2006 年 12 月 27 日

ライプニッツの公式の証明について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

教科書でも紹介されている、高次導関数に対する積の微分の公式であるライプニッツの公式

$$(fg)^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)f^{(k)}(t)g^{(n-k)}(t) \tag{1}$$

は、帰納法で証明されるのが普通だと思う[1]。しかしそのような証明だと、この右辺がなぜ 2 項展開定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)a^kb^{n-k} \tag{2}$$

に似た形をしているのか、という理由はよくわからない。

よってここでは、ある意味で (1) と (2) が似ていることの理由も説明するような偏微分 (と微分演算子) を用いた証明を紹介する。

2 偏微分を用いた説明

まず、$F(x,y)=f(x)g(y)$ (x,y の 2 変数関数) とすると、$f(t)g(t)=F(t,t)$ であり、よって

$$\{f(t)g(t)\}'=\frac{d}{dt}F(t,t) \tag{3}$$

[1]現在使用している教科書では $n=2,3,4$ の例から推測する、という方法によっているが、そのような式を厳密に証明する場合は通常は帰納法を利用することが多い。

となるが、2 変数関数の合成関数の微分法則

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(\phi(t),\psi(t)) &= \frac{\partial F}{\partial x}\ \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\ \frac{dy}{dt} \\ &= F_x(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) + F_y(\phi(t),\psi(t))\psi'(t) \end{aligned} \tag{4}$$

より、

$$(fg)' = F_x \cdot 1 + F_y \cdot 1 = \{(D_x + D_y)F\}(t,t) \quad \left(D_x = \frac{\partial}{\partial x},\ D_y = \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{5}$$

となる。今、

$$G(x,y) = (D_x + D_y)F(x,y) = F_x(x,y) + F_y(x,y)$$

とすると、(5) より $(fg)'(t) = G(t,t)$ なので、再び (5) と同じ計算を行えば、

$$(fg)'' = \frac{d}{dt}G(t,t) = \{(D_x + D_y)G(x,y)\}(t,t) = \{(D_x + D_y)^2 F(x,y)\}(t,t)$$

となる。ただし、この右辺は、

$$(D_x + D_y)^2 F(x,y) = (D_x + D_y)\{(D_x + D_y)F(x,y)\}$$

を意味することとする。

この計算を繰り返せば、

$$(fg)^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n}F(t,t) = \{(D_x + D_y)^n F(x,y)\}(t,t) \tag{6}$$

となることがわかる。そして、偏微分の順序交換の定理

$$F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y)$$

を用いれば、

$$\begin{aligned}(D_x + D_y)^2 F &= (D_x + D_y)(D_x + D_y)F = (D_x + D_y)(F_x + F_y) \\ &= F_{xx} + F_{yx} + F_{xy} + F_{yy} = F_{xx} + 2F_{xy} + F_{yy} \\ &= = (D_x^2 + 2D_xD_y + 2D_y^2)F \end{aligned}$$

のような展開ができること、すなわち一般に

$$(D_x + D_y)^n F(x, y) = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) D_x^k D_y^{n-k} \right) F(x, y) \tag{7}$$

となることが言える。

$F(x, y) = f(x)g(y)$ より、(7) の右辺は、

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) D_x^k D_y^{n-k} \right) f(x)g(y) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) D_x^k f(x) D_y^{n-k} g(y) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(y) \end{aligned} \tag{8}$$

となるので、結局 (6), (7), (8) より (1) が成り立つことがわかる。

3 おわりに

この証明も実は、(7) を示すには、正確には帰納法を必要とするのであるが、(7) はまさに 2 項定理による展開であり、これが成り立つことはある程度自然に見えるので、そう考えると、むしろこの (6) と (7) の部分、すなわち、

$$(fg)^{(n)}(t) = \{(D_x + D_y)^n f(x)g(y)\}(t, t) = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)$$

という変形が、(1) と (2) が似た形になる理由であると説明できるように思える。

このような説明は、もちろん偏微分を説明した後にしか行えないが、上のような意味でそれなりに意義のある説明ではないかと思う。