2025 年 12 月 25 日

広義積分と逆関数の広義積分

新潟工科大学 基礎教育・教養系 竹野茂治

1 はじめに

広義積分には、積分区間が有限で区間の端で関数が無限大になる広義積分と、積分区間が無限に長い広義積分の 2 種類がある。いずれも無限に長く伸びる領域の面積を求めることに対応し、それらは有限な領域の面積の極限として定義される。

特に狭義単調関数の場合は、その広義積分と逆関数の広義積分が同じ図形でこの 2 種類の積分になるが、しかし広義積分の極限の取り方は両者で同一ではないので、それらの値が同一であるかどうかは自明ではない。本稿ではそれについて考察する。

2 設定と目標

まずは本稿での設定と目標を示す。

$a\geq 0$ とし, 関数 $y=f(x)$ は $[a,\infty)$ で正値の狭義単調減少な連続関数で、

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \tag{1}$$

とする。すると $A=f(a)$ によって $(0,A]$ 上の $y=f(x)$ の逆関数 $x=f^{-1}(y)$ が存在し、正値の狭義単調減少な連続関数で、

$$\lim_{y\to +0} f^{-1}(y)=\infty \tag{2}$$

となる (図 1)。

このとき、両者の広義積分

$$\left\{\begin{array}{lll} I_1 & =\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx & =\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \\ I_2 & =\displaystyle\int_0^A f^{-1}(y)dy & =\displaystyle\lim_{B\to +0}\int_B^A f^{-1}(y)dy \end{array}\right. \tag{3}$$

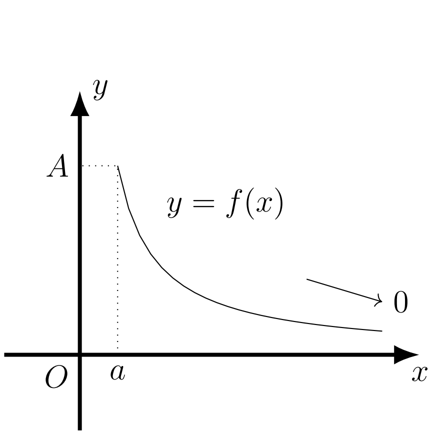

図 1: $y = f(x)$ と $x = f^{-1}(y)$

が、必ず

$$I_2 = I_1 + aA \tag{4}$$

となるのかどうかを考察するのが本稿の目標である。

これらの積分は、無限に伸びる図形としては対応しているのであるが、広義積分の取り方は、いずれも縦に有限な部分を切り落としてその極限とする (図 2) ので、I_2 の図形を I_1 の方に揃えて x, y を入れ変えて考えれば、I_1 の方は鉛直方向に切って、それを水平に (右に) 伸ばしていく極限、I_2 の方は水平方向に切って、それを鉛直に (下に) 伸ばしていく極限、ということになる

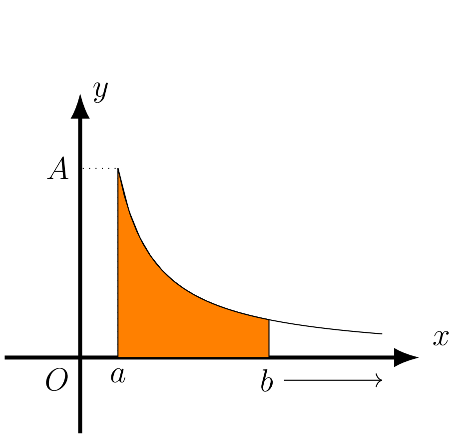

図 2: 広義積分のそれぞれの極限の取り方

このように、極限の取り方が両者で違っているので、I_1, I_2 の収束・発散が同時に起こるか、また (4) が成立するかどうかは自明ではない。

3 逆関数の積分

広義積分ではない通常の定積分については、逆関数の積分と元の関数の積分には、次のような関係が成り立つ。

定理 3.1 $y=g(x)$ が $[a,b]$ 上の狭義単調な連続関数のとき、

$$\int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(y)dy = [xg(x)]_a^b - \int_a^b g(x)dx \tag{5}$$

もし $g(x)$ が C^1 級、すなわち $g(x)$ が微分可能で $g'(x)$ も連続ならば定理 3.1 は比較的容易に証明できる。それは、(5) の左辺を $y=g(x)$ と置換して部分積分を利用すれば、

$$\int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(y)dy = \int_a^b g^{-1}(g(x))g'(x)dx = \int_a^b xg'(x)dx = [xg(x)]_a^b - \int_a^b g(x)dx$$

となるからである。

$g(x)$ の C^1 級を仮定しないと少し証明は厄介だが、以下のようにすれば証明できる。なお、とりあえず $g(x)$ は単調増加と仮定するが、$g(x)$ が単調減少のときは、$-g(x)$ が単調増加となり、$-g(x)$ について定理 3.1 が成立すれば $g(x)$ についても成立することは容易にわかるので、単調増加の場合のみ示せばよい。

区間 $[a,b]$ の分割を Δ、その最大幅を $|\Delta|$ とする:

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b、\quad |\Delta| = \max_{1\le k\le N}(x_k-x_{k-1})$$

この Δ に対し、各区間での左端の点から $g(x)$ のリーマン和 $s_1(\Delta)$ を作る:

$$s(\Delta) = \sum_{k=1}^N g(x_{k-1})(x_k-x_{k-1}) \tag{6}$$

$g(x)$ が連続なので、良く知られているようにこれは

$$s(\Delta) \to \int_a^b g(x)dx \quad (N\to\infty,\ |\Delta|\to 0\ \text{のとき}) \tag{7}$$

に収束する。一方、$y_k=g(x_k)$ $(0\le k\le N)$ とし、分割 Δ の g による像を $g(\Delta)$、その最大幅を $|g(\Delta)|$ とする:

$$g(\Delta):\ g(a)=y_0<y_1<\cdots<y_N=g(b),\quad |g(\Delta)| = \max_{1\le k\le N}(y_k-y_{k-1})$$

そして $g(\Delta)$ の各区間での右端の点から $g^{-1}(y)$ のリーマン和 $S(g(\Delta))$ を作る:

$$S(g(\Delta)) = \sum_{k=1}^{N} g^{-1}(y_k)(y_k - y_{k-1}) \tag{8}$$

$g(x)$ は $[a,b]$ 上で一様連続なので、$N \to \infty$, $|\Delta| \to 0$ に対して $|g(\Delta)| \to 0$ となり、よってこのリーマン和 $S(g(\Delta))$ についても

$$S(g(\Delta)) \to \int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(y)dy \quad (N \to \infty,\ |\Delta| \to 0 \text{ のとき}) \tag{9}$$

が言える。ここで、$s(\Delta)$ と $S(g(\Delta))$ の和は、

$$\begin{aligned} s(\Delta) + S(g(\Delta)) &= \sum_{k=1}^{N} y_{k-1}(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{N} x_k(y_k - y_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} (x_k y_k - x_{k-1}y_{k-1}) \ = \ x_N y_N - x_0 y_0 \ = \ bg(b) - ag(a) \end{aligned}$$

となるので、この式で $N \to \infty$, $|\Delta| \to 0$ とすれば、(7), (9) より (5) が得られ定理 3.1 が証明されることになる。

4 広義積分の同等性: その 1

本節では、次を示す。

命題 4.1 I_2 が収束すれば I_1 も収束し、(4) が成立する。

まず、前節の定理 3.1 より、$a < b$ なる任意の b に対して $B = f(b)$ とすると、

$$\int_B^A f^{-1}(y)dy = \int_{f(b)}^{f(a)} f^{-1}(y)dy = aA - bB + \int_a^b f(x)dx \tag{10}$$

となる。この式で $b \to \infty$ とすることを考えるが、$B = f(b) \to +0$ より、(4) が成立することはほぼ「$bB \to 0$」となるときであることがわかる。一方で bB の極限 $\infty \times 0$ の不定形なので 0 に収束することは自明ではない。しかし、$I_2 < \infty$ のときは次が言える。

補題 4.2 $I_2 < \infty$ のとき、$a < b$ なる任意の b, $B = f(b)$ に対し、

$$\int_0^B f^{-1}(y)dy \geq bB > 0 \tag{11}$$

証明

$a < b < d$ なる任意の d に対して $D = f(d)$ とすると、$D \leq y \leq B$ 上では $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(B)$ なので、

$$\int_D^B f^{-1}(y)dy \geq f^{-1}(B)(B-D) = b(B-D) \geq 0 \tag{12}$$

となる。よって $I_2 < \infty$ より (12) で $D \rightarrow +0$ とすれば (11) が得られる。■

$I_2 < \infty$ のときは $B \rightarrow +0$ のとき

$$\int_0^B f^{-1}(y)dy \rightarrow 0$$

となるので、(11) より $bB \rightarrow 0$ が成り立つ。よって、(10) で $B \rightarrow +0$ ($b \rightarrow \infty$) とすれば (10) の左辺は I_2 に収束するから右辺の積分も有限値 I_1 に収束し、かつ (4) が成立することがわかる。これで命題 4.1 が成り立つことが示された。

5 広義積分の同等性: その 2

次は、以下を示す。

命題 5.1 I_1 が収束すれば I_2 も収束し、(4) が成立する。

これが言えれば、I_1 と I_2 が同時に収束・発散することが示されることになり、広義積分の同等性が保証されることになる。

しかし、$I_1 < \infty$ のときは補題 4.2 に相当することを示すことができず、すなわち (10) の bB が 0 に収束することを直接示すことができない。よって、命題 5.1 は命題 4.1 の力を借りて証明する。

(10) より、任意の $0 < B < A, b = f^{-1}(B)$ に対し、

$$\int_B^A f^{-1}(y)dy = aA - bB + \int_a^b f(x)dx < aA + \int_a^b f(x)dx < aA + I_1 \qquad (13)$$

となり、この左辺は B に関して単調であるから、$I_1 < \infty$ のときは、(13) の左辺の積分の $B \to +0$ の極限 I_2 は

$$I_2 \leq aA + I_1 < \infty$$

と有限値に収束することがわかる。よって、命題 4.1 により (4) が成立するので (当然補題 4.2 も成り立つ)、これで 命題 5.1 が示されたことになる。

6 最後に

5 節の「$I_1 < \infty$ のときは補題 4.2 に相当することを示すことができず」というのがまさに I_1 と I_2 の切り方の違いに由来していて、よって本稿の内容はそれほど自明ではないと思うが、こういう話はほぼ見たことがない。

それは、もしかすると、実際には本稿にあるように案外簡単に示せることなので、皆書くまでもないと思っている話だったいるするのかもしれないし、たいして役に立つ話ではないのでスルーしているのかもしれない。