

2025 年 11 月 12 日

# 増減の変わり目ではない極の例

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

## 1 はじめに

極大、極小に関する定義は、関数の増減とは無関係に、その付近での最大、最小となるところ（通常は唯一の最大点、最小点）と定義される。

一方、増減表では、増加から減少への変わり目が極大、減少から増加への変わり目が極小、という風に考えるので、それが同値、すなわち「極大とは増加から減少への変わり目」と認識している学生も少なくないような気がする。しかし、実際には必ずしもそうではないが、本稿ではそのような例を紹介する。

また、本によってまちまちである「増加・減少」「極大・極小」の定義の違いについても紹介する。

## 2 増加・減少の定義

まずは「増加」「減少」の用語について少し振り返る。実は、この用語にはいくつかの用法があり、本によって若干意味が異なる。

今回、我々が使用している教科書 [1] のほかに、手元にあったいくつかの大学初年度向けの微積分の本 [2],[3], [4],[5],[6],[7], [9],[10],[11],[12]、および高校の教科書 [13],[14],[15] を調べてみた。

「増加」には、いわゆる「狭義単調増加」と「広義単調増加」の 2 種類があり、それぞれ以下のようになる。なお、 $f(x)$  は  $D$  で定義された関数とする。

### 定義 2.1

1.  $f(x)$  が  $A \subset D$  で**狭義単調増加**であるとは、 $a, b \in A$ ,  $a < b$  なる任意の  $a, b$  に対し、 $f(a) < f(b)$  となること。
2.  $f(x)$  が  $A \subset D$  で**広義単調増加**であるとは、 $a, b \in A$ ,  $a < b$  なる任意の  $a, b$  に対し、 $f(a) \leq f(b)$  となること。

「狭義」と「広義」の違いは、定義の最後の不等式の部分に等号がないかあるかだけであるが、これにより例えば定数関数は狭義単調増加ではないが、広義単調増加であることになる。

「狭義単調増加である」は「狭義単調増加する」と動詞形で書いたり、「狭義単調増加関数」と名詞形で書くこともある。また、「狭義」や「広義」をつけずに表現されることも多いが、その場合「単調増加」とするか「増加」とするかも色々流儀がある。中には「単調増加」と「増加」で意味を変えて使い分ける場合もあったように記憶している。

さて、上記の本でこれらの用法を調べてみると、以下のようであった。

1. 広義単調増加・減少は扱っておらず、狭義単調増加・減少のみで、それらを「増加・減少」と呼んでいる: [1], [6], [14]
2. 広義単調増加・減少は扱っておらず、狭義単調増加・減少のみで、それらを「単調増加・単調減少」と呼んでいる: [9],[3]
3. 狭義単調増加を「狭義単調増加」、広義単調増加を単に「単調増加」と呼んでいる: [2],[7]
4. 狭義単調増加を「増加」、広義単調増加を単に「広義の増加」と呼んでいる: [12]
5. 狭義単調増加を「増加」、広義単調増加を「非減少」と呼んでいる: [10]
6. 狭義単調増加を「増加」、広義単調増加を「単調増加」と呼んでいる: なし
7. 明確な定義はない(日常語としての「増加・減少」で済ませている?): [4],[5], [11], [13], [15]

なお、[7] は翻訳本のためか若干用語が違っていて、正確には「増加」は「増大」、「減少」は「減小」と訳している。

「単調増加」と「増加」を使い分けている本は、今回調べた本の中にはなかったが、ネットではそのような声も上がっていた。

### 3 極の定義

次は極の定義を振り返る。

極(極大、極小)の定義も複数あり、今回調べたところ、高校流の定義、狭義の極大、広義の極大の別と、さらに内点であることを要請しているかどうかで、色々な定義が

あることがわかった。また、「極大」という言葉も、本によって「極大である」という言い方と「極大になる」という言い方がある。

多分「である」は状態そのものを指し、「になる」はその状態に変化することを指しているのだと思うが、よって前者は「 $x = a$  では極大という状態である」という言い方で、後者は「 $x$  の値を変化させていくと、 $x = a$  以外では極大ではないが、 $x = a$  のところで極大という状態になる」ということを述べているのだろう。

以下は、いずれも「 $x = a$  で  $f(x)$  は**極大**である」ということの定義。

### 定義 3.1

1. 「高校流の極大」:  $x = a$  は  $D$  の内点で、 $a$  を境に  $f(x)$  が増加から減少に変わるとき。
2. 「広義の極大 (内点)」:  $a$  を含むある开区間  $I \subset D$  があり、任意の  $x \in I$  に対して  $f(a) \geq f(x)$  となるとき。
3. 「狭義の極大 (内点)」:  $a$  を含むある开区間  $I \subset D$  があり、 $x \neq a$  である任意の  $x \in I$  に対して  $f(a) > f(x)$  となるとき。
4. 「広義の極大」:  $a$  を含むある区間  $I \subset D$  があり、任意の  $x \in I$  に対して  $f(a) \geq f(x)$  となるとき。 $(a$  は  $D$  の境界点でも構わない)
5. 「狭義の極大」:  $a$  を含むある区間  $I \subset D$  があり、 $x \neq a$  である任意の  $x \in I$  に対して  $f(a) > f(x)$  となるとき。 $(a$  は  $D$  の境界点でも構わない)

「内点」とつけた方は  $a$  が  $D$  内のある开区間に含まれる必要があり、すなわち  $a$  の左右両側で  $f(x)$  が定義されている必要があるが、「内点」とつけない方は「开区間」とは断わっていないので、 $a$  が定義域の境界 (端点) でも構わず、 $a$  の左側、あるいは右側では  $f$  が定義されていない場合もありうる。

内点の条件がある定義の場合は、 $f(x)$  が微分可能ならば極大では  $f'(a) = 0$  となるが、内点の条件がない場合は、端点では  $f'(a) = 0$  とは限らない (そもそも端点では通常は微分係数は定義されない)。だから、内点の条件がない場合は、「 $x = a$  で極ならば  $f'(a) = 0$ 」という定理は、端点以外では、のように条件をつける必要があることになる。

また、「広義の極大」と「狭義の極大」は、定数関数の場合はすべての  $a$  で広義の極大となるが、狭義の極大とはならない、という違いがある。

この極の定義の状況についても調べてみた。

1. 「高校流の極大」を採用: [4], [13],[14],[15]

2. 「広義の極大 (内点)」を採用: [9],[12]
3. 「狭義の極大 (内点)」を採用: [3],[6],[11]
4. 内点とは明確に述べていないが「狭義の極大 (内点)」を採用: [1],[5]
5. 「広義の極大」を採用: [8],[10]
6. 「極大」ということばは「広義の極大 (内点)」を採用し、その上で「狭義の極大 (内点)」も「狭義の極大」として定義している: [2]

なお、[1] は一見内点に関する条件が定義には明確に書かれてはいないが、「微分可能ならば極では  $f'(a) = 0$ 」と述べているので、内点であることも暗黙に含まれているようである。

また、[5] は 1 変数関数の極の定義はないが、2 変数関数の極の定義が「狭義の極大 (内点)」を採用している。

[6] は、 $a \neq x$  の条件を書いていないが、不等式に等号をつけていないので、多分「狭義の極大 (内点)」の意味だろうと思われる。

翻訳本の 2 冊 ([8],[10]) がともに内点を条件としない「広義の極大」を採用しているのがやや興味深い。もしかすると海外ではこちらがスタンダードで、日本とは状況がやや違うのかもしれない。

高校流の極大の定義は、最近の教科書だけかと思ったが、少し古い高校の教科書でも同様だった。

## 4 極だが「高校流の極」ではない例

以下に、「狭義の極 (内点)」だが、「高校流の極」ではない、すなわち増減の変わり目とは言えない例を示す。

なお、以下では極小の例を示すが、 $f(x)$  の代わりに  $-f(x)$  を考えれば極小は極大に変わるので、極大の例も簡単に作ることができる。

以下の関数を考える。なお、 $a > 0$ ,  $0 < \theta < 1$  は定数とする。

$$f(x) = f(x; a, \theta) = \begin{cases} |x|^a \left(1 + \theta \cos \frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (1)$$

この  $f(x)$  は偶関数で、 $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$  よりすべての  $x$  に対して

$$(1 - \theta)|x|^a \leq f(x) \leq (1 + \theta)|x|^a$$

となり、よって  $x = 0$  も含めて連続であり、 $0 < \theta < 1$  より  $x = 0$  で「狭義の極小 (内点)」の意味で極小となる。

一方、 $\cos(1/x)$  は  $x = 0$  の近くで激しく  $-1$  と  $1$  の間を振動するから、 $f(x)$  の値は  $(1 - \theta)|x|^a$  と  $(1 + \theta)|x|^a$  の間を振動し、 $x = 0$  の近くで増加減少を限りなく繰り返す。よって、 $x = 0$  で減少から増加に変わるとは言えない。それを以下でちゃんと示す。

$x > 0$  では

$$f'(x) = ax^{a-1} \left( 1 + \theta \cos \frac{1}{x} \right) + \theta x^{a-2} \sin \frac{1}{x} = \theta x^{a-2} \left( \frac{ax}{\theta} + ax \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right) \quad (2)$$

となるので、自然数  $n$  に対して、 $x_n = 1/(\pi(n + 1/2))$  とすると、

$$f'(x_n) = \theta x_n^{a-2} \left( \frac{ax_n}{\theta} + \sin \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \right) = \theta x_n^{a-2} \left( \frac{a}{\theta \pi \left( n + \frac{1}{2} \right)} + (-1)^n \right)$$

となり、よって  $n$  が偶数なら  $f'(x_n) > 0$ 、 $n$  が奇数なら、ある程度大きい  $n$  に対しては  $ax_n/\theta < 1$  となるから、 $f'(x_n) < 0$  となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  より  $x_n$  は  $x = 0$  の近くにいくらでもあるから、 $x > 0$  の方には  $x = 0$  の近くにいくらでも  $f(x)$  が増加、減少する点があることになる。また、 $f(x)$  は偶関数なので、 $-x_n$  を考えれば  $x < 0$  でも同様のことが言える。

よって、この  $f(x)$  では、 $x = 0$  は高校流の極小、すなわち減少から増加に変わる点であるとは言えない。

なお、この  $f(x)$  は、 $x \neq 0$  では当然微分可能で、(2) より  $1 < a < 2$  では  $x = 0$  の近くでは有界ではなく、 $a = 2$  の場合は有界だが  $x \rightarrow 0$  での極限は存在せず振動する。 $a > 2$  の場合は  $f'(x)$  は  $x \rightarrow 0$  のときに  $0$  に収束する。

一方、 $f'(0)$  は、

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^{a-1} \operatorname{sign}(x) \left( 1 + \theta \cos \frac{1}{x} \right)$$

なので、 $0 < a \leq 1$  のときは  $f'(0)$  は存在せず、 $a > 1$  ならば  $f'(0) = 0$  となる。

すなわち、 $1 < a \leq 2$  のときは、すべての  $x$  で微分可能だが  $f'(x)$  は連続ではなく、この  $f(x)$  はそのような関数の例にもなっている。

## 5 最後に

実は、本稿は 4 節の例を示すために書き始めたのだが、増減や極の定義がどう書いてあるか手近な本を調べていたら、[12] にも 4 節の例とほぼ同じ

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

が載っていた。sin, cos の違いはあるが、この  $g(x)$  は実質的に  $2f(x; 2, 1/2)$  とほぼ同等である。

また、2 節、3 節で述べたように、単調増加関数・単調減少関数や極大・極小の定義には、実質的に意味の違う定義 (狭義・広義) があり、それらの使用状況は本によってかなりバラバラで、用語も統一されていないことがわかる。ある本で勉強していて、別な本を参考に参照する場合は、それらに注意し、用語の意味について、あらためて本毎にどのような意味かをよく確認する必要があるだろう。

## 参考文献

- [1] 石川琢磨、植野義明、中根静男、「微分積分学」(2017)、学術図書出版社
- [2] 杉浦光夫、「解析入門 I」(1990)、東京大学出版会
- [3] 中村拓司、松田真実、萬代武史、柳田達雄、「新編 基礎 微分積分」(2021)、学術図書出版社
- [4] 石村園子、「やさしく学べる基礎数学 線形代数・微分積分」(2013)、共立出版
- [5] 服部哲也、「微積分 ～講義・演習テキスト」(2024)、学術図書出版社
- [6] 石原繁、浅野重初、「理工系入門 微分積分」(2013)、裳華房
- [7] マイベルク、ファヘンアウア (高見穎郎訳)、「工科系の数学 1 数, ベクトル, 関数」(1999)、サイエンス社
- [8] マイベルク、ファヘンアウア (高見穎郎、薩摩順吉訳)、「工科系の数学 2 微分積分」(2003)、サイエンス社
- [9] 上野健爾監修、工学系数学教材研究会編、「工学系数学テキストシリーズ 微分積分」(2022)、森北出版

- [10] デボラ・ヒューズ＝ハレット、アンドリュー・M・グレアソン、ウィリアム・G・マツカラム他 (永橋英郎訳)、「概念を大切にする微積分 1 変数」(2010)、日本評論社
- [11] 新井一道、碓氷久、齋藤純一、高遠節夫、前田善文、山下哲、「新微分積分 I」(2017)、大日本図書
- [12] 田島一郎「岩波全書 解析入門」(1995)、岩波書店
- [13] 「新編数学 II」(2023)、啓林館
- [14] 「新編数学 II」(2024)、数研出版
- [15] 「数学 II standard」(2024)、東京書籍