$ となるので、積の微分より、

$$f'=(hg)'=h'g+hg'=h'g+\frac{fg'}{g}$$

となるから、

$$h'g=f'-\frac{fg'}{g}=\frac{f'g-fg'}{g},\quad h'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

を得る、という方法である。これは極限を必要とせず、比較的容易に導き出せる方法であると思う。逆にこれを、商の微分の検算に使うことも可能である。例えば、

$$y=\frac{3x^2-5}{2x-7} \tag{1}$$

の微分を商の微分で

$$y'=\frac{6x(2x-7)-(3x^2-5)2}{(2x-7)^2}=\frac{6x^2-42x+10}{(2x-7)^2} \tag{2}$$

と求めた後で、これが合っているかを確認するのに、(1) から

$$3x^2 - 5 = (2x-7)y$$

として、この両辺を積の微分で

$$6x = 2y + (2x-7)y'$$

とした後で、この右辺に (1), (2) を代入して、確かに $6x$ になるかをみる、という方法である。実際、

$$2y + (2x-7)y' = \frac{6x^2-10}{2x-7} + \frac{6x^2-42x+10}{2x-7} = \frac{12x^2-42x}{2x-7} = 6x$$

となるので、この場合は (2) が正しいことがわかる。

5 積と合成関数の微分による証明

次に、積と合成関数の微分による証明を紹介する。これは、講義で使用している教科書 [3] に書かれている方法である。つまり [3] は、積の微分の後で合成関数の微分を紹介し、その次に商の微分を紹介する、という順で説明している。

まず合成関数の微分により、

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \{g(x)^{-1}\}' = -g(x)^{-2}g'(x) = -\frac{g'}{g^2}$$

であるから、積の微分により、

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\times\frac{1}{g}\right)' = f'\times\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

となる。

6 対数微分法による証明

次に、対数微分法による証明を紹介する。これは対数の導関数、合成関数の微分法を必要とするが、それらは商の微分とは独立に説明できるので、この方法も一応意味はある。

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

とすると、

$$\log|h(x)| = \log\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \log|f(x)| - \log|g(x)|$$

なので、この両辺を微分すると合成関数の微分により、

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}$$

となり、よって両辺 $h(x)$ 倍すれば、

$$h' = h\left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) = \frac{f}{g}\,\frac{f'g - fg'}{fg} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

となる。

なお、この手法は、積の微分の証明にも使え、$p(x) = f(x)g(x)$ とすれば、

$$\log|p| = \log|f| + \log|g|, \quad \frac{p'}{p} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}, \quad p' = fg\left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\right) = f'g + fg'$$

となるが、これを商の場合と比較すると、積の微分と商の微分の形の類似性の理由や、真ん中の符号の違いが対数法則から来ることなども見えてくるので、それなりに悪くない証明方法だと思う。

7 2 変数の合成関数の微分法による証明

次に、2 変数関数の合成関数の微分法による証明を紹介する。これは、2 変数関数の合成関数の微分法と、$1/x$ の導関数を必要とするので、通常の講義で 1

変数関数の商の導関数の説明に使うのは無理であるが、計算は 5 節の積と合成関数の説明よりも少し簡単になる。

まず、2 変数関数 $F=F(X,Y)$ に対して、それに $X=f(x)$, $Y=g(x)$ を代入した合成関数 $h(x)=F(f(x),g(x))$ の導関数は、

$$h'(x)=F_X(X,Y)f'(x)+F_Y(X,Y)g'(x)=F_X(f,g)f'+F_Y(f,g)g'$$

であることに注意する。今、$F(X,Y)=X/Y$ の場合を考えると、$h(x)=f(x)/g(x)$ であり、

$$F_X(X,Y)=\left(\frac{X}{Y}\right)_X=\frac{1}{Y},\quad F_Y(X,Y)=\left(\frac{X}{Y}\right)_Y=-\frac{X}{Y^2}$$

となる。この後者に、$1/x$ の微分を使用している。これにより、

$$h'=\frac{1}{g}f'+\left(-\frac{f}{g^2}\right)g'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

が得られる。

2 変数関数によって分子と分母を別々に考えることができ、5 節の積の微分の部分が必要なくなり少し計算が易しくなるが、実質的には同じことをやっていることになる。

8 最後に

今回は商の微分を 6 つ程度紹介して、それによる検算法も一つ示したが、ここに書いたもの以外にも商の微分の証明はあるかもしれない。他に思いついたら、また適宜追加したいと思う。

参考文献

[1] 竹野茂治、“「無限小」による微分の公式の証明”, (2015)
http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/basic3/data/dx-1.pdf

[2] デボラ・ヒューズ=ハレット 他 (永橋英郎訳)、「概念を大切にする微積分 1 変数」(2010)、日本評論社

[3] 石川琢磨、植野義明、中根静男、「微分積分学」(2008)、学術図書出版社